JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE MATHIEU

Sur l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ de Gauss

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 8 (1882), p. 357-382.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1882_3_8__357_0>

Sur l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction F $(\alpha, \beta, \gamma, x)$ *de Gauss;*

PAR M. ÉMILE **MATHIEU.**

La théorie de la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ de Gauss et de l'équation différentielle du second ordre à laquelle elle satisfait a été généralisée de diverses manières par plusieurs géomètres. Mais comme, dans les applications des Mathématiques, on rencontre rarement d'équations différentielles d'ordre supérieur au second, la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ et l'équation du second ordre à laquelle elle satisfait conservent un intérêt particulier. J'examine dans cet article les cas dans lesquels la solution générale de cette équation peut s'exprimer sous forme finie; j'obtiens par conséquent aussi les cas où la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ peut elle-même s'exprimer sous forme finie. Quand il n'y aura qu'une solution particulière susceptible d'être exprimée ainsi, je donne une formule qui ramène immédiatement le calcul d'une seconde solution particulière à celui de l'intégrale d'une différentielle binôme non intégrable exactement. Enfin je recherche quand la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2\varphi)$ est périodique par rapport à φ et a 2π pour période.

SUR LES PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DE L'ÉQUATION PROPOSÉE.

1. Nous allons rappeler rapidement les propriétés générales de l'équation

$$(1) \qquad x(1-x)\frac{d^2P}{dx^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\frac{dP}{dx} - \alpha\beta P = 0.$$

En posant en général

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots,$$

la solution générale de cette équation est

$$CF(\alpha, \beta, \gamma, x) + C'x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x),$$

C, C′ étant deux constantes arbitraires. Toutefois, dans le cas où γ est égal à 1, les deux solutions particulières qui multiplient C et C′ sont identiques, et l'on remplacera la seconde solution particulière par la limite de

$$\frac{x^{\varepsilon}F(\alpha+\varepsilon, \beta+\varepsilon, 1+\varepsilon, x) - F(\alpha, \beta, 1-\varepsilon, x)}{\varepsilon},$$

quand ε tend vers zéro, ou par

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x)\log x + \frac{dF}{d\alpha} + \frac{dF}{d\beta} + 2\frac{dF}{d\gamma},$$

pour $\gamma = 1$.

La transformée en $y = 1 - x$ de l'équation différentielle est

$$y(1-y)\frac{d^2P}{dy^2} + [\alpha+\beta+1-\gamma-(\alpha+\beta+1)y]\frac{dP}{dy} - \alpha\beta P = 0,$$

qui est de même forme et dont la solution générale est

$$CF(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, y) + C'y^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, y),$$

C, C′ étant deux constantes arbitraires. D'après cela, la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ est égale à cette même expression dans laquelle C et C′ ont des valeurs déterminées. D'après une formule donnée par Gauss, on a

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} F(\alpha,\beta,\gamma,x) = {}& \frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\Pi(\gamma-\beta-1)}F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, y) \\ & + \frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\alpha+\beta-\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)}y^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, y)\end{aligned}\right.$$

[*Determinatio seriei nostræ per æquationem differentialem* (*Gauss Werke*, t. III)], le signe $\Pi(n)$ étant équivalent au signe $\Gamma(n+1)$ de Legendre.

2. Si l'on pose $x = \frac{1}{z}$, $P = z^{\alpha} P'$, l'équation (1) devient

$$z(1-z)\frac{d^2P'}{dz^2} - [\beta - \alpha - 1 - (\gamma - 2\alpha - 2)z]P' + \alpha(\gamma - \alpha - 1)P' = 0,$$

dont une solution est $F(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta, z)$. On a donc, pour solutions de l'équation primitive,

$$x^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta, \frac{1}{x}\right), \quad x^{-\beta} F\left(\beta, \beta+1-\gamma, \beta+1-\alpha, \frac{1}{x}\right),$$

la seconde se déduisant de la première par analogie.

Les points critiques de la solution générale sont donc $x = 0$, $x = 1$ et $x = \infty$, dont le premier n'appartient pas à la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$.

La série qui donne $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ n'est convergente que pour des valeurs de x qui ne sont pas plus grandes que 1 ou dont le module n'est pas plus grand. Pour définir la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ pour des valeurs de x plus grandes que 1, il faut imaginer qu'elle continue à satisfaire à l'équation différentielle et que la variable décrive un demi-cercle infiniment petit autour du point $x = 1$.

Ainsi, pour des valeurs de x plus grandes que 1, on a

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, x) = {} & M x^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta, \frac{1}{x}\right) \\ & + N x^{-\beta} F\left(\beta, \beta+1-\gamma, \beta+1-\alpha, \frac{1}{x}\right), \end{aligned} \right.$$

M, N étant des constantes à déterminer. Pour simplifier, écrivons la formule (2) ainsi :

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, x) = {} & A\, F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, y) \\ & + B y^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma+1-\alpha-\beta, y). \end{aligned}$$

Posons $y = re^{\theta i}$, où $i = \sqrt{-1}$ et r est infiniment petit, et faisons croître θ de zéro à π, la formule se changera en la suivante :

$$(4)\left\{\begin{aligned}F(\alpha,\beta,\gamma,x) = {} & A\,F(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma,y)\\ & + B r^{\gamma-\alpha-\beta} e^{(\gamma-\alpha-\beta)\pi i} F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma+1-\alpha-\beta,y).\end{aligned}\right.$$

Dans la formule (3) remplaçons les fonctions du second membre par les valeurs suivantes, qui se déduisent de (2) :

$$\begin{aligned}&F\left(\alpha,\alpha+1-\gamma,\alpha+1-\beta,\frac{1}{x}\right)\\ &\quad= \frac{\Pi(\alpha-\beta)\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(-\beta)\Pi(\gamma-\beta-1)} F\left(\alpha,\alpha+1-\gamma,\alpha+\beta+1-\gamma,1-\frac{1}{x}\right)\\ &\qquad+\frac{\Pi(\alpha-\beta)\Pi(\alpha+\beta-\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\alpha-\gamma)}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{\gamma-\alpha-\beta} F\left(1-\beta,\gamma-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1,1-\frac{1}{x}\right),\\ &F\left(\beta,\beta+1-\gamma,\beta+1-\alpha,\frac{1}{x}\right)\\ &\quad= \frac{\Pi(\beta-\alpha)\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(-\alpha)\Pi(\gamma-\alpha-1)} F\left(\beta,\beta+1-\gamma,\alpha+\beta+1-\gamma,1-\frac{1}{x}\right)\\ &\qquad+\frac{\Pi(\beta-\alpha)\Pi(\alpha+\beta-\gamma-1)}{\Pi(\beta-1)\Pi(\beta-\gamma)}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{\gamma-\alpha-\beta} F\left(1-\alpha,\gamma-\alpha,\gamma-\alpha-\beta+1,1-\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

Pour que la valeur de x soit la même dans (3) que dans (4), faisons-y $x-1=r$. Les substitutions précédentes étant faites, les formules (3) et (4) renfermeront des termes qui ne dépendront pas de $r^{\gamma-\alpha-\beta}$ et d'autres qui contiendront ce facteur. Pour identifier les formules (3), (4), il suffit d'identifier ces deux sortes de termes et l'on obtient

$$\begin{aligned}A &= M\frac{\Pi(\alpha-\beta)\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(-\beta)\Pi(\gamma-\beta-1)}+N\frac{\Pi(\beta-\alpha)\Pi(\gamma-\alpha-\beta+1)}{\Pi(-\alpha)\Pi(\gamma-\alpha-1)},\\ e^{(\gamma-\alpha-\beta)\pi i}B &= M\frac{\Pi(\alpha-\beta)\Pi(\alpha+\beta-\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\alpha-\gamma)}+N\frac{\Pi(\beta-\alpha)\Pi(\alpha+\beta-\gamma-1)}{\Pi(\beta-1)\Pi(\beta-\gamma)}.\end{aligned}$$

Remplaçons A, B par leurs valeurs et posons

$$M=\frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\beta-\alpha-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\Pi(\beta-1)}h,\quad N=\frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\beta-1)\Pi(\alpha-\gamma)}l,$$

h, l étant deux nouvelles inconnues ; appliquons ensuite plusieurs fois la formule

$$\Pi(-z)\,\Pi(z-1) = \frac{\pi}{\sin z\pi},$$

et nous aurons

$$h \sin\beta\pi - l \sin\alpha\pi = \sin(\beta-\alpha)\pi,$$
$$h \sin(\gamma-\alpha)\pi - l \sin(\gamma-\beta)\pi = \sin(\beta-\alpha)\pi . e^{(\gamma-\alpha-\beta)\pi i}.$$

Les deux solutions sont

$$h = e^{-\alpha\pi i}, \quad l = e^{-\beta\pi i};$$

ainsi M, N sont complètement déterminés.

TABLEAU DE FORMULES REPRÉSENTANT DES SOLUTIONS.

3. Kummer a donné vingt-quatre formes de solutions qu'on peut ranger en six classes de quatre fonctions, les quatre fonctions de chaque classe étant des solutions équivalentes, tandis que les solutions appartenant à deux classes distinctes sont en général différentes. Jacobi a obtenu très rapidement ces formes dans son Mémoire sur la série hypergéométrique (t. III de ses Mémoires).

Les solutions de la première classe sont

$$\text{Classe I}\ldots\ldots \begin{cases} F(\alpha, \beta, \gamma, x), \\ (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x), \\ (1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \dfrac{x}{x-1}\right), \\ (1-x)^{-\beta} F\left(\beta, \gamma-\alpha, \gamma, \dfrac{x}{x-1}\right). \end{cases}$$

Pour les autres classes, il suffit de marquer une des formes de solution, parce que les trois autres s'en déduisent en changeant la fonction F qui s'y trouve, comme la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ est changée par les trois formes suivantes de la première classe. On a ainsi

Classe II....... $F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x)$,

Classe III...... $x^{-\alpha}F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha-\beta+1, \frac{1}{x}\right)$,

Classe IV...... $x^{-\beta}F\left(\beta, \beta+1-\gamma, \beta+1-\alpha, \frac{1}{x}\right)$,

Classe V....... $x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x)$,

Classe VI...... $(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma+1-\alpha-\beta, 1-x)$.

DE DIFFERENTS CAS OU L'ÉQUATION PEUT S'INTÉGRER COMPLÈTEMENT SOUS FORME FINIE.

4. La fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ n'a en général aucun sens si γ est un nombre entier négatif, puisque tous les termes deviennent infinis à partir d'un certain rang. Il y aura toutefois exception si l'un des nombres α, β est lui-même entier négatif et que sa valeur absolue soit moindre que celle de γ. En effet, supposons que l'on fasse d'abord

$$\alpha = -m + \varepsilon, \quad \gamma = -n + \eta,$$

m, n étant deux nombres entiers positifs et $n > m$, tandis que ε, η sont de très petites quantités. Faisons tendre ε et η vers zéro; la limite du rapport $\frac{\varepsilon}{\eta}$ restant indéterminée, l'expression de $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ pourra être considérée à la limite comme la solution générale de l'équation du second ordre. Mais, si l'on suppose que la limite de $\frac{\varepsilon}{\eta}$ soit nulle, l'expression de $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ se changera en un polynôme entier, comme si γ était un nombre quelconque, et ce polynôme sera une solution particulière.

Nous désignerons ce polynôme par

$$f(\alpha, \beta, \gamma, x);$$

et, d'après ce que nous venons de dire, les deux nombres entiers α, γ

satisfont aux inégalités

$$\gamma \leqq \alpha \leqq 0.$$

On a, en général,

$$(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x) = F(\alpha, \beta, \gamma, x);$$

mais, au contraire, les deux fonctions

$$(a) \qquad f(\alpha, \beta, \gamma, x), \quad (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} f(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x)$$

sont ordinairement distinctes, puisque, si β n'est pas entier, la seconde fonction est irrationnelle, tandis que la première est entière. Les premier et troisième éléments de $f(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x)$ satisfont bien aux inégalités

$$\gamma \leqq \gamma - \alpha \leqq 0,$$

qui rentrent dans les inégalités précédentes et sont deux nombres entiers. Enfin, les deux fonctions (a) sont solutions de l'équation différentielle, lorsque γ et α satisfont aux conditions ci-dessus.

Supposons $\alpha = \gamma = -n$, n étant un nombre entier positif;

$$f(-n, \beta, -n, x)$$

représentera la somme des $n+1$ premiers termes du développement de $(1-x)^{-\beta}$, en sorte que n n'entre plus dans la fonction que pour en déterminer le nombre des termes.

5. On peut se servir de ce résultat pour intégrer l'équation sous forme finie dans plusieurs cas que nous allons indiquer.

Premier cas. — Supposons α, γ deux nombres entiers, satisfaisant à ces inégalités

$$(b) \qquad \alpha - 1 \geqq 0, \quad \gamma - \alpha - 1 \geqq 0.$$

Dans le cas général, on a (n° **1**) la solution

$$x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x);$$

mais, dans le cas actuel, comme le premier et le troisième élément sont des nombres entiers qui satisfont aux inégalités

$$2-\gamma \leqq \alpha+1-\gamma \leqq 0,$$

nous aurons la première de ces deux solutions de forme finie,

$$x^{1-\gamma} f(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x),$$
$$(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} x^{1-\gamma} f(-\alpha+1, -\beta+1, 2-\gamma, x);$$

la seconde se déduisant de la première, d'après ce que nous avons dit au numéro précédent.

Ces deux solutions sont évidemment distinctes, si β est fractionnaire; supposons ensuite que β soit entier.

1° Si β est négatif, les deux solutions seront différentes; car, en supprimant le facteur commun $x^{1-\gamma}$, elles sont respectivement des degrés $\alpha+1-\gamma$ et $(\alpha-1)+(\gamma-\alpha-\beta)=\gamma-1-\beta$.

2° Si β est positif et que l'on ait

$$\gamma-\alpha-\beta<0,$$

la première solution est entière, la seconde fractionnaire; elles sont donc distinctes.

3° Si β est positif et que l'on ait

$$\gamma-\alpha-\beta \geqq 0,$$

on en conclura ces deux inégalités semblables aux inégalités (b)

$$\beta-1 \geqq 0, \quad \gamma-\beta-1 \geqq 0,$$

et par conséquent les deux nombres α et β satisfont tout à fait aux mêmes conditions. Il est aisé de voir qu'alors les deux solutions trouvées sont identiques. Mais faisons $\beta = n+\varepsilon$, n étant un nombre entier satisfaisant aux deux inégalités précédentes et ε une très petite quantité; la seconde solution sera différente de la première et l'on pourra la remplacer par

$$x^{1-\gamma} \frac{f(\alpha+1-\gamma, n+\varepsilon+1-\gamma, 2-\gamma, x)-(1-x)^{\gamma-\alpha-n-\varepsilon} f(-\alpha+1, -n-\varepsilon+1, 2-\gamma, x)}{\varepsilon}.$$

Pour $\varepsilon = 0$, cette expression se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, et sa vraie valeur donne une seconde solution

$$\begin{aligned} & x^{1-\gamma} \frac{d}{d\beta} f(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x) \\ & \quad - x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} \frac{d}{d\beta} f(-\alpha+1, -\beta+1, 2-\gamma, x) \\ & \quad + x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} \log(1-x) f(-\alpha+1, -\beta+1, 2-\gamma, x). \end{aligned}$$

Comme α et β entrent tout à fait de la même manière, on peut remplacer les deux dérivées par rapport à β par des dérivées par rapport à α.

Deuxième cas. — Supposons encore α, γ entiers, mais satisfaisant à ces deux inégalités

$$(c) \qquad \alpha \leqq 0, \quad \gamma - \alpha \leqq 0;$$

on aura ces deux solutions

$$f(\alpha, \beta, \gamma, x),$$
$$(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} f(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x),$$

qui seront toujours distinctes, si β n'est pas un nombre entier.

Supposons ensuite que β soit entier.

1° Si l'on a

$$\gamma - \alpha - \beta < 0,$$

la première solution est entière, l'autre est fractionnaire; elles sont donc distinctes.

2° Si l'on a

$$\gamma - \alpha - \beta \geqq 0,$$

on en conclura

$$\beta \leqq \gamma - \alpha \leqq 0,$$

ainsi β sera négatif. Alors distinguons les deux hypothèses $\gamma - \beta > 0$ et $\gamma - \beta \leqq 0$.

Si $\gamma - \beta$ est > 0, comme on a aussi $\gamma - \alpha \leqq 0$, il en résultera $\beta < \alpha$; la première solution sera du degré $-\alpha$, la seconde du degré

$$(\alpha - \gamma) + (\gamma - \alpha - \beta) = -\beta;$$

elles sont donc distinctes.

Dans la seconde hypothèse on aura les inégalités

$$\beta \leqq 0, \quad \gamma - \beta \leqq 0,$$

entièrement analogues à (c), et les deux nombres α, β entrent de la même manière. Les deux solutions sont alors identiques, et l'on en obtiendra une nouvelle comme on a fait dans le premier cas.

Troisième cas. — Supposons que α, β soient deux nombres entiers de signe contraire, et qu'on ait

$$\alpha - 1 \geqq 0, \quad \beta \leqq 0.$$

Dans le cas général, on a la solution (n° **2**)

$$x^{-\beta} F\left(\beta,\ \beta + 1 - \gamma,\ \beta - \alpha + 1,\ \frac{1}{x}\right);$$

mais, dans le cas actuel, le premier et le troisième élément sont négatifs et satisfont à ces inégalités

$$\beta - \alpha + 1 \leqq \beta \leqq 0;$$

on en conclut ces deux solutions

$$x^{-\beta} f\left(\beta,\ \beta + 1 - \gamma,\ \beta - \alpha + 1,\ \frac{1}{x}\right),$$
$$x^{\alpha-\gamma}(1 - x)^{\gamma-\alpha-\beta} f\left(1 - \alpha,\ \gamma - \alpha,\ \beta - \alpha + 1,\ \frac{1}{x}\right),$$

qui sont évidemment distinctes si γ est fractionnaire.

La première est une fonction entière qui ne renferme en facteur aucune puissance de x; la seconde, au contraire, contiendra le facteur $x^{1-\gamma}$; elles sont donc distinctes si γ est un nombre entier différent de 1. Si γ est égal à 1, les deux solutions sont identiques, et l'on en obtiendra une nouvelle en opérant comme dans les deux cas précédents.

Quatrième cas. — Supposons que $\gamma-\alpha$, $\gamma-\beta$ soient deux nombres entiers et qu'on ait

$$\gamma-\alpha \leqq 0, \quad \gamma-\beta-1 \geqq 0;$$

ces deux inégalités peuvent s'écrire

$$\beta-\alpha+1 \leqq \beta+1-\gamma \leqq 0,$$

et l'on obtient les deux mêmes formules que dans le cas précédent.

Supposons que γ soit entier. Si l'on a

$$\gamma-\alpha-\beta < 0,$$

les deux solutions sont évidemment distinctes.

Si l'on a

$$\gamma-\alpha-\beta \geqq 0,$$

il en résulte $\beta \leqq 0$. Distinguons deux hypothèses, suivant que $\alpha-1$ est positif ou négatif.

Si $\alpha-1$ est $\geqq 0$, nous retomberons sur le troisième cas. Si l'on a

$$\alpha-1 < 0, \quad \text{d'où} \quad \gamma-1 \leqq \alpha-1 < 0,$$

les deux solutions sont identiques; mais on revient à une subdivision du deuxième cas, à moins que γ ne soit égal à 1, et, dans cette dernière supposition, on obtiendra une nouvelle solution, comme on a déjà dit.

Cinquième cas. — Supposons que α, $\gamma-\beta$ soient entiers et qu'on ait

$$\alpha-1 \geqq 0, \quad \gamma-\beta \leqq 0.$$

Dans le cas général, on a cette solution de la sixième classe,

$$(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\,\mathrm{F}(\gamma-\beta,\ \gamma-\alpha,\ \gamma-\alpha-\beta+1,\ 1-x);$$

on en conclut, dans le cas actuel, ces deux solutions

$$(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} f(\gamma-\beta,\ \gamma-\alpha,\ \gamma-\alpha-\beta+1,\ 1-x),$$
$$(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} x^{1-\gamma} f(1-\alpha,\ 1-\beta,\ \gamma-\alpha-\beta+1,\ 1-x),$$

qui sont évidemment distinctes si γ n'est pas un nombre entier. Nous ne nous arrêterons pas ici, ni dans le cas suivant, à l'hypothèse où les trois nombres α, β, γ sont entiers.

Sixième cas. — Supposons encore que α, $\gamma-\beta$ soient entiers, mais qu'on ait

$$\alpha \leqq 0, \quad \gamma-\beta-1 \geqq 0.$$

Dans le cas général, on a cette solution de la deuxième classe

$$x^{-\alpha}\,\mathrm{F}\left(\alpha,\ \alpha+1-\gamma,\ \alpha+\beta+1-\gamma,\ \frac{x-1}{x}\right),$$

et l'on en conclut ces deux solutions distinctes

$$x^{-\alpha} f\left(\alpha,\ \alpha+1-\gamma,\ \alpha+\beta+1-\gamma,\ \frac{x-1}{x}\right),$$
$$x^{-\beta} f\left(\beta+1-\gamma,\ \beta,\ \alpha+\beta+1-\gamma,\ \frac{x-1}{x}\right).$$

DES DIFFÉRENTS CAS OU DEUX DES CINQ NOMBRES $\alpha, \beta, \gamma, \gamma-\alpha, \gamma-\beta$ SONT ENTIERS.

6. Il est aisé de reconnaître que l'équation du second ordre peut être intégrée sous forme finie, toutes les fois que deux des nombres α, β, γ, $\gamma-\alpha$, $\gamma-\beta$ sont entiers.

Après les cas déjà examinés, il suffit de considérer les sept cas indiqués par les inégalités suivantes, où tous les premiers membres sont supposés entiers :

1° $\alpha < 0, \ \beta < 0;$

2° $\alpha < 0, \ \gamma - \alpha - 1 > 0;$

3° $\alpha < 0, \ \gamma - \beta < 0;$

4° $\alpha - 1 > 0, \ \beta - 1 > 0;$

5° $\alpha - 1 > 0, \ \gamma - \beta - 1 > 0;$

6° $\gamma - \alpha < 0, \ \gamma - \beta < 0;$

7° $\gamma - \alpha - 1 > 0, \ \gamma - \beta - 1 > 0,$

les signes $>$ et $<$ n'excluant pas l'égalité.

Remarquons d'abord que si, dans l'expression $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, α est seul un élément entier négatif, les six solutions suivantes déduites du n° **3**, et qui sont de forme finie, sont identiques :

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x),$$
$$(1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \ \gamma - \beta, \ \gamma, \ \frac{x}{x-1}\right),$$
$$x^{-\alpha} F\left(\alpha, \ \alpha + 1 - \gamma, \ \alpha + \beta + 1 - \gamma, \ \frac{x-1}{x}\right),$$
$$F(\alpha, \ \beta, \ \alpha + \beta + 1 - \gamma, \ 1 - x),$$
$$x^{-\alpha} F\left(\alpha, \ \alpha + 1 - \gamma, \ \alpha + 1 - \beta, \ \frac{1}{x}\right),$$
$$(1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \ \gamma - \beta, \ \alpha + 1 - \beta, \ \frac{1}{1-x}\right).$$

En effet, on reconnaît aisément que toutes ces fonctions sont entières, et, comme elles ne renferment pas une partie multipliée par $x^{1-\gamma}$, elles sont toutes identiques à la première.

Si β est un nombre entier négatif, on obtiendra de même six solutions de forme finie, identiques à $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, la première et la quatrième du groupe précédent se retrouvant dans ce second groupe. Si donc α, β sont deux nombres entiers négatifs, dix des vingt-quatre fonctions du n° **3** sont de forme finie et elles sont équivalentes.

On voit, d'après cela, facilement que, dans les sept cas que nous avons à examiner, on ne pourra déduire du Tableau (n° 3) qu'une solution de forme finie.

Or, connaissant une solution P de l'équation

$$x(1-x)\frac{d^2P}{dx^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\frac{dP}{dx} - \alpha\beta P = 0,$$

on en a une seconde

$$(a) \qquad P\int x^{-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}\frac{1}{P^2}\,dx.$$

Remarquons que l'expression

$$x^h(1-x)^g\frac{1}{\varphi(x)}\,dx,$$

où $\varphi(x)$ est une fonction rationnelle, est intégrable comme la différentielle binôme

$$x^h(1-x)^g\,dx,$$

si h ou g ou $h+g$ est un nombre entier. Faisons donc

$$P = F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

dans l'expression (a), et nous obtenons dans les trois premiers cas l'intégrale

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x)\int x^{-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}\frac{1}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)^2}\,dx,$$

qui peut être déterminée sous forme finie.

7. Mais, pour plus d'uniformité, prenons pour P, dans chacun des sept cas, une expression qui renferme une fonction F dont les deux premiers éléments sont entiers négatifs :

1° $P = F(\alpha, \beta, \gamma, x)$;

2° $P = x^{-\alpha}F\left(\alpha,\ \alpha+1-\gamma,\ \alpha+1-\beta,\ \frac{1}{x}\right)$;

3° $P = (1-x)^{-\alpha}F\left(\alpha,\ \gamma-\beta,\ \alpha+1-\beta\ \frac{1}{1-x}\right)$

4° $P = x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(1-\alpha,\ 1-\beta,\ 2-\gamma,\ x)$;

5° $P = x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\beta-1}F\left(1-\alpha,\ \beta+1-\gamma,\ \beta+1-\alpha,\ \frac{1}{x}\right)$;

6° $P = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma,\ x)$;

7° $P = x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma,\ x)$.

En substituant P dans la formule (a), on trouve que l'expression est intégrable dans chacun des sept cas. De plus, on reconnaîtra facilement que toutes les intégrales qui se présentent prennent la forme

$$(b) \qquad \int x^{-c}(1-x)^{c-a-b-1}\frac{dx}{F(a, b, c, x)^2},$$

où a, b sont deux nombres entiers négatifs, ou qu'elles s'y ramènent par un changement de la variable, qui se présente de soi-même. On aurait pu aussi ramener le premier élément de la fonction F à être entier négatif et le troisième à être entier positif.

Réciproquement, étant parvenu à intégrer l'équation différentielle dans les cas énumérés au n° 5, on en peut conclure la valeur d'une intégrale. En effet, supposons que γ, α soient deux nombres entiers négatifs satisfaisant aux conditions

$$\gamma < \alpha < 0;$$

on a les deux solutions

$$f(\alpha, \beta, \gamma, x), \quad (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}f(\gamma-\alpha, \ \gamma-\beta, \ \gamma, \ x),$$

et l'on en conclut

$$f(\alpha, \beta, \gamma, x)\int \frac{x^{-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}\,dx}{f(\alpha, \beta, \gamma, x)^2}$$
$$= C(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}f(\gamma-\alpha, \ \gamma-\beta, \ \gamma, \ x) + C'f(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

ou

$$\int \frac{x^{-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}\,dx}{f(\alpha, \beta, \gamma, x)^2} = C\frac{(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}f(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x)}{f(\alpha, \beta, \gamma, x)} + C',$$

C' étant une constante arbitraire et C une autre constante qu'on obtiendra en différentiant les deux membres et faisant $x = 1$. Mais l'intégrale (b), où a, b sont deux nombres entiers négatifs, a une valeur plus compliquée renfermant en général des logarithmes et des arc tang.

SUR LA DÉTERMINATION DE LA VALEUR D'UNE INTÉGRALE INDÉFINIE.

8. D'après ce que nous avons vu dans le numéro précédent, nous avons à déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int \frac{x^{-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)^2}\,dx,$$

quand α, β sont deux nombres entiers négatifs ou, si l'on préfère, quand α et γ sont deux entiers, le premier négatif, le second positif. Mais considérons plus généralement cette intégrale quand α seulement est un nombre entier négatif $-n$.

La quantité soumise au signe d'intégration peut alors se mettre sous une forme extrêmement remarquable. On a, en effet,

$$(a)\quad \frac{x^{-\gamma}(1-x)^{\gamma+n-\beta-1}}{F(-n, \beta, \gamma, x)^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{x^{-\gamma+1}(1-x)^{\gamma+n-\beta}\chi(x)}{F(-n, \beta, \gamma, x)}\right] + Bx^{-\gamma}(1-x)^{\gamma+n-\beta-1},$$

$\chi(x)$ étant un polynôme entier du degré $n-1$,

$$A_0 + A_1 x + \ldots + A_{n-1}x^{n-1};$$

les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ et la constante B sont des quantités à déterminer.

Voici les valeurs de ces quantités dans les deux cas les plus simples :

1° Si $n=1$, on trouve

$$A_0 = \frac{\beta}{\beta-\gamma}, \quad B = \frac{\gamma(\beta-1)}{\beta-\gamma}.$$

2° Si $n=2$, on a

$$A_0 = \frac{(\beta^2-3\beta)\gamma + 2\beta^2 - 2\beta}{2(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)}, \quad A_1 = \frac{-(\beta-1)\beta(\beta+1)}{2(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)},$$

$$B = \frac{\gamma(\gamma+1)(\beta-2)(\beta-1)}{2(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)}.$$

Dans le cas général, on a

$$B = \frac{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)\times(\beta-1)(\beta-2)\ldots(\beta-n)}{1.2\ldots n(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)\ldots(\beta-\gamma-n+1)}.$$

Connaissant B, on en déduira successivement $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$.

On voit que B sera nul pour les valeurs de β égales à $1, 2, \ldots, n$. B sera infini quand $\beta-\gamma$ aura les valeurs $1, 2, \ldots, n-1$, et la formule (a) ne sera plus applicable ; mais, dans ce cas, posons $\beta = \gamma + k$, k ayant pour valeur un des nombres $0, 1, 2, \ldots, n-1$, et employons la formule

$$F(-n, \gamma+k, \gamma, x) = (1-x)^{n-k} F(-k, \gamma+n, \gamma, x);$$

le premier membre de (a) deviendra

$$\frac{x^{-\gamma}(1-x)^{-n+k-1}}{F(-k, \gamma+n, \gamma, x)^2},$$

et l'on pourra appliquer à cette expression la formule (a), en changeant n, β en k, $\gamma+n$.

De la formule (a), on conclut qu'on peut, de l'intégrale proposée, extraire une partie entièrement algébrique,

$$\frac{x^{-\gamma+1}(1-x)^{\gamma+n-\beta}\chi(x)}{F(-n, \beta, \gamma, x)}.$$

et qu'il n'y aura plus à la compléter que par l'addition de l'intégrale d'une différentielle binôme,

$$(b) \qquad B\int x^{-\gamma}(1-x)^{\gamma+n-\beta-1}\,dx,$$

dont on pourra avoir la valeur exacte si γ ou $\gamma-\beta$ ou β est entier.

9. Mais, pour revenir au problème du n° **7**, il suffit de considérer le cas où β est entier négatif ou celui où γ est entier positif. Supposons, par exemple, γ entier positif. On pourra, en intégrant par parties la différentielle binôme, diminuer successivement d'une unité les grandeurs des exposants; on extraira ainsi de l'intégrale (b) différentes parties algébriques, et il ne restera plus qu'une intégrale de la forme

$$(c) \qquad C\int x^{-1}(1-x)^{-p}\,dx,$$

C étant une constante et p un nombre compris entre o et 1.

Quant à cette dernière intégrale, il est aisé de voir que sa valeur est entièrement transcendante. En effet, supposant β commensurable, posons $p=\frac{h}{m}$, h et m étant deux entiers premiers entre eux et $h<m$; puis faisons

$$1-x=z^m;$$

nous aurons pour l'intégrale (c)

$$Cm\int\frac{z^{m-h-1}}{z^m-1}\,dz.$$

Décomposons la fraction soumise au signe d'intégration en fractions simples, et nous obtiendrons, en désignant par M, N, M_1, N_1, ... des constantes,

$$\frac{z^{m-h-1}}{z^m-1}=\frac{1}{m(z-1)} + \frac{Mz+N}{\left(z-\cos\frac{2\pi}{m}\right)^2+\sin^2\frac{2\pi}{m}} + \frac{M_1z+N_1}{\left(z-\cos\frac{4\pi}{m}\right)^2+\sin^2\frac{4\pi}{m}}+\cdots$$

Or, par l'intégration, le premier terme donnera un logarithme, et les suivants donneront chacun un logarithme et un arc tang.

SUR DIFFÉRENTES EXPRESSIONS DE $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ AU MOYEN DES FONCTIONS f.

10. La solution de l'équation du second ordre qui n'est ni nulle ni infinie pour $x=0$ est $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$. On peut, dans plusieurs cas, exprimer cette fonction sous forme finie au moyen des formules du nº 5.

Si α et γ sont deux nombres entiers positifs et que l'on ait

$$\alpha - 1 \geqq 0, \quad \gamma - \alpha - 1 \geqq 0,$$

pour obtenir $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, combinons les deux solutions trouvées et qui sont pour $x = 0$ infinies de l'ordre $\gamma - 1$, de manière à abaisser cet ordre d'une unité; et, comme on devra évidemment obtenir ainsi

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x),$$

il s'ensuit que l'ordre de la fonction résultante s'abaissera à zéro, et l'on aura

$$(1) \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{C} F(\alpha, \beta, \gamma, x) = {} & x^{1-\gamma} f(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x) \\ & - (1 - x)^{\gamma-\alpha-\beta} x^{1-\gamma} f(-\alpha + 1, -\beta + 1, 2 - \gamma, x), \end{aligned} \right.$$

C étant une constante que je déterminerai plus loin.

Supposons que $\gamma - \alpha$, $\gamma - \beta$ soient deux nombres entiers de signe contraire et qu'on ait

$$\gamma - \beta - 1 \geqq 0, \quad \gamma - \alpha \leqq 0;$$

prenons celle des deux solutions qui, dans ce cas, n'est ni nulle ni infinie pour $x = 0$, et, en désignant par C une constante, nous aurons

$$(2) \quad \frac{1}{C} F(\alpha, \beta, \gamma, x) = x^{\alpha-\gamma} (1 - x)^{\gamma-\alpha-\beta} f\left(1 - \alpha, \gamma - \alpha, \beta - \alpha + 1, \frac{1}{x}\right).$$

Si α et $\beta - \gamma$ sont deux entiers positifs et qu'on ait ainsi

$$\alpha - 1 \geqq 0, \quad \gamma - \beta \leqq 0,$$

on obtiendra de même

$$(3) \quad \frac{1}{C} F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1 - x)^{\gamma-\alpha-\beta} f(\gamma - \beta, \gamma - \alpha, \gamma - \alpha - \beta + 1, 1 - x).$$

11. Nous allons ensuite prendre pour α, β, γ trois nombres entiers positifs.

Si l'on a l'une des inégalités

$$\gamma - \alpha - 1 \geqq 0, \quad \gamma - \beta - 1 \geqq 0,$$

mais l'une d'elles seulement, la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ sera donnée par la formule (1).

Si ces deux inégalités sont satisfaites à la fois, on aura

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{1}{C}F(\alpha, \beta, \gamma, x) = {} & x^{1-\gamma}\frac{d}{d\beta}f(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x)\\ & - x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\frac{d}{d\beta}f(-\alpha+1, -\beta+1, 2-\gamma, x)\\ & + x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\log(1-x)f(-\alpha+1, -\beta+1, 2-\gamma, x).\end{aligned}\right.$$

En effet, le second membre est solution de l'équation du second ordre, d'après ce que nous avons vu; il suffit donc de vérifier que, pour $x = 0$, il n'est pas infini de l'ordre $\gamma - 1$. Or la réunion du premier et du second terme est de l'ordre $\gamma - 2$, comme on le vérifie facilement, et le troisième terme est du même ordre.

Enfin, si γ est plus petit que α et β, $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ sera donnée par la formule (3).

On peut aussi remarquer que, si les trois nombres entiers positifs α, β, γ satisfont aux inégalités

$$\gamma - \beta - 1 \geqq 0, \quad \gamma - \alpha \leqq 0,$$

on peut employer les formules (2) et (3) au lieu de (1).

Ainsi la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ s'exprime très simplement sous forme finie, toutes les fois que α, β, γ sont trois nombres entiers.

DÉTERMINATION DES CONSTANTES LAISSÉES INDÉTERMINÉES DANS LES N^{os} 10 ET 11.

12. Si α, γ sont deux nombres entiers positifs satisfaisant à ces conditions

$$\alpha - 1 \geqq 0, \quad \gamma - \alpha - 1 \geqq 0,$$

$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ est fourni par la formule (1) du n° **10**. D'autre part, on a

$$\begin{aligned}F(\alpha, \beta, \gamma, x) = {} & \frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\Pi(\gamma-\beta-1)} F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x) \\ & + \frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\alpha+\beta-\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)} \\ & \times (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma+1-\alpha-\beta, 1-x).\end{aligned}$$

Il est évident que, si x est très voisin de 1, les deux termes de la seconde formule sont égaux respectivement aux deux termes de la première. On a donc

$$(a) \quad \frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\Pi(\gamma-\beta-1)} = Cf(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, 1),$$

$$(b) \quad \frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\alpha+\beta-\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)} = -Cf(-\alpha+1, -\beta+1, 2-\gamma, 1).$$

Si $\gamma-\alpha-\beta$ est >0, nous nous servirons de la première de ces deux formules, pour déterminer C. Cette inégalité étant satisfaite, on a, par la formule (48) du Mémoire [*Disquisitiones generales circa seriem infinitam* $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$; *Gauss Werke*, t. III]

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\Pi(\gamma-\beta-1)},$$

et, si l'on change α, β, γ en $\alpha+1-\gamma$, $\beta+1-\gamma$, $2-\gamma$, les trois nouveaux éléments satisferont à la condition

$$(2-\gamma)-(\alpha+1-\gamma)-(\beta+1-\gamma)>0,$$

et l'on aura

$$(c) \quad F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, 1) = \frac{\Pi(1-\gamma)\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(-\alpha)\Pi(-\beta)}.$$

Si l'on suppose que $\gamma-1$ et α sont des entiers positifs, cette expression se présente sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$. Mais concevons d'abord que ces deux nombres ne soient pas entiers et que leur différence $\gamma-\alpha-1$ le soit seulement; nous aurons

$$\Pi(-\alpha) = -\alpha(-\alpha-1)\ldots(-\gamma+2)\Pi(-\gamma+1).$$

Or, en supposant ainsi que le premier élément de la fonction (c) est entier négatif et que le troisième élément tend vers un nombre entier négatif plus petit que le premier, le signe F se change évidemment en f (nº 4) et l'on obtient

$$(d)\quad f(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, 1) = \frac{\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{(-\alpha)(-\alpha-1)\ldots(-\gamma+2)\Pi(-\beta)};$$

donc, d'après la formule (a), on a

$$(e)\qquad C = \frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(-\beta)\alpha(\alpha+1)\ldots(\gamma-2)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\Pi(\gamma-\beta-1)}(-1)^{\gamma+\alpha+1}$$

ou

$$C = \frac{(\gamma-\alpha)\ldots(\gamma-2)(\gamma-1)\times\alpha(\alpha+1)\ldots(\gamma-2)}{(-\beta+1)\ldots(\gamma-\beta-2)(\gamma-\beta-1)}(-1)^{\gamma+\alpha+1}.$$

Cette dernière formule sera encore admissible si β est un nombre entier satisfaisant aux conditions

$$\beta-1>0,\quad \gamma-\beta-1<0,$$

desquelles il résulte que le dénominateur ne s'annule pas.

Si $\gamma-\alpha-\beta$ est <0, les trois éléments de

$$f(-\alpha+1, -\beta+1, 2-\gamma, 1)$$

satisfont à l'inégalité

$$2-\gamma-(-\alpha+1)-(-\beta+1)>0,$$

et l'on pourrait calculer C au moyen de (b). Or on passe de (a) à (b) en changeant α en $\gamma-\alpha$, β en $\gamma-\beta$ et C en $-$ C.

Faisons donc ce changement dans la formule (e), nous aurons

$$-C = \frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha+1)\ldots(\gamma-2)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)}(-1)^{\alpha-1},$$

et l'on reconnaît facilement que cette formule est identique à (e). Ainsi la constante C a la même expression, quel que soit le signe de $\gamma-\alpha-\beta$. On en conclut aussi que la formule (d) subsistera quand cette quantité sera négative.

Par un changement de notation, on obtient, pour la formule (d),

$$f(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{(-\alpha-1+\gamma)(-\alpha-2+\gamma)\ldots(\gamma+1)\gamma\Pi(\gamma-\beta-1)},$$

quel que soit le signe de $\gamma - \alpha - \beta$.

13. Nous pouvons écrire ainsi l'équation (1)

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, x) = A\, & \frac{\Pi(-\beta)}{\Pi(\gamma-\beta-1)} x^{1-\gamma} \\ & \times [f(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x) \\ & \quad -(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} f(-\alpha+1, -\beta+1, 2-\gamma, x)] \end{aligned}$$

avec

$$A = (-1)^{\gamma+\alpha+1} \frac{\Pi(\gamma-1)\alpha(\alpha+1)\ldots(\gamma-2)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)}.$$

On peut déduire la formule (4) de celle-ci, en faisant $\beta = n + \varepsilon$, supposant n entier et faisant tendre ε vers zéro; alors la quantité entre crochets tendra vers zéro et l'on aura

$$\Pi(-\beta) = \Pi(-n-\varepsilon) = \frac{(-1)^n}{\Pi(n+\varepsilon-1)} \frac{1}{\varepsilon}.$$

En passant à la limite, on obtiendra pour la constante C de la formule (4)

$$C = (-1)^{\gamma-\alpha-\beta-1} \frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\gamma-2)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)\Pi(\gamma-\alpha-1)\Pi(\gamma-\beta-1)}.$$

On déterminera facilement la constante C dans les formules (2) et (3).

SUR LA PÉRIODICITÉ DE LA FONCTION $F(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2\varphi)$.

14. Dans les applications, la variable x, dans $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, représente souvent le carré d'un sinus. Examinons dans quels cas la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2\varphi)$ possède, par rapport à φ, la période 2π.

Remarquons d'abord que, si l'on prend pour φ un angle compris entre zéro et $\frac{\pi}{2}$, puis qu'on change le signe de φ, la fonction conservera sa valeur; ainsi la fonction est connue pour toutes les valeurs de φ comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Faisons ensuite franchir à φ la valeur $\frac{\pi}{2}$. Si nous posons

$$A = \frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\Pi(\gamma-\beta-1)}, \quad B = \frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\alpha+\beta-\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)},$$

nous aurons

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2\varphi) &= A\,F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, \cos^2\varphi) \\ &\quad + B(\cos\varphi)^{2(\gamma-\alpha-\beta)} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma+1-\alpha-\beta, \cos^2\varphi). \end{aligned}$$

Pour que la fonction ait la période 2π, il faut, comme on le voit aisément, que, pour $\varphi = \frac{\pi}{2} - \varphi'$ et $\varphi = \frac{\pi}{2} + \varphi'$, la fonction ait la même valeur ou des valeurs égales et de signe contraire.

Supposons *en premier lieu* que la fonction obtienne des valeurs égales et de signe contraire pour $\varphi = \frac{\pi}{2} - \varphi'$ et $\varphi = \frac{\pi}{2} + \varphi'$. Le premier terme de la formule précédente est égal à

$$A\,F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, \sin^2\varphi')$$

pour ces deux valeurs de φ et doit, par conséquent, s'annuler. On aura donc $A = 0$, et, en se reportant à la valeur de A, on obtient

$$\Pi(\gamma-\alpha-1) = \infty \quad \text{ou} \quad \Pi(\gamma-\beta-1) = \infty,$$

c'est-à-dire

$$\gamma-\alpha-1 = -E \quad \text{ou} \quad \gamma-\beta-1 = -E,$$

E étant un nombre entier positif.

Supposons, par exemple, que l'on ait la première égalité

$$\gamma-\alpha = -E+1;$$

nous aurons

$$\begin{aligned}&F(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2\varphi)\\&\quad = B(\cos\varphi)^{2-2E}(\cos\varphi)^{-2\beta}F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma+1-\alpha-\beta, \cos^2\varphi).\end{aligned}$$

Pour que cette quantité change simplement de signe quand $\cos\varphi$ change de signe, il faut qu'on ait

$$(-1)^{2\beta} = -1;$$

il en résulte que l'on a

$$\beta = \frac{p}{2q},$$

p, q étant deux nombres entiers impairs premiers entre eux.

La fonction prend réellement q valeurs distinctes; mais la valeur réelle aura 2π pour période. (Les valeurs imaginaires peuvent d'ailleurs être aussi considérées comme périodiques.) La fonction n'aura qu'une valeur qui sera réelle si l'on a

$$\beta = \frac{p}{2}.$$

Supposons *en second lieu* que la fonction prenne des valeurs égales et de même signe pour $\varphi = \frac{\pi}{2} - \varphi'$ et $\varphi = \frac{\pi}{2} + \varphi'$. Alors la période se réduira à π. On pourra satisfaire à cette condition de deux manières.

Il suffira, en effet, de faire $B = 0$, c'est-à-dire

$$\alpha - 1 = -E \quad \text{ou} \quad \beta - 1 = -E,$$

E étant un nombre entier positif.

La fonction F jouira aussi de la même propriété si l'on a

$$(-1)^{2(\gamma-\alpha-\beta)} = 1;$$

il en résulte

$$\gamma - \alpha - \beta = \frac{p}{q},$$

p, q étant deux nombres entiers premiers entre eux et q impair. La fonction F prendra q valeurs distinctes après le passage par $\varphi = \frac{\pi}{2}$, mais la valeur réelle aura la période π. Si $q = 1$ ou si $\gamma - \alpha - \beta$ est un nombre entier, les deux termes de la formule qui donne

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2\varphi)$$

deviennent infinis; toutefois cette formule peut être transformée pour ce cas particulier, et l'on peut reconnaître facilement que cette fonction a encore la période π.

15. Pour terminer, remarquons que l'équation différentielle où A, B, C, D, E sont des constantes quelconques,

$$\frac{d^2z}{d\varphi^2}\sin^2\varphi\cos^2\varphi + (A + B\sin^2\varphi)\sin\varphi\cos\varphi\frac{dz}{d\varphi} + (C + D\sin^2\varphi + E\sin^4\varphi)z = 0,$$

se ramène facilement à l'équation de la série hypergéométrique

$$x(1-x)\frac{d^2P}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]\frac{dP}{dx} - \alpha\beta P = 0.$$

On le démontrera facilement en faisant dans cette dernière

$$x = \sin^2\varphi, \quad P = z\sin^\lambda\varphi\cos^\mu\varphi;$$

on obtiendra une équation de la forme de la première équation différentielle, et, en faisant l'identification, on trouvera que λ, μ sont donnés par ces deux équations du second degré

$$\lambda^2 - (A - 1)\lambda + C = 0,$$
$$\mu^2 + (A + B + 1)\mu + C + D + E = 0;$$

puis on aura

$$4\alpha\beta = (\lambda + \mu)^2 + B(\lambda + \mu) + E, \quad \alpha + \beta = -\lambda - \mu - \frac{B}{2},$$
$$2\gamma = A - 2\lambda + 1.$$

On reviendra donc bien à la solution de l'équation de la série hypergéométrique.