JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GOUY

Sur la propagation des ondes lumineuses, eu égard à la dispersion

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 8 (1882), p. 335-356.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1882_3_8__335_0>

Sur la propagation des ondes lumineuses, eu égard à la dispersion;

PAR M. GOUY.

Ce Mémoire forme la première Partie d'un travail qui a pour objet l'application de la théorie mathématique de la lumière à l'étude de la propagation et de l'analyse des rayons lumineux. Nous examinerons surtout en détail les particularités dues à l'existence de la dispersion dans les milieux optiques, supposés isotropes, dépourvus de pouvoir rotatoire, transparents et optiquement homogènes. Nous ne nous occuperons pas de la constitution intime de ces milieux, ni de la manière d'établir les équations différentielles de leurs petits mouvements, qui ont été l'objet de travaux nombreux et importants, et nous supposerons admise la forme linéaire de ces équations différentielles, ainsi que la forme de leurs intégrales simples, les géomètres et les physiciens paraissant d'accord sur ces deux points.

Ce Mémoire a pour objet l'étude des mouvements par ondes planes, et, en particulier, de ceux qui possèdent sensiblement la qualité que les physiciens nomment *homogénéité de la lumière*.

Il résultera de cet examen que, dans de tels mouvements, il y a deux vitesses à considérer, bien différentes l'une de l'autre dans les milieux doués d'une grande dispersion : la *vitesse individuelle des ondes,* égale au rapport de la longueur d'onde λ à la période vibratoire T, et la *vitesse de transport de l'intensité lumineuse,* égale à la dérivée de $\frac{1}{T}$ par rapport à $\frac{1}{\lambda}$. Cette dernière est la *vitesse de la lumière,* telle qu'on la mesure par les méthodes directes qui mettent à profit des variations d'intensité, et joue aussi un rôle important dans d'autres phénomènes ([1]).

§ I. — Formules générales.

1. Soit un milieu indéfini; x, y, z sont les coordonnées d'un point matériel quelconque de ce milieu à l'état de repos, par rapport à trois axes rectangulaires, et ξ, η, ζ les projections sur ces axes du déplacement très petit de ce point. On sait que, le milieu étant isotrope et dépourvu de pouvoir rotatoire, les équations différentielles des petits mouvements admettent pour intégrales ([2]) les équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= A_1 \sin(Kr - St) + B_1 \cos(Kr - St),\\ \eta &= A_2 \sin(Kr - St) + B_2 \cos(Kr - St),\\ \zeta &= A_3 \sin(Kr - St) + B_3 \cos(Kr - St),\end{aligned}\right.$$

en désignant par t le temps, par r la distance positive ou négative du point (x, y, z) à un plan fixe quelconque, et par A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, K et S des constantes quelconques, sous les conditions suivantes : les six premières sont telles que le déplacement soit parallèle au plan fixe; les deux dernières sont positives et liées par une équation

$$(2)\qquad S = F(K),$$

([1]) Ces conclusions ont été publiées antérieurement, sans démonstration (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* 29 novembre 1880 et 3 janvier 1881), et combattues par M. Cornu (même Recueil, 27 décembre 1880 et 10 janvier 1881). Plus récemment, lord Rayleigh a publié un aperçu de ses recherches sur ce sujet, et a donné la même expression pour la *vitesse de transport de l'intensité lumineuse* (*Nature,* 25 août et 17 novembre 1881). Ce physicien appelle *vitesse de la lumière* la vitesse individuelle des ondes, et désigne sous le nom de *vitesse du groupe d'ondes* la vitesse de transport de l'intensité lumineuse. Il m'a paru préférable de réserver pour cette dernière quantité le nom de *vitesse de la lumière,* en laissant ainsi à cette expression le sens qu'elle a toujours eu en dehors de toute idée théorique.

([2]) Si l'on adopte les théories qui attribuent à ces équations différentielles des coefficients périodiques, les équations (1), et celles que nous considérerons par la suite, satisfont aux équations différentielles dites *auxiliaires,* à coefficients constants, que l'on déduit des précédentes, et qui régissent la *partie sensible* du mouvement vibratoire.

caractéristique du milieu considéré. On dit que ce milieu est *sans dispersion* ou *doué de dispersion*, suivant que l'équation (2) est ou non de la forme $\frac{S}{K} = \text{const}$. Le mouvement (1) est formé d'une suite illimitée d'ondes planes, ne différant en rien les unes des autres, et se propageant dans le sens des r positifs avec la vitesse $\frac{S}{K}$, la longueur d'onde et la période vibratoire étant respectivement $\frac{2\pi}{K}$ et $\frac{2\pi}{S}$.

2. On appelle *mouvements par ondes planes* les mouvements tels que ξ, η, ζ ne dépendent à chaque instant que de la distance du point considéré à un plan fixe. Nous prendrons ce plan pour plan des yz et, les déplacements étant dans le plan des ondes pour les mouvements que nous aurons à considérer, nous aurons identiquement $\xi = 0$.

Soient, pour $t = 0$,

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \eta &= F_1(x), & \zeta &= F_3(x), \\ \frac{d\eta}{dt} &= F_2(x), & \frac{d\zeta}{dt} &= F_4(x). \end{aligned}\right.$$

Considérons les équations

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \eta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\Big\{ & \left[\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\alpha)\sin K\alpha\, d\alpha - \frac{1}{S}\int_{-\infty}^{\infty} F_2(\alpha)\cos K\alpha\, d\alpha\right]\sin(Kx - St) \\ & + \left[\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\alpha)\cos K\alpha\, d\alpha + \frac{1}{S}\int_{-\infty}^{\infty} F_2(\alpha)\sin K\alpha\, d\alpha\right]\cos(Kx - St)\Big\}\, dK, \end{aligned}\right.$$

$$(4')\qquad \left\{\begin{aligned} \eta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\Big\{ & \left[\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\alpha)\sin K\alpha\, d\alpha + \frac{1}{S}\int_{-\infty}^{\infty} F_2(\alpha)\cos K\alpha\, d\alpha\right]\sin(Kx + St) \\ & + \left[\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\alpha)\cos K\alpha\, d\alpha - \frac{1}{S}\int_{-\infty}^{\infty} F_2(\alpha)\sin K\alpha\, d\alpha\right]\cos(Kx + St)\Big\}\, dK, \end{aligned}\right.$$

où S est lié à K dans chaque élément des intégrales définies par l'équation (2), et où $F_1(\alpha)$ et $F_2(\alpha)$ sont les fonctions $F_1(x)$, $F_2(x)$, dans lesquelles on a remplacé x par α. Considérons aussi les équations analogues en ζ, qu'on formerait en remplaçant, dans les précédentes, $F_1(\alpha)$ et $F_2(\alpha)$ respectivement par $F_3(\alpha)$ et $F_4(\alpha)$.

Le mouvement formé par la superposition des mouvements définis par ces quatre équations satisfait évidemment aux équations différentielles linéaires des petits mouvements; on vérifie aisément, par la formule de Fourier, qu'il satisfait aussi aux conditions initiales (3). Si l'on regarde les fonctions $F_1(\alpha)$, $F_2(\alpha)$, $F_3(\alpha)$, $F_4(\alpha)$ comme arbitraires, ces quatre équations réunies forment donc l'expression générale des mouvements par ondes planes, à vibrations transversales, qui peuvent exister dans le milieu qui nous occupe. Il nous suffira, dans la discussion de ces formules, de considérer une des deux projections, par exemple η; on pourra, pour fixer les idées, supposer que ζ est identiquement nul, et les mouvements dont nous écrirons les équations auront leurs vibrations rectilignes et parallèles à l'axe des y.

3. K et S étant de même signe par définition, le mouvement (4) se propage dans le sens des x positifs, et le mouvement (4′) en sens contraire, d'une manière que nous étudierons par la suite. Les formules se simplifient lorsque le mouvement se propage dans un sens unique, par exemple dans le sens des x positifs, ce que nous admettrons dorénavant. En désignant respectivement par $f(t)$ et $f'(t)$ les seconds membres des équations (4) et (4′), on a toujours identiquement

$$f(t)+f'(-t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\alpha)\sin K\alpha\,d\alpha.\sin(Kx-St)\right.$$
$$\left.+\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\alpha)\cos K\alpha\,d\alpha.\cos(Kx-St)\right]dK,$$

et, $f'(t)$ étant identiquement nul par hypothèse, l'équation du mouvement s'écrira

$$(5)\qquad \eta=\int_0^\infty[\varphi_1(K)\sin(Kx-St)+\varphi_2(K)\cos(Kx-St)]\,dK,$$

en posant

$$(6)\qquad \begin{cases}\varphi_1(K)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\alpha)\sin K\alpha\,d\alpha,\\[2ex] \varphi_2(K)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\alpha)\cos K\alpha\,d\alpha.\end{cases}$$

4. Nous dirons que le mouvement (5) est *limité* lorsque le déplacement, à l'origine du temps, est compris tout entier entre deux plans parallèles aux ondes. Soient

$$x = x_1, \quad x = x_2$$

les équations de ces deux plans; $F_1(x)$ n'est différent de zéro que pour $x_1 < x < x_2$. En désignant par P la moyenne des valeurs absolues de $F_1(x)$ entre x_1 et x_2, on a, d'après les relations (6), en valeur absolue,

$$(7) \qquad \varphi_1(K) \quad \text{et} \quad \varphi_2(K) < \frac{P(x_2 - x_1)}{\pi}.$$

§ II. — Lumière homogène et sensiblement homogène.

5. Soit, dans ce même milieu et dans le sens des x positifs, un système quelconque de prismes, dont les arêtes sont parallèles à l'axe des y, suivi d'une lunette dont l'axe est dans le plan de xz. On sait que chacun des mouvements simples, tels que

$$(8) \qquad \eta = [\varphi_1(K)\sin(Kx - St) + \varphi_2(K)\cos(Kx - St)]\,dK,$$

qui forment par leur superposition le mouvement incident (5), se comporte dans ce système comme s'il existait seul. Soit A un point de l'intersection du plan focal de la lunette et du plan des xz, et soit

$$(9) \qquad \eta = [\varphi_1(K)\sin(u - St) + \varphi_2(K)\cos(u - St)]\,H\,dK$$

l'équation du mouvement qui existerait au point A, si le mouvement incident était le mouvement (8), u et H étant des fonctions de K indépendantes de t, que l'on calculera par les formules de la réflexion, de la réfraction et de la diffraction. Le mouvement incident étant le mouvement (5), le mouvement au point A aura pour équation

$$(10) \qquad \eta = \int_0^\infty [\varphi_1(K)\sin(u - St) + \varphi_2(K)\cos(u - St)]\,H\,dK.$$

La discussion de cette formule (10) formerait la *théorie de l'analyse* *spectrale*, c'est-à-dire l'étude générale des relations existant, à chaque instant, entre le mouvement incident et l'intensité lumineuse aux divers points du spectre. Cette théorie fera l'objet d'un autre Mémoire, et nous nous bornerons ici à définir la lumière *sensiblement homogène*.

6. On appelle ainsi les rayons lumineux qui donnent un spectre d'étendue très limitée. Supposons qu'il en soit ainsi du mouvement (5), et que l'intensité lumineuse ne soit sensible qu'au voisinage du point A. Soit K_0 la valeur de K pour celui des mouvements (8) dont les ondes, après leur passage à travers les prismes, seraient normales à la droite qui joint A au centre optique de l'objectif. En appelant G la fonction sous le signe $\int$ dans le second membre de l'équation (5), et ε étant une quantité positive quelconque, petite par rapport à K_0, le mouvement incident (5) peut être regardé comme formé par la superposition de deux mouvements dont les équations suivent :

$$(11)\qquad \eta = \int_{K_0-\varepsilon}^{K_0+\varepsilon} G\,dK,$$

$$(12)\qquad \eta = \int_0^{K_0-\varepsilon} G\,dK + \int_{K_0+\varepsilon}^{\infty} G\,dK.$$

Soient B un point quelconque du plan focal de la lunette, v la vitesse vibratoire qui existerait en ce point si le mouvement incident était le mouvement (11), et de même v' pour (12) ; la vitesse réelle au point B sera $v + v'$. Le premier terme de cette somme devient insensible dès que le point B n'est pas très voisin du point A. Nous savons, en effet, par la théorie de la diffraction, que la fonction H de l'équation (9) tend rapidement vers la limite 0, quand la droite qui joint le point considéré au centre optique fait un angle croissant avec la normale aux ondes qui arrivent à la lunette, et aussi, d'après les inégalités (7), que $\varphi_1(K)$ et $\varphi_2(K)$ sont inférieurs, en valeur absolue, à une limite déterminée. Pour les mêmes raisons, si la puissance des prismes est suffisante, v' sera insensible au voisinage du point A. Il est donc nécessaire et suffisant, pour que le spectre soit limité au voisinage de ce point, que v' soit insensible à chaque instant et dans tout le plan focal. Ainsi le mouvement incident (12) ne donnerait, à lui seul, qu'une intensité lumineuse insensible dans toute l'étendue du spectre. L'expérience montre d'ailleurs que, pour qu'un mouvement lumineux satisfasse à cette condition, il faut et il suffit qu'il soit lui-même d'intensité insensible. Sans examiner pour le moment la question au point de vue théorique, nous conclurons de ce fait d'expérience que le second membre de (12) doit être fort petit pour que l'intensité lumineuse ne soit sensible qu'au voisinage du point A.

Nous dirons donc que *le mouvement lumineux défini par l'équation générale* (5) *est sensiblement homogène, lorsqu'on peut prendre l'intégrale définie du second membre de cette équation entre des limites très voisines* $K_0 - \varepsilon$ *et* $K_0 + \varepsilon$, *en ne commettant qu'une erreur insensible vis-à-vis de la moyenne* P *des valeurs absolues du déplacement initial* (¹).

(¹) Voici un exemple simple de ce genre de mouvement. Supposons le déplacement initial $F_1(x)$ nul en dehors des limites $-\frac{\pi}{m}$ et $\frac{\pi}{m}$, et égal, entre ces limites, à

$$a(1+\cos mx)\cos K_0 x,$$

a, m et K_0 étant des constantes positives telles que $\frac{K_0}{m} = n$, n étant un nombre pair. L'équation (5) devient

$$\eta = \frac{a}{2\pi}\int_0^\infty \left(\frac{2}{K_0+K} - \frac{2}{K_0-K} - \frac{1}{K_0+K+m} - \frac{1}{K_0+K-m} + \frac{1}{K_0-K+m} + \frac{1}{K_0-K-m}\right)$$
$$\times \sin\frac{K\pi}{m}\cos(Kx - St)\,dK.$$

Si nous prenons l'intégrale définie entre les limites $K_0 - \varepsilon$ et $K_0 + \varepsilon$, ε étant plus grand que m, l'erreur commise sera plus petite, en valeur absolue, que

$$\frac{a}{2\pi}\left(\int_0^{K_0-\varepsilon} R\,dK - \int_{K_0+\varepsilon}^\infty R\,dK\right),$$

R désignant la parenthèse contenue dans l'intégrale définie précédente, qui est positive entre o et $K_0 - m$, et négative entre $K_0 + m$ et ∞. Nous avons, en désignant par l les logarithmes népériens,

$$\int_0^{K_0-\varepsilon} R\,dK = l\,\frac{(2K_0-\varepsilon)^2}{(2K_0-\varepsilon)^2 - m^2} + 2\,l\,\frac{K_0^2 - m^2}{K_0^2} + l\,\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - m^2}.$$

$$\int_{K_0+\varepsilon}^\infty R\,dK = l\,\frac{(2K_0+\varepsilon)^2 - m^2}{(2K_0+\varepsilon)^2} + l\,\frac{\varepsilon^2 - m^2}{\varepsilon^2},$$

7. Si ε était infiniment petit, le mouvement (5) serait *parfaitement homogène*. Mais, d'après les inégalités (7), on a toujours, en valeur absolue,

$$\int_{K_0-\varepsilon}^{K_0+\varepsilon} G\,dK < \frac{4\varepsilon P(x_2 - x_1)}{\pi}.$$

Par définition, le premier membre de cette inégalité, pour $t = 0$ et pour certaines valeurs de x, est au moins égal à P; il vient donc

$$\varepsilon > \frac{\pi}{4(x_2 - x_1)},$$

ou bien

$$(13)\qquad \frac{\varepsilon}{K_0} > \frac{\lambda_0}{8(x_2 - x_1)},$$

en appelant λ_0 la longueur d'onde qui correspond à K_0, d'après la relation générale $\lambda = \frac{2\pi}{K}$. Ainsi *un mouvement limité ne peut pas approcher indéfiniment de l'homogénéité parfaite, et d'autant moins que ses limites sont plus resserrées.*

8. Nous allons, dans la suite de ce Mémoire, étudier les propriétés et la propagation des mouvements sensiblement homogènes que nous venons de définir, et, en particulier, les limites vers lesquelles elles tendent lorsque le mouvement *tend vers l'homogénéité*, c'est-à-dire lorsque, $x_2 - x_1$ devenant très grand vis-à-vis de λ_0, ε devient très petit, de telle sorte qu'on ait toujours

$$(14)\qquad \varepsilon(x_2 - x_1) < Q,$$

Q étant une quantité donnée. En conséquence, dans tout ce qui va suivre, nous considérerons, au lieu du mouvement (5), le mouvement

---

et, par suite, l'erreur commise est une très petite fraction de $\frac{a}{2\pi}$, quel que soit ε, pourvu que m soit très petit par rapport à ε et à K_0. Cette erreur est donc très petite vis-à-vis de la moyenne P, qui est ici $\frac{2a}{\pi}$.

sensiblement équivalent

$$(15)\quad \eta = \int_{K_0-\varepsilon}^{K_0+\varepsilon} [\varphi_1(K)\sin(Kx - St) + \varphi_2(K)\cos(Kx - St)]\, dK.$$

§ III. — Ondes et vibrations.

9. En posant

$$(16)\quad \begin{cases} f_1(x, t) = \displaystyle\int_{K_0-\varepsilon}^{K_0+\varepsilon} \{\varphi_1(K)\cos[(K - K_0)x - (S - S_0)t] \\ \qquad\qquad - \varphi_2(K)\sin[(K - K_0)x - (S - S_0)t]\}\, dK, \\ f_2(x, t) = \displaystyle\int_{K_0-\varepsilon}^{K_0+\varepsilon} \{\varphi_1(K)\sin[(K - K_0)x - (S - S_0)t] \\ \qquad\qquad + \varphi_2(K)\cos[(K - K_0)x - (S - S_0)t]\}\, dK, \end{cases}$$

S_0 étant la valeur de S qui correspond à K_0 d'après l'équation (2), l'équation (15) s'écrit

$$(17)\quad \eta = f_1(x, t)\sin(K_0 x - S_0 t) + f_2(x, t)\cos(K_0 x - S_0 t).$$

Première approximation. — Si l'on regarde les fonctions $f_1(x, t)$ et $f_2(x, t)$ comme constantes dans les intervalles de x à $x + \Delta x$, et de t à $t + \Delta t$, l'erreur commise sur le second membre de l'équation (17) est plus petite en valeur absolue, d'après les inégalités (7) et (14), que la somme des valeurs absolues de $\frac{4\varepsilon\, \Delta x\, PQ}{\pi}$ et de $\frac{2\sigma\, \Delta t\, PQ}{\pi}$, σ étant la différence des valeurs de S qui correspondent, d'après l'équation (2), à $K_0 - \varepsilon$ et $K_0 + \varepsilon$. Si donc le mouvement est voisin de l'homogénéité, et si Δx et Δt ne sont pas trop grands en valeur absolue, les fonctions $f_1(x, t)$ et $f_2(x, t)$ sont sensiblement constantes dans l'intervalle considéré.

Par suite, à cette première approximation, le mouvement (17) peut être regardé, dans un intervalle d'autant plus grand qu'il est lui-même plus voisin de l'homogénéité, comme se réduisant à un mouvement simple tel que le mouvement (1), formé par une suite d'ondes égales et régulières, de longueur d'onde $\frac{2\pi}{K_0}$, et de période vibratoire $\frac{2\pi}{S_0}$, qui se propagent avec la vitesse $\frac{S_0}{K_0}$. Ainsi le mouvement (17) ne peut pas présenter de variations brusques ni rapides de longueur d'onde, de phase ou d'amplitude.

10. *Deuxième approximation.* — L'équation (17) s'écrit

$$(18) \qquad \eta = \mathfrak{F}(x, t) \sin[K_0 x - S_0 t + \chi(x, t)],$$

en posant

$$(19) \qquad \mathfrak{F}(x, t) = \pm \sqrt{[f_1(x, t)]^2 + [f_2(x, t)]^2},$$

$$(20) \qquad \chi(x, t) = \operatorname{arctang} \frac{f_2(x, t)}{f_1(x, t)}.$$

Les fonctions $f_1(x, t)$ et $f_2(x, t)$ étant continues, chacune des racines de l'équation (20) est une fonction continue de x et de t, à moins que $f_1(x, t)$ et $f_2(x, t)$ ne s'annulent à la fois. Mais il résulte de ce que nous venons de voir que, au voisinage des points ou des instants où les fonctions $f_1(x, t)$ et $f_2(x, t)$ s'annuleraient toutes deux, le déplacement η serait insensible vis-à-vis de P. Ainsi la discontinuité de $\chi(x, t)$ ne peut pas se produire tant que l'intensité lumineuse ne devient pas négligeable, et, par suite, nous n'avons pas à nous en occuper.

Nous prendrons arbitrairement pour $\chi(x, t)$, en un point et à un instant déterminés, une des racines de l'équation (20), et cette fonction se trouvera déterminée, pour les autres valeurs de x et de t, par la condition de continuité. Le signe du radical de la formule (19) sera choisi de manière à identifier les seconds membres des équations (17) et (18); le même signe conviendra tant que l'intensité lumineuse ne deviendra pas insensible, le second membre de l'équation (17) et

$$\sin[K_0 x - S_0 t + \chi(x, t)]$$

changeant de signe en même temps.

11. Il suffira évidemment, ici et par la suite, de considérer ce qui se passe sur l'axe des x.

Soient (x) et $\left(x + \frac{l}{2}\right)$ deux points consécutifs où le déplacement η est nul au temps t. Ces deux points comprennent entre eux une demiondulation, et la quantité *l est la longueur d'onde au point* (x) *et au temps t*. L'amplitude $\mathcal{J}(x, t)$ n'étant pas nulle, nous aurons

$$\mathrm{K}_0 x - \mathrm{S}_0 t + \chi(x, t) = n\pi,$$
$$\mathrm{K}_0\left(x + \frac{l}{2}\right) - \mathrm{S}_0 t + \chi\left(x + \frac{l}{2}, t\right) = (n+1)\pi,$$

n étant un nombre entier quelconque; d'où, en développant

$$\chi\left(x + \frac{l}{2}, t\right)$$

par la formule de Taylor et ne conservant que les deux premiers termes, il vient

$$(21)\quad \frac{2\pi}{l} = \mathrm{K}_0 + \frac{d\chi(x,t)}{dx} = \mathrm{K}_0 + \frac{f_1(x,t)\dfrac{df_2(x,t)}{dx} - f_2(x,t)\dfrac{df_1(x,t)}{dx}}{[\mathcal{J}(x,t)]^2}.$$

12. En définissant de même *la durée de la vibration au point* (x) *et au temps t* et la désignant par θ, on a de même

$$(22)\quad \frac{2\pi}{\theta} = \mathrm{S}_0 - \frac{d\chi(x,t)}{dt} = \mathrm{S}_0 - \frac{f_1(x,t)\dfrac{df_2(x,t)}{dt} - f_2(x,t)\dfrac{df_1(x,t)}{dt}}{[\mathcal{J}(x,t)]^2}.$$

13. Supposons maintenant que le premier des points considérés au n° **11** se déplace sur l'axe des x, de telle sorte qu'en ce point mobile on ait constamment $\eta = 0$. Sa vitesse w sera *la vitesse de l'onde au point* (x) *et au temps t*. Soit $(x + dx)$ ce point au temps $t + dt$; on a

$$\mathrm{K}_0\, dx - \mathrm{S}_0\, dt + \frac{d\chi(x,t)}{dx}dx + \frac{d\chi(x,t)}{dt}dt = 0,$$

et, par suite,

$$(23)\qquad w = \frac{dx}{dt} = \frac{\mathrm{S}_0 - \dfrac{d\chi(x,t)}{dt}}{\mathrm{K}_0 + \dfrac{d\chi(x,t)}{dx}} = \frac{l}{\theta}.$$

Ainsi *la vitesse de l'onde est, comme dans un mouvement simple, égale* *en chaque point et à chaque instant au rapport de la longueur d'onde à la durée de la vibration existant en ce point et à cet instant.* Ces deux quantités sont d'ailleurs, d'après les relations (7) et (14), peu différentes de $\frac{2\pi}{K_0}$ et de $\frac{2\pi}{S_0}$, tant que l'amplitude $\mathcal{I}(x, t)$ n'est pas insensible vis-à-vis de P.

14. *La relation qui lie entre elles la longueur d'onde l et la durée de la vibration θ est la même que celle qui existerait dans un mouvement simple tel que le mouvement* (1). En effet, on aurait dans ce cas, d'après l'équation (2),

$$\frac{2\pi}{\theta} = F\left(\frac{2\pi}{l}\right),$$

ou bien, en remarquant que $\frac{2\pi}{l}$ est très voisin de K_0,

$$\frac{2\pi}{\theta} = S_0 + \left(\frac{2\pi}{l} - K_0\right) F'(K_0).$$

Mais, ε étant fort petit, on a sensiblement, dans les limites des intégrales des formules (16),

$$S = S_0 + (K - K_0)\, F'(K_0),$$

et, par suite, on a identiquement

$$\frac{df_1(x,t)}{dt} = -F'(K_0)\frac{df_1(x,t)}{dx},$$

et de même pour f_2, ce qui démontre le théorème d'après les relations (21) et (22).

15. On appelle *intensité lumineuse au point* (x) *et au temps* t la valeur moyenne I du carré de la vitesse vibratoire $\frac{d\eta}{dt}$ pendant l'intervalle de $t - \Delta t$ à $t + \Delta t$, Δt étant fort petit, mais comprenant cependant un grand nombre de vibrations.

D'après les relations (18) et (22), on a

$$\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 = \left\{\frac{2\pi}{\theta}\mathcal{I}(x,t)\cos[K_0x - S_0t + \chi(x,t)]\right\}^2$$
$$- \frac{2\pi}{\theta}\mathcal{I}(x,t)\frac{d\mathcal{I}(x,t)}{dt}\sin 2[K_0x - S_0t + \chi(x,t)]$$
$$+ \left\{\frac{d\mathcal{I}(x,t)}{dt}\sin[K_0x - S_0t + \chi(x,t)]\right\}^2.$$

Dans l'expression de $\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2$, le troisième terme est insensible, $\frac{d\mathcal{I}(x,t)}{dt}$ étant déjà fort petit en valeur absolue; le second change périodiquement de signe et s'annulera sensiblement dans la moyenne; il vient donc

$$(24) \qquad I = \frac{1}{2\Delta t}\int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t}\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 dt = \frac{1}{2}\left[\frac{2\pi}{\theta}\mathcal{I}(x,t)\right]^2.$$

Comme $\frac{2\pi}{\theta}$ est très voisin de S_0, on voit que l'intensité lumineuse est sensiblement proportionnelle au carré de l'amplitude $\mathcal{I}(x,t)$.

16. En résumé, un mouvement lumineux sensiblement homogène est formé d'une suite d'ondulations, qui ne présente que des variations lentes et graduelles de longueur d'onde, de phase et d'amplitude. Chaque onde possède, à chaque instant, la durée de la vibration et la vitesse de propagation qui dépendent de sa longueur, d'après l'équation (2), caractéristique du milieu considéré; ces trois quantités peuvent d'ailleurs varier d'une manière graduelle, comme nous allons le voir, quand l'onde se transporte dans l'espace. Enfin, la longueur d'onde est très peu différente d'une certaine valeur moyenne, qui entrera dans les calculs ordinaires de l'Optique physique

§ IV. — Transport des ondes et de l'intensité lumineuse.

17. Nous allons maintenant chercher comment varie en fonction du temps l'intensité lumineuse, et comment varie chacune des ondes pendant sa propagation.

Lorsque le milieu est sans dispersion, en appelant a la valeur constante de $\frac{S}{K}$, l'équation générale (5) est de la forme

$$\eta = f(x - at).$$

Le mouvement se transporte alors, sans altération, avec la vitesse de propagation a, et chaque onde reste indéfiniment ce qu'elle était à un instant quelconque. Dans les milieux doués de dispersion, les ondes ne sont pas ainsi *persistantes*, mais, au contraire, *variables* en général dans tous leurs éléments. Néanmoins, quand le mouvement est sensiblement homogène, sa propagation s'effectue suivant quelques lois assez simples.

Nous avons, d'après l'équation (2), par la formule de Taylor,

$$(25)\quad S = S_0 + (K - K_0)F'(K_0) + \frac{(K-K_0)^2}{1.2}F''(K_0) + \frac{(K-K_0)^3}{1.2.3}F'''(K_0) + \ldots,$$

et cette valeur de S, substituée dans le second membre des équations (16), nous permettra d'étudier par des approximations successives le mouvement (17).

18. *Première approximation.* — Dans le second membre de (25), on néglige les puissances de $K - K_0$ supérieures à la première. Il vient

$$(26)\quad \begin{cases} f_1(x, t) = f_1[x - tF'(K_0), 0], \\ f_2(x, t) = f_2[x - tF'(K_0), 0], \end{cases}$$

et par suite l'équation (18) du mouvement s'écrit

$$\eta = \mathfrak{F}[x - tF'(K_0), 0] \sin\{K_0 x - S_0 t + \chi[x - tF'(K_0), 0]\}.$$

On exprime ce résultat sous une forme géométrique en disant que, si l'une quelconque des fonctions $\mathfrak{F}(x, t)$ ou $\chi(x, t)$ est représentée à l'origine du temps par une certaine courbe, et si cette courbe se transporte sans déformation suivant l'axe des x, avec la vitesse $F'(K_0)$, elle représentera encore la fonction à chaque instant.

En désignant par D_2 la plus grande valeur absolue de $F''(K_0)$ entre $K_0 - \varepsilon$ et $K_0 + \varepsilon$, et par e la base des logarithmes népériens, l'erreur commise sur $f_1(x, t)$ et $f_2(x, t)$ est plus petite en valeur absolue que

$$\frac{4PQ}{\pi}\left(e^{\frac{D_2 Q \varepsilon t}{2(x_2 - x_1)}} - 1\right),$$

comme on le vérifiera aisément, d'après les inégalités (7) et (14). Si ε est assez petit, cette erreur sera insensible vis-à-vis de P tant que le rapport $\frac{t\,F'(K_0)}{x_2 - x_1}$ ne sera pas très grand. Ainsi, en conservant la même représentation géométrique, on dira que, si le mouvement est voisin de l'homogénéité, l'erreur commise est insensible tant que le chemin parcouru par la courbe n'est pas très grand par rapport à la longueur qu'occupait le déplacement initial.

19. *Vitesse de la lumière.* — L'intensité lumineuse I, d'après les formules (22) et (24), est elle-même exprimée par une fonction de la forme

$$f[x - t\,F'(K_0)].$$

Ainsi $F'(K_0)$ est la *vitesse de la lumière* ou *vitesse de transport de l'intensité lumineuse pour la longueur d'onde* λ_0, telle qu'on la mesurerait par les méthodes directes qui mettent à profit des variations d'intensité.

Si la vitesse de la lumière est la même pour toutes les couleurs, comme cela a lieu sensiblement dans le vide, $F'(K_0)$ étant indépendant de K_0, l'équation (2) est de la forme

$$S = aK + b,$$

a et b étant des constantes, la seconde restant indéterminée. Mais il paraît difficile d'admettre, dans les idées actuelles, que cette relation puisse être réalisée avec $b \gtrless 0$, et nous admettrons que le vide est un milieu sans dispersion.

20. *Variation des ondes.* — L'amplitude $\mathfrak{F}(x, t)$ variant très lentement avec x, on peut prendre pour l'*amplitude d'une onde* la valeur que possède $\mathfrak{F}(x, t)$ au milieu de cette onde. Soit (x_0) ce point à l'origine du temps; l'onde se propageant avec une vitesse très voisine de $\frac{S_0}{K_0}$, son milieu sera, au temps t, très près du point $\left(x_0 + t\frac{S_0}{K_0}\right)$.

L'amplitude de l'onde, étant donnée par la formnle générale

$$\mathcal{f}[x - tF'(K_0), o].$$

sera donc égale à

$$\mathcal{f}\left\{x_0 + \left[\frac{S_0}{K_0} - F'(K_0)\right]t, o\right\}.$$

Cette amplitude varie donc avec t, et l'on voit que l'onde qui nous occupe possède au temps t l'amplitude que possédait à l'origine du temps l'onde dont le milieu était au point

$$\left\{x_0 + \left[\frac{S_0}{K_0} - F'(K_0)\right]t\right\},$$

ou tout près de ce point. $F'(K_0)$ étant positif et plus petit que $\frac{S_0}{K_0}$ dans les milieux réels, comme nous le verrons, l'amplitude d'une onde est croissante ou décroissante, à un instant donné, suivant que l'amplitude de l'onde qui la précède est plus grande ou plus petite que la sienne propre. Plus généralement, l'onde prendra successivement les amplitudes que possèdent, au moment actuel, toutes les ondes qui la précèdent, comme elle a passé déjà par les amplitudes des ondes qui la suivent. Si l'on néglige, comme nous en sommes convenus, la différence entre les seconds membres des équations (5) et (17), on pourra dire que l'onde a pris naissance au temps $\dfrac{x_1 - x_0}{\frac{S_0}{K_0} - F'(K_0)}$, et prendra fin au temps $\dfrac{x_2 - x_0}{\frac{S_0}{K_0} - F'(K_0)}$, fournissant ainsi dans l'espace une carrière limitée et égale à $\dfrac{x_2 - x_1}{1 - \frac{K_0}{S_0}F'(K_0)}$.

Nous avons aussi $\chi(x, t) = \chi[x - tF'(K_0), o]$. On a vu, dans le § III, que la longueur d'onde et la durée de la vibration dépendent de $\chi(x, t)$. En raisonnant comme nous venons de le faire pour l'amplitude, on voit facilement que, si la longueur d'onde n'est pas exactement la même sur toute l'étendue du mouvement, chaque onde, en se propageant, varie de longueur d'onde et de durée vibratoire, en suivant la même loi que pour l'amplitude.

21. Ainsi, à cette première approximation, l'amplitude, la longueur des ondes et les particularités qu'elles peuvent présenter, tout ce qui, en un mot, distingue une portion du mouvement d'une autre, se transporte sans altération avec la vitesse $F'(K_0)$, et forme, en quelque sorte, un cadre mobile que viennent remplir successivement les ondes, qui marchent avec une vitesse plus grande. Ce mode de propagation fort simple sera toujours réalisé quand le mouvement lumineux sera suffisamment voisin de l'homogénéité.

22. *Deuxième approximation.* — On tient compte du terme en $(K - K_0)^2$ dans le développement de S. En appelant D_3 la plus grande valeur absolue de $F'''(K)$ entre $K_0 - \varepsilon$ et $K_0 + \varepsilon$, l'erreur commise est plus petite, en valeur absolue, que

$$\frac{4PQ}{\pi}\left(e^{\frac{D_3 \varepsilon^2 Q t}{6(x_2 - x_1)}} - 1\right).$$

La première des équations (16) peut s'écrire

$$\begin{aligned} f_1(x, t) = \int_{K_0-}^{K_0+\varepsilon} & \{\varphi_1(K)\cos\{(K - K_0)[x - tF'(K_0)]\} \\ & - \varphi_2(K)\sin\{(K-K_0)[x - tF'(K_0)]\}\} \cos\frac{F''(K_0)(K-K_0)^2 t}{2}\, dK \\ + \int_{K_0-\varepsilon}^{K_0+\varepsilon} & \{\varphi_1(K)\sin\{(K - K_0)[x - tF'(K_0)]\} \\ & + \varphi_2(K)\cos\{(K - K_0)[x - tF'(K_0)]\}\} \sin\frac{F''(K_0)(K-K_0)^2 t}{2}\, dK. \end{aligned}$$

En développant en série le cosinus et le sinus en dehors des crochets, et formant les dérivées successives par rapport à x de $f_1[x - tF'(K_0), 0]$ et de $f_2[x - tF'(K_0), 0]$, cette équation s'écrit

$$(27)\quad \left\{ \begin{aligned} f_1(x, t) = f_1[x - tF'(K_0), 0] & - \frac{t^2}{1.2}\left[\frac{F''(K_0)}{2}\right]^2 f_1^{\text{IV}}[x - tF'(K_0), 0] \\ & + \frac{t^4}{1.2.3.4}\left[\frac{F''(K_0)}{2}\right]^4 f_1^{\text{VIII}}[x - tF'(K_0), 0] - \ldots \\ & - t\,\frac{F''(K_0)}{2} f_2''[x - tF'(K_0), 0] \\ & + \frac{t^3}{1.2.3}\left[\frac{F''(K_0)}{2}\right]^3 f_2^{\text{VI}}[x - tF'(K_0), 0] - \ldots. \end{aligned} \right.$$

On trouve de même

$$(28)\quad \begin{cases} f_2(x,t) = f_2[x - t\mathrm{F}'(\mathrm{K}_0), o] - \dfrac{t^2}{1.2}\left[\dfrac{\mathrm{F}''(\mathrm{K}_0)}{2}\right]^2 f_2^{\mathrm{iv}}[x - t\mathrm{F}'(\mathrm{K}_0), o] \\ \quad + \dfrac{t^4}{1.2.3.4}\left[\dfrac{\mathrm{F}''(\mathrm{K}_0)}{2}\right]^4 f_2^{\mathrm{viii}}[x - t\mathrm{F}'(\mathrm{K}_0), o] - \cdots \\ \quad + t\,\dfrac{\mathrm{F}''(\mathrm{K}_0)}{2} f_1''[x - t\mathrm{F}'(\mathrm{K}_0), o] \\ \quad - \dfrac{t^3}{1.2.3}\left[\dfrac{\mathrm{F}''(\mathrm{K}_0)}{2}\right]^3 f_1^{\mathrm{vi}}[x - t\mathrm{F}'(\mathrm{K}_0), o] + \cdots \end{cases}$$

La dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f_1(x,t)$ ou de $f_2(x,t)$ étant plus petite, en valeur absolue, que $\frac{4\mathrm{PQ}\varepsilon^n}{\pi}$, d'après les inégalités (7) et (14), ces séries sont convergentes, quel que soit t.

23. Nous allons examiner en particulier le cas où t est assez petit pour qu'on puisse négliger les puissances supérieures à la première.

En posant

$$(29)\qquad v = \mathrm{F}'(\mathrm{K}_0) + \mathrm{F}''(\mathrm{K}_0)\frac{d\chi[x - t\mathrm{F}'(\mathrm{K}_0), o]}{dx},$$

on a sensiblement, d'après la formule (21), pour $t = o$,

$$v = \mathrm{F}'(\mathrm{K}_0) + \left(\frac{2\pi}{l} - \mathrm{K}_0\right)\mathrm{F}''(\mathrm{K}_0) = \mathrm{F}'\left(\frac{2\pi}{l}\right);$$

v est donc la valeur de la *vitesse de la lumière* qui correspond à la longueur d'onde l, existant au point (x), à l'origine du temps. En d'autres termes, c'est la vitesse avec laquelle se transporterait sans déformation la courbe des intensités lumineuses, si, le mouvement étant sensiblement homogène, la longueur d'onde était, dans tout le milieu, ce qu'elle est au point considéré. On a sensiblement

$$[\mathcal{F}(x - vt, o)]^2 = \{\mathcal{F}[x - t\mathrm{F}'(\mathrm{K}_0), o]\}^2 - t[v - \mathrm{F}'(\mathrm{K}_0)]\frac{d\{\mathcal{F}[x - t\mathrm{F}'(\mathrm{K}_0)]\}^2}{dx}.$$

Mais, d'après les relations (27) et (28),

$$\begin{aligned}[\mathcal{F}(x,t)]^2 = {} & \{f_1[x - t\mathrm{F}'(\mathrm{K}_0), o]\}^2 + \{f_2[x - t\mathrm{F}'(\mathrm{K}_0), o]^2\} \\ & - t\mathrm{F}''(\mathrm{K}_0)\{f_1[x - t\mathrm{F}'(\mathrm{K}_0), o]f_2'[x - t\mathrm{F}'(\mathrm{K}_0), o] \\ & \qquad - f_2[x - t\mathrm{F}'(\mathrm{K}_0), o]f_1'[x - t\mathrm{F}'(\mathrm{K}_0), o\}.\end{aligned}$$

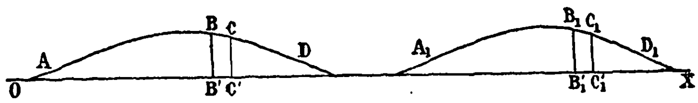
En appelant H le coefficient de $-tF''(K_0)$ dans cette formule, on a identiquement, d'après la formule (20),

$$H = \{\mathfrak{J}[x - tF'(K_0), 0]\}^2 \frac{d^2\chi[x - tF'(K_0), 0]}{dx^2} + \frac{d\chi[x - tF'(K_0), 0]}{dx} \frac{d\{\mathfrak{J}[x - tF'(K_0), 0]\}^2}{dx},$$

et, par suite, on a l'identité

$$(30) \qquad [\mathfrak{J}(x, t)]^2 = [\mathfrak{J}(x - vt)]^2 \left(1 - t\frac{dv}{dx}\right).$$

24. D'où résulte la construction suivante. Supposons que le carré de l'amplitude $[\mathfrak{J}(x, t)]^2$ soit représenté, à l'origine du temps, par la courbe ABCD. Imaginons que l'ordonnée BB′ se transporte avec la vitesse de la lumière v qui correspond à la longueur d'onde existant,



à l'origine du temps, au point B′; soit B'_1 le pied de cette ordonnée au temps t; prenons sur elle une longueur $B_1 B'_1$ égale à $\overline{BB'} \times (1 - Mt)$, M étant la valeur de $\frac{dv}{dx}$ au point B′, à l'origine du temps. Le point B_1 ainsi obtenu est un point de la courbe qui représente le carré de l'amplitude au temps t. Si la longueur d'onde, à l'origine du temps, n'est pas exactement la même sur toute l'étendue du mouvement, la courbe ABCD se transporte donc en subissant diverses déformations, qui ne dépendent pas de la forme de cette courbe. On voit aisément que le trapèze très petit $B_1 B'_1 C'_1 C_1$ a même surface que le trapèze correspondant BB′C′C, et qu'ainsi l'aire totale comprise entre la courbe et l'axe des x, c'est-à-dire

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\mathfrak{J}(x, t)]^2 dx,$$

reste constante.

Ainsi, à cette seconde approximation, on pourra le plus souvent, en négligeant des perturbations locales, regarder encore l'amplitude comme se transportant avec la *vitesse de la lumière* qui correspond à la longueur d'onde moyenne du mouvement.

La courbe $A_1B_1C_1D_1$ étant tracée, on pourra supposer l'origine du temps transportée à l'instant t, et recommencer la même construction, en tenant compte de ce que la longueur d'onde peut n'être pas exactement, au point B'_1, ce qu'elle était au point B'.

25. On a, d'après les formules (27) et (28),

$$\chi(x,t) = \chi[x - tF'(K_0), o] + \frac{tF''(K_0)}{2}\,\frac{f_1[x-tF'(K_0),o]f''_1[x-tF'(K_0),o]+f_2[x-tF'(K_0),o]f''_2[x-tF'(K_0),o]}{\{\mathfrak{F}[x-tF'(K_0),o]\}^2}.$$

D'après les formules (19) et (20), le coefficient de $\frac{tF''(K_0)}{2}$, dans le second membre de cette équation, est identiquement égal à

$$\frac{\dfrac{d^2\mathfrak{F}[x-tF'(K_0),o]}{dx^2}}{\mathfrak{F}[x-tF'(K_0),o]} - \left\{\frac{d\chi[x-tF'(K_0),o]}{dx}\right\}^2;$$

d'où, en désignant le premier terme de cette expression par R, il vient identiquement

$$(31)\qquad \frac{d\chi(x,t)}{dx} = \frac{d\chi(x-vt)}{dx} + \frac{tF''(K_0)}{2}\frac{dR}{dx},$$

et cette formule permettra de calculer aisément l et θ.

§ V. — Calcul numérique de la vitesse de la lumière.

26. Désignons par V la vitesse de la lumière pour la longueur d'onde λ, dans un premier milieu. Nous avons

$$(32)\qquad V = F'\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) = \frac{d\left(\dfrac{1}{T}\right)}{d\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)}.$$

ou, par une transformation simple,

$$V = \frac{\lambda}{T} - \lambda \frac{d\left(\frac{\lambda}{T}\right)}{d\lambda}.$$

Soit maintenant un second milieu; appelons V' et λ' la vitesse de la lumière et la longueur d'onde qui correspondent, dans ce milieu, à la même période vibratoire T, et n son indice de réfraction par rapport au premier milieu, pour la même période. Nous avons

$$V' = \frac{d\left(\frac{1}{T}\right)}{d\left(\frac{1}{\lambda'}\right)},$$

et aussi, par la théorie de la réfraction,

$$n = \frac{\lambda}{\lambda'},$$

d'où il vient

$$\frac{d\left(\frac{1}{\lambda'}\right)}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = n - \lambda \frac{dn}{d\lambda}.$$

Nous avons d'ailleurs

$$\frac{V}{V'} = \frac{d\left(\frac{1}{\lambda'}\right)}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)},$$

et, par suite, la relation entre V, V' et n est la suivante :

$$(33) \qquad \frac{V}{V'} = n - \lambda \frac{dn}{d\lambda}.$$

Ainsi l'*indice relatif de deux milieux est en général différent du rapport des vitesses de la lumière dans ces milieux.*

27. Supposons maintenant que le premier milieu soit le vide; n est l'*indice de réfraction* du second milieu, λ et V sont la longueur d'onde du rayon et la vitesse de la lumière dans le vide. Si le second milieu est doué d'une faible dispersion, comme l'eau, on a approximativement la relation connue $V' = \frac{V}{n}$. Dans tous les milieux transparents autres que le vide, $\frac{dn}{d\lambda}$ étant négatif, on a toujours $V' < \frac{V}{n}$. Si l'on admet que le vide est un milieu sans dispersion, comme cela est probable, V étant alors égal à $\frac{\lambda}{T}$, il vient $V' < \frac{\lambda'}{T}$. Ainsi, *dans tous les milieux transparents autres que le vide, la vitesse de la lumière est plus petite que la vitesse individuelle des ondes lumineuses.*

On sait qu'on a avec une grande approximation

$$n = A\lambda^2 + B + \frac{C}{\lambda^2} + \frac{D}{\lambda^4} + \cdots,$$

A, B, C, D, ... étant des constantes déterminées expérimentalement; d'où il vient, d'après la formule (33),

$$\frac{V}{V'} = -A\lambda^2 + B + \frac{3C}{\lambda^2} + \frac{5D}{\lambda^4} + \cdots,$$

formule qui permet de calculer aisément V'.

Le tableau suivant donne les valeurs du rapport $\frac{V}{nV'}$ de la *vitesse des ondes* à la *vitesse de la lumière* dans l'air, l'eau et le sulfure de carbone et pour les deux extrémités et le milieu du spectre visible ([1]).

Raies de Fraunhofer.	Air.	Eau.	Sulfure de carbone.
A	1,00001	1,0090	1,033
D	1,00001	1,0134	1,062
H	1,00002	1,0263	1,191

On voit que, dans l'air et même dans l'eau, ce rapport est assez voisin de l'unité; mais dans les milieux bien dispersifs, tels que le sulfure de carbone, et avec les rayons les plus réfrangibles du spectre visible, la différence est assez notable; elle le serait bien plus encore si l'on considérait les rayons ultra-violets.

([1]) Les indices de réfraction sont empruntés aux Mémoires dont les titres suivent :

MASCART, *Sur la dispersion des gaz* (*Comptes rendus*, t. LXXVIII).

VAN DER WILLIGEN, *Les indices de réfraction du sulfure de carbone* (*Archives du Musée Teyler*, vol. III); — *Sur la réfraction de l'eau* (même recueil, vol. I).