

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

GENTY

**Mémoire de Géométrie vectorielle sur les complexes du  
second ordre qui ont un centre de figure**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 3<sup>e</sup> série*, tome 8 (1882), p. 299-334.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1882\\_3\\_8\\_299\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1882_3_8_299_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Mémoire de Géométrie vectorielle sur les complexes du second ordre qui ont un centre de figure;*

PAR M. GENTY.

CHAPITRE I.

NOTIONS GÉNÉRALES.

1. L'équation vectorielle d'une droite étant

$$\mathfrak{A}(x - A)U = 0,$$

ou bien

$$\mathfrak{A}xU = \mathfrak{A}AU = v,$$

une droite est déterminée par les vecteurs  $U$  et  $\mathfrak{A}AU$  ou  $v$ , qui donnent sa direction, celle de la normale au plan mené par l'origine de la droite, ainsi que la distance de l'origine à la droite. Nous appellerons ces deux vecteurs les *vecteurs coordonnés* de la droite, et nous désignerons par  $(u, v)$  la droite qui a pour vecteurs coordonnés  $u$  et  $v$ .

Si l'on a  $u = 0$ , la droite  $(0, v)$  est située tout entière à l'infini dans un plan normal à  $v$ .

Si l'on a, au contraire,  $v = 0$ , la droite  $(u, 0)$  passe par l'origine : c'est la droite indéfinie dirigée suivant le vecteur  $u$ .

2. Réciproquement, étant données quatre conditions simples aux-

quelles une droite doit satisfaire (ce qui suffit pour la déterminer), il est possible de calculer ses vecteurs coordonnés.

En effet,  $u$ , pouvant avoir un module quelconque, ne dépend que de deux conditions, et entre les vecteurs  $u$  et  $v$  il existe la relation nécessaire

$$\mathfrak{S}uv = 0,$$

qui, jointe aux quatre conditions données, permettra de les déterminer.

3. Ceci posé, une équation

$$(1) \quad F(u, v) = 0,$$

algébrique et homogène par rapport aux vecteurs  $u$  et  $v$ , représente le *complexe* des droites, en nombre infini, dont les coordonnées satisfont à cette équation.

Si l'équation (1) est d'ordre  $n$ , le complexe qu'elle représente est lui-même d'ordre  $n$ .

4. Comme application, cherchons l'équation du complexe des droites qui rencontrent toutes une droite donnée.

Soient  $u_1, v_1$  les vecteurs coordonnés de la droite donnée;  $u$  et  $v$  ceux de l'une quelconque des droites du complexe; la condition du problème donne immédiatement

$$(2) \quad \mathfrak{S}uv_1 + \mathfrak{S}u_1v = 0,$$

équation d'un complexe linéaire spécial.

Si l'on suppose que  $u$  et  $u_1$  sont des vecteurs unitaires, le premier membre de l'équation ci-dessus représente le produit de la plus courte distance des deux droites  $(u, v)$  et  $(u_1, v_1)$ , par le sinus de leur angle, c'est-à-dire le moment de l'une d'elles par rapport à l'autre.

Donc le complexe des droites dont les moments, par rapport à deux droites fixes  $(u_1, v_1)$  et  $(u_2, v_2)$ , ont un rapport constant, a pour équation

$$(3) \quad \mathfrak{S}uv_1 + \mathfrak{S}uv_2 = k(\mathfrak{S}u_1v_2 + \mathfrak{S}u_2v_1).$$

Cette équation représente le complexe linéaire le plus général. Les droites  $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$  sont les directrices de ce complexe, et  $k$  son module (DRACH, *Annalen Mathematischen*, t. II), et l'on reconnaît sans peine qu'une droite arbitraire peut être choisie pour l'une des directrices d'un complexe linéaire donné.

5. Cherchons encore le complexe des droites qui coupent un ellipsoïde suivant des cordes vues du centre sous un angle droit.

Soit

$$\mathfrak{S}x\Phi x = 1$$

l'équation de l'ellipsoïde.

Les points d'intersection  $\Lambda + k_1 u, \Lambda + k_2 u$  d'une droite avec cette surface seront donnés par l'équation

$$\mathfrak{S}(\Lambda + k u)\Phi(\Lambda + k u) = 1,$$

ou

$$(4) \quad k^2 \mathfrak{S}u\Phi u + 2k \mathfrak{S}u\Phi \Lambda + \mathfrak{S}\Lambda\Phi \Lambda - 1 = 0,$$

et la condition du problème donne

$$\mathfrak{S}(\Lambda + k_1 u)(\Lambda + k_2 u) = 0,$$

ou bien

$$\mathfrak{C}^2 \Lambda + (k_1 + k_2) \mathfrak{S}\Lambda u + k_1 k_2 \mathfrak{C}^2 u = 0.$$

Si l'on porte dans cette équation les valeurs de  $k_1 + k_2$  et de  $k_1 k_2$  tirées de l'équation (4), il vient

$$\mathfrak{C}^2 \Lambda \mathfrak{S}u\Phi u - 2\mathfrak{S}\Lambda\Phi u \mathfrak{S}\Lambda\Phi \Lambda + \mathfrak{S}\Lambda\Phi \Lambda \mathfrak{C}^2 u - \mathfrak{C}^2 u = 0,$$

ou bien

$$(5) \quad \mathfrak{S}\mathfrak{W}\Lambda u (\mathfrak{W}\Phi \Lambda u + \mathfrak{W}\Lambda\Phi u) - \mathfrak{C}^2 u = 0;$$

or on a

$$\mathfrak{W}\Phi \Lambda u + \mathfrak{W}\Lambda\Phi u = (m_2 - \Phi) \mathfrak{W}\Lambda u = \Psi v,$$

en posant

$$m_2 - \Phi = \Psi,$$

et l'équation (5) devient

$$(6) \quad \mathbb{C}^2 U - \mathbb{S}_V \Psi V = 0,$$

équation d'un complexe du second ordre extrêmement intéressant, mais qui n'est qu'un cas particulier de celui que nous étudierons plus loin.

6. Cherchons enfin, comme dernière application, l'équation du complexe des droites qui coupent harmoniquement deux quadriques concentriques données.

Soient

$$\mathbb{S}_X \Phi X = 1, \quad \mathbb{S}_X \Psi X = 1$$

les équations de ces deux quadriques : leurs points d'intersection avec une droite seront donnés par les équations

$$\begin{aligned} \mathbb{S}(A + kU) \Phi(A + kU) &= 1, \\ \mathbb{S}(A + kU) \Psi(A + kU) &= 1, \end{aligned}$$

qui, développées, prennent la forme

$$\begin{aligned} k^2 \mathbb{S} U \Phi U + 2k \mathbb{S}_A \Phi U + \mathbb{S}_A \Phi A - 1 &= 0, \\ k^2 \mathbb{S} U \Psi U + 2k \mathbb{S}_A \Psi U + \mathbb{S}_A \Psi A - 1 &= 0, \end{aligned}$$

et la condition du problème donne

$$\mathbb{S} U \Phi U (\mathbb{S}_A \Phi A - 1) + \mathbb{S} U \Psi U (\mathbb{S}_A \Psi A - 1) - 2 \mathbb{S} U \Phi A \mathbb{S} U \Psi A = 0,$$

ou bien

$$(7) \quad \mathbb{S} U (\Phi + \Psi) U + \mathbb{S}_V (\mathbb{U} \Phi U \Psi A + \mathbb{U} \Psi U \Phi A) = 0.$$

Or on peut poser

$$\mathbb{U} \Phi U \Psi A + \mathbb{U} \Psi U \Phi A = \theta \mathbb{U} U A = \theta V \quad (1)$$

(1) On a en effet

$$\begin{aligned} \mathbb{U} \Phi X \Psi Y + \mathbb{U} \Psi X \Phi Y &= (m, \Phi) [(m_2, \Psi \Phi^{-1}) \Phi^{-1} - \Phi^{-1} \Psi \Phi^{-1}] \mathbb{U}_{XY} \\ &= (m, \Psi) [(m_2, \Phi^{-1}) \Psi^{-1} - \Psi^{-1} \Phi \Psi^{-1}] \mathbb{U}_{XY}, \end{aligned}$$

et l'équation (7) prend la forme

$$(8) \quad \mathfrak{S}u(\Phi + \Psi)u - \mathfrak{S}v\theta v = 0,$$

équation d'un complexe du second ordre.

7. Les droites d'un complexe qui passent par un point donné sont situées sur un cône qu'on appelle *cône du complexe*.

Si

$$(9) \quad F(u, \mathfrak{U}_A u) = 0$$

est l'équation d'un complexe, on reconnaît sans peine qu'on obtient l'équation du cône de ce complexe qui a son sommet au point A, rapportée à ce point pris pour origine, en remplaçant dans l'équation (9)  $u$  par  $x$ , ce qui donne

$$F(x, \mathfrak{U}_A x) = 0,$$

équation algébrique d'ordre  $n$ . Donc, *les droites d'un complexe d'ordre  $n$  qui passent par un point donné engendrent un cône d'ordre  $n$ .*

Si l'on rapporte le cône à l'ancienne origine, son équation devient

$$F(x - A, \mathfrak{U}_A x) = 0,$$

ou, en posant

$$A = aL,$$

$L$  étant un vecteur unitaire,

$$F(x - aL, a\mathfrak{U}_L x) = 0,$$

et si dans cette équation on suppose  $a = \infty$ , elle devient

$$F(L, \mathfrak{U}_L x) = 0;$$

elle représente alors le *cylindre du complexe* parallèle au vecteur  $L$ .

en désignant par  $(m, \Phi)$  l'invariant  $m$  de la fonction linéaire  $\Phi$ , par  $(m_2, \Psi\Phi^{-1})$  l'invariant  $m_2$  de la fonction linéaire  $\Psi\Phi^{-1}$ , etc. (LAISANT, *Introduction à la méthode des quaternions*, n° 126).

8. De même, les droites d'un complexe qui sont situées dans un plan enveloppent une courbe qu'on appelle *courbe du complexe*, et il est facile de démontrer que les courbes d'un complexe d'ordre  $n$  sont de la classe  $n$ .

Soit, en effet,

$$S_{NX} = 1$$

l'équation du plan donné.

Pour qu'une droite du complexe soit située dans ce plan, il faut qu'on ait

$$S_{NA} = 1, \quad S_{NU} = 0.$$

On a, par suite,

$$U = \mathfrak{V}(\mathfrak{V}_{AU} \cdot N) = \mathfrak{V}_{VN}.$$

Si l'on porte cette valeur de  $U$  dans l'équation du complexe, celle-ci devient

$$F(\mathfrak{V}_{VN} \cdot V) = 0,$$

et si maintenant, dans cette équation, on regarde  $V$  comme vecteur variable, elle représente un cône d'ordre  $n$ . Or ce cône est évidemment le réciproque de celui qui a son sommet à l'origine et pour base la courbe enveloppe cherchée; donc cette courbe est bien de la classe  $n$ .

Si le plan donné passe par l'origine, son équation est

$$S_{NX} = 0,$$

et l'on reconnaît sans peine, par un simple déplacement de l'origine, que la courbe polaire réciproque de la courbe du complexe située dans le plan donné a pour équations

$$S_{NX} = 0,$$

$$F(\mathfrak{V}_{XN}, N) = 0.$$

ÉQUATIONS GÉNÉRALES DES COMPLEXES DU SECOND ORDRE  
QUI ONT UN CENTRE DE FIGURE.

9. L'équation générale d'un complexe du second ordre est évidemment de la forme

$$(1) \quad S U \Phi U + 2 S U \Theta \mathfrak{V}_{AU} + S \mathfrak{V}_{AU} \Psi \mathfrak{V}_{AU} = 0,$$

dans laquelle  $\Phi$  et  $\Psi$  sont des fonctions vectorielles linéaires conjuguées à elles-mêmes, et  $\theta$  une fonction du même genre, mais qui, en général, n'est pas conjuguée à elle-même.

Si, dans cette équation, on change  $A$  en  $-A$ , elle devient

$$(2) \quad \mathcal{S}U\Phi U - 2\mathcal{S}U\theta \mathcal{V}AU + \mathcal{S}\mathcal{V}AU\Psi \mathcal{V}AU = 0,$$

et si l'origine est un centre de figure, les équations (1) et (2) doivent être identiques, ce qui exige que l'on ait

$$(3) \quad \theta = 0,$$

ou bien

$$(4) \quad \Phi = \Psi = 0.$$

On a donc ainsi deux genres de complexes du second ordre ayant un centre de figure. En prenant ce point pour l'origine des coordonnées, les complexes du premier genre ont pour équation

$$(5) \quad \mathcal{S}U\Phi U + \mathcal{S}\mathcal{V}AU\Psi \mathcal{V}AU = 0,$$

et les complexes du second genre,

$$(6) \quad \mathcal{S}U\theta \mathcal{V}AU = 0.$$

Si maintenant l'on transporte l'origine en un point quelconque  $E$ , ces équations prennent la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{S}U\Phi U + \mathcal{S}\mathcal{V}(A+E)U\Psi \mathcal{V}(A+E)U &= 0, \\ \mathcal{S}U\theta \mathcal{V}(A+E)U &= 0, \end{aligned}$$

ou encore, après le développement des premiers membres,

$$(7) \quad \mathcal{S}U(\Phi + \mathcal{V}E\Psi \mathcal{V}E) + 2\mathcal{S}\mathcal{V}EU\Psi \mathcal{V}AU + \mathcal{S}\mathcal{V}AU\Psi \mathcal{V}AU = 0,$$

$$(8) \quad \mathcal{S}U\theta \mathcal{V}EU + \mathcal{S}U\theta \mathcal{V}AU = 0,$$

ou enfin

$$(9) \quad \mathcal{S}U(\Phi + \mathcal{V}_E\Psi\mathcal{V}_{UE}) - 2\mathcal{S}U\theta, \mathcal{V}_{AU} + \mathcal{S}\mathcal{V}_{AU}\Psi\mathcal{V}_{AU} = 0,$$

$$(10) \quad \mathcal{S}U\Phi, U + \mathcal{S}U\theta\mathcal{V}_{AU} = 0,$$

en posant

$$(11) \quad \theta, \mathcal{V}_{AU} = -\mathcal{V}_E\Psi\mathcal{V}_{AU},$$

$$(12) \quad \Phi, U = \frac{\mathcal{O}\mathcal{W}_{EU} - \mathcal{W}_E\mathcal{O}'U}{2}.$$

Si donc la fonction  $\theta$  qui entre dans l'équation générale (1) est de la forme définie par la relation (11), cette équation représente un complexe du premier genre, ayant pour centre de figure le point E; en transportant l'origine en ce point, l'équation du complexe prendra la forme (5).

De même, si la fonction  $\Psi$  n'entre pas dans l'équation d'un complexe, et si la fonction  $\Phi$  s'y trouve sous la forme définie par la relation (12), cette équation représente un complexe à centre du second genre, et elle pourra se réduire à la forme simple (6) par un simple déplacement de l'origine.

**10.** Rappelons enfin que l'on appelle *surface singulière* d'un complexe du second ordre le lieu des points pour lesquels le cône du complexe se réduit à un système de deux plans, ou bien encore l'enveloppe des plans dans lesquels la conique du complexe se réduit à un système de deux points. Cette surface du quatrième ordre et de la quatrième classe est une *surface de Kummer*; elle a seize points singuliers pour lesquels le cône du complexe se réduit à deux plans coïncidents, et seize plans tangents singuliers dans lesquels la conique du complexe se réduit à deux points coïncidents.

CHAPITRE II.

PREMIER GENRE DES COMPLEXES DU SECOND ORDRE QUI ONT UN CENTRE DE FIGURE. SURFACE DE KUMMER RELATIVE A CES COMPLEXES.

11. *Équation générale.* — D'après ce qui précède, le premier genre des complexes du second ordre qui ont l'origine pour centre de figure est représenté par l'équation générale

$$(1) \quad \mathfrak{S}U\Phi U - \mathfrak{S}U_{AU}\Psi U_{AU} = 0,$$

dans laquelle  $\Phi$  et  $\Psi$  sont deux fonctions vectorielles linéaires conjuguées à elles-mêmes.

La fonction  $\Psi$ , qui ne change pas quand on déplace l'origine des coordonnées, est la *fonction caractéristique* du complexe. Nous appellerons en outre, d'après Plücker, *surface caractéristique* la quadrique qui a pour équation

$$m_{\Phi} \mathfrak{S}x \Psi^{-1} x = 1,$$

dans laquelle  $m_{\Phi}$  est l'invariant  $m$  de la fonction  $\Phi$ , invariant que nous supposerons différent de zéro dans tout ce qui va suivre.

12. *Équations vectorielles de la surface de Kummer.* — Le cône du complexe qui a son sommet au point  $x$ , a pour équation

$$\mathfrak{S}x\Phi x - \mathfrak{S}U_{x,x}\Psi U_{x,x} = 0,$$

ou

$$\mathfrak{S}x\theta x = 0,$$

en posant

$$\theta x = \Phi x - U_{x,\Psi} U_{xx}.$$

Pour que ce cône se réduise à un système de deux plans, il faut que  $\theta x$  se réduise à une fonction linéaire à deux termes, c'est-à-dire qu'on ait, pour un vecteur  $L$  convenablement choisi,

$$\theta L = 0,$$

ou bien

$$\Phi_L - \mathfrak{V}_X \Psi \mathfrak{V}_{LX} = 0.$$

Si, dans cette équation, nous remplaçons  $x_1$  par  $x$ , nous aurons

$$(1) \quad \Phi_L = \mathfrak{V}_X \Psi \mathfrak{V}_{LX}.$$

C'est l'équation vectorielle de la surface singulière du complexe, c'est-à-dire de la surface de Kummer (K) relative à ce complexe.

Le vecteur  $L$ , qui entre dans cette équation, est complètement arbitraire. A chaque direction différente de ce vecteur, correspond un point de la surface (K); la *ligne singulière* (1) du complexe qui passe par ce point est parallèle à  $L$ .

13. En opérant sur l'équation (1) avec  $\mathfrak{S} \cdot x \times$  et  $\mathfrak{S} \cdot \Psi \mathfrak{V}_{LX} \times$  successivement, il vient

$$(2) \quad \begin{cases} \mathfrak{S} x \Phi_L = 0, \\ \mathfrak{S} \Phi_L \Psi \mathfrak{V}_{LX} = \mathfrak{S} L X \Psi \Phi_L = 0. \end{cases}$$

Ces équations représentent deux plans dont l'intersection est le vecteur  $OX$ , du point de la surface (K) correspondant au vecteur donné  $L$ .

Soient  $M$  un second vecteur déterminé par l'équation

$$(3) \quad \Phi_M = \mathfrak{V}_L \Psi \Phi_L,$$

et  $x$  le point de la surface (K) qui correspond à ce vecteur. On aura successivement

$$\Psi \Phi_M = \Psi \mathfrak{V}_L \Psi \Phi_L = m_1 \mathfrak{V} \Psi^{-1} L \Phi_L,$$

$$M = \Phi^{-1} \mathfrak{V}_L \Psi \Phi_L = \frac{1}{m} \mathfrak{V} \Psi L \Phi \Psi \Phi_L,$$

$$\mathfrak{V}_M \Psi \Phi_M = \frac{m_1}{m_0} \mathfrak{V} \cdot \mathfrak{V} \Psi^{-1} L \Phi_L \mathfrak{V} \Phi_L \Phi \Psi \Phi_L = l \Phi_L.$$

---

(1) Nous appelons *ligne singulière* du complexe la droite intersection des deux plans auxquels se réduit le cône du complexe.

On a d'ailleurs

$$\mathfrak{S}_{x_1} \Phi_M = 0,$$

$$\mathfrak{S}_{x_1 M} \Psi \Phi_M = 0,$$

d'où

$$\mathfrak{S}_{x_1 L} \Psi \Phi_L = 0,$$

$$\mathfrak{S}_{x_1} \Phi_L = 0,$$

équations identiques aux équations (3) qui déterminent la direction de  $x$ . Donc le point  $X_1$  est situé sur le vecteur  $OX$ .

14. Les équations

$$\mathfrak{S}_{x \Phi_L} = 0, \quad \mathfrak{S}_{x \Phi_M} = 0, \quad \mathfrak{S}_{L \Phi_M} = 0,$$

dont la dernière résulte immédiatement de l'expression de  $\Phi_M$ , montrent que les vecteurs  $L$ ,  $M$  et  $x$  (ou  $x_1$ ) sont conjugués par rapport à la quadrique  $(S)$ , qui a pour équation

$$\mathfrak{S}_{x \Phi x} = 1.$$

On a aussi

$$\mathfrak{S}_{\Phi_M \Psi \Phi_L} = \mathfrak{S}_{M \Phi \Psi \Phi_M} = 0,$$

ce qui montre que les vecteurs  $L$  et  $M$  sont aussi conjugués par rapport à la quadrique  $(S_1)$ , qui a pour équation

$$\mathfrak{S}_{x \Phi \Psi \Phi x} = m_p.$$

*Si donc on mène un plan quelconque par l'origine, les diamètres conjugués communs aux sections faites par ce plan dans les quadriques  $(S)$  et  $(S_1)$  donneront les directions des vecteurs  $L$  et  $M$ , et le diamètre conjugué de ce plan par rapport à  $(S)$  donnera la direction des vecteurs  $x$  et  $x_1$ .*

15. Si maintenant, dans l'équation

$$\Phi_M = \mathfrak{U}_{x_1} \Psi \mathfrak{V}_{Mx_1},$$

nous remplaçons  $M$  par sa valeur en fonction de  $L$ , il vient

$$m_p^2 \mathfrak{U}_L \Psi \Phi_L = \mathfrak{U}_{x_1} \Psi \mathfrak{V}(\mathfrak{V}_{\Phi_L \Phi \Psi \Phi_L x_1}) = -\mathfrak{S}_{x_1 \Phi \Psi \Phi_L} \mathfrak{U}(\mathfrak{U}_{x_1} \Psi \Phi_L \Phi_{x_1});$$

opérons avec  $\mathfrak{V} \Phi_X$ , et nous aurons

$$m_\phi \mathfrak{V}(\Phi_X, \mathfrak{V}_L \Psi \Phi_L) = \mathfrak{S}_{X, \Phi \Psi \Phi_L} \mathfrak{V}(\mathfrak{V}_X, \Psi \Phi_L, \Phi_X),$$

ou enfin, en développant le premier membre et supprimant le facteur commun  $\mathfrak{S}_{X, \Phi \Psi \Phi_L}$ ,

$$m_\phi L = \mathfrak{V}(\mathfrak{V}_X, \Psi \Phi_L, \Phi_X).$$

Ainsi donc l'équation vectorielle de la surface de Kummer se présente sous l'une ou l'autre des formes

$$(4) \quad \Phi_L = \mathfrak{V}_X \Psi L_X,$$

$$(5) \quad m_\phi L = \mathfrak{V}(\mathfrak{V}_X, \Psi \Phi_L, \Phi_X).$$

Pour une même valeur de  $L$ , ces équations donnent deux points situés sur le même vecteur et appartenant à deux nappes différentes de la surface.

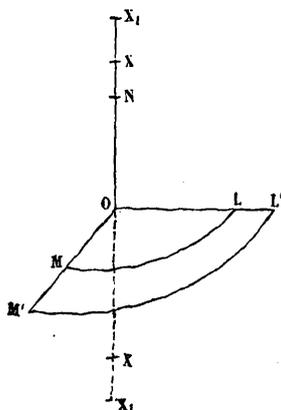
**16.** L'équation (5) développée donne

$$m_\phi L = \Psi \Phi_L \mathfrak{S}_{X, \Phi X_1} - X_1 \mathfrak{S}_{X, \Phi \Psi \Phi_L};$$

et si nous opérons sur cette équation avec  $\Phi_L$ , il vient

$$(6) \quad m_\phi \mathfrak{S}_L \Phi_L = \mathfrak{S}_{X, \Phi X_1} \mathfrak{S}_L \Phi \Psi \Phi_L.$$

Ceci posé, soient  $OL$ ,  $OM$ ;  $OL'$ ,  $OM'$  les demi-diamètres conjugués communs en direction des sections faites dans les quadriques ( $S$ ) et ( $S_1$ )



par un plan central quelconque;  $ON$  le demi-diamètre de ( $S$ ) conjugué à ce plan.

Nous aurons

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_L \Phi_L &= 1, \\ \mathfrak{S}_{X_1} \Phi_{X_1} &= \frac{\overline{OX_1}^2}{\overline{ON_1}^2}, \\ \mathfrak{S}_L \Phi \Psi \Phi_L &= m \cdot \frac{\overline{OL}^2}{\overline{OL'}^2}. \end{aligned}$$

Donc l'équation (6) peut se mettre sous la forme

$$1 = \frac{OX_1}{ON} \times \frac{OL}{OL'},$$

ou

$$OX_1 = ON \times \frac{OL'}{OL}.$$

On aura de même

$$OX = ON \times \frac{OM'}{OM}.$$

On a ainsi pour la surface de Kummer la définition géométrique suivante :

*Soient données deux quadriques concentriques (S) et (S<sub>1</sub>); on mène un plan central quelconque, et, dans ce plan, les diamètres conjugués OL et OM, OL' et OM', communs en direction, des sections faites par ce plan dans les deux surfaces. Sur le diamètre ON de la surface (S) conjugué par rapport au plan, on prend de part et d'autre du centre*

$$OX = ON \frac{OM'}{OM}, \quad OX_1 = ON \frac{OL'}{OL};$$

*le lieu des points X et X<sub>1</sub> est une surface de Kummer.*

**16. Cônes du complexe; directions conjuguées communes à un cône du complexe et à la surface (S).** — On peut encore arriver à cette construction géométrique très simple de la surface (K) par les considérations suivantes.

Le cône du complexe qui a son sommet au point *lx* du vecteur ON

a pour équation

$$\mathcal{S}_x \Theta_x = 0,$$

en posant

$$\Theta_x = \Phi_x - l^2 \mathcal{V}_N \Psi \mathcal{V}_{xN},$$

et les directions conjuguées communes à ce cône et à la surface (S) sont les racines de l'équation

$$\Theta_x = \nu \Phi_x,$$

ou bien

$$(7) \quad \Phi_x - l^2 \mathcal{V}_N \Psi \mathcal{V}_{xN} = \nu \Phi_x.$$

Pour  $x = N$ , on a

$$\Theta_N = \Phi_N.$$

Donc  $N$  est une solution de l'équation (7), et la valeur correspondante de  $\nu$  est  $\nu = 1$ .

Soient  $L$  et  $M$  les deux autres solutions (supposées réelles) de cette équation,  $L$  et  $M$  étant, comme ci-dessus, des points de la surface (S).

En faisant  $x = M$  dans l'équation (7), on aura

$$\Phi_M - l^2 \mathcal{V}_N \Psi \mathcal{V}_{MN} = \nu_2 \Phi_M.$$

Or,  $L$ ,  $M$  et  $N$  étant trois demi-diamètres conjugués de (S), on aura

$$\mathcal{V}_{MN} = \mathcal{S}_{LMN} \Phi_L,$$

et l'équation ci-dessus devient

$$(8) \quad (1 - \nu_2) \Phi_M = l^2 \mathcal{S}_{LMN} \mathcal{V}_N \Psi \Phi_L,$$

d'où l'on tire

$$\mathcal{S} \Phi_M \Psi \Phi_L = \mathcal{S}_M \Phi \Psi \Phi_L = 0.$$

Donc  $L$  et  $M$  sont parallèles aux diamètres conjugués communs aux sections faites dans les surfaces (S) et (S<sub>1</sub>) par le plan diamétral conjugué de  $ON$  par rapport à la quadrique (S).

Opérons maintenant sur l'équation (8) avec  $\mathfrak{S}_M$ , et nous aurons

$$1 - \epsilon_2 = l^2 (\mathfrak{S}_{LMN})^2 \mathfrak{S}_L \Phi \Psi \Phi_L,$$

ou bien, en se reportant à la figure,

$$1 - \epsilon_2 = l^2 \frac{\overline{OL}^2}{OL'^2},$$

d'où

$$\epsilon_2 = 1 - l^2 \frac{\overline{OL}^2}{OL'^2}.$$

On voit donc que, pour

$$l = \frac{OL'}{OL},$$

on aura  $\epsilon_2 = 0$ , et le point  $lN$  correspondant est le point  $X$ , déterminé par l'équation

$$OX_1 = ON \times \frac{OL'}{OL}.$$

Le cône du complexe qui a son sommet en ce point se réduit à deux plans, dont l'intersection est parallèle à  $OM$ .

On trouvera de même

$$\epsilon_1 = 1 - l^2 \frac{\overline{OM}^2}{OM'^2},$$

et l'on aura un second point de la surface de Kummer pour

$$l = \frac{OM'}{OM},$$

c'est-à-dire en prenant sur  $ON$

$$OX = ON \times \frac{OM'}{OM}.$$

Le cône qui a son sommet au point  $X$  se réduit à deux plans dont l'intersection est parallèle au vecteur  $OL$ .

Nous retrouvons ainsi les résultats obtenus précédemment.

**17. Formes diverses de l'équation algébrique de la surface de Kummer.**

— Il est facile d'obtenir l'équation algébrique de la surface (K) à l'aide de l'une ou l'autre de ses équations vectorielles. Soit, par exemple, la première

$$(9) \quad \Phi_L = \mathfrak{V}_x \Psi \mathfrak{V}_{Lx},$$

et posons

$$\Psi \mathfrak{V}_{Lx} = Q,$$

d'où

$$\mathfrak{V}_{Lx} = \Psi^{-1} Q.$$

Si nous opérons sur l'équation (9) avec  $\mathfrak{V} \cdot \Phi_x$ , nous aurons

$$m_\phi \Phi^{-1} \mathfrak{V}_{Lx} = \mathfrak{V}(\mathfrak{V}_{xQ} \Phi_x),$$

équation qui se prête sans peine aux transformations suivantes :

$$m_\phi \Phi^{-1} \Psi^{-1} Q = Q \mathfrak{S}_x \Phi_x - x \mathfrak{S}_Q \Phi_x,$$

$$(\mathfrak{S}_x \Phi_x - m_\phi \Phi^{-1} \Psi^{-1}) Q = x \mathfrak{S}_Q \Phi_x,$$

$$Q = \mathfrak{S}_Q \Phi_x (\mathfrak{S}_x \Phi_x - m_\phi \Phi^{-1} \Psi^{-1})^{-1} x.$$

Opérons enfin avec  $\mathfrak{S} \cdot \Phi_x$  et nous aurons, après avoir supprimé le facteur  $\mathfrak{S}_Q \Phi_x$ ,

$$\mathfrak{S} \Phi_x (\mathfrak{S}_x \Phi_x - m_\phi \Phi^{-1} \Psi^{-1})^{-1} x = 1,$$

ou bien

$$(10) \quad \mathfrak{S}_x [\Phi^{-1} \mathfrak{S}_x \Phi_x m_\phi (\Phi \Psi \Phi)^{-1}]^{-1} x = 1,$$

première forme de l'équation algébrique de la surface de Kummer.

**18.** L'équation (9) peut encore se mettre sous la forme

$$\Phi_L = m_\psi \mathfrak{V}(x \mathfrak{V} \Psi^{-1} L \Psi^{-1} x),$$

et l'on aura les transformations suivantes :

$$\begin{aligned}\Phi_L &= m_\Psi(\Psi^{-1}L\mathcal{S}_X\Psi^{-1}X - \Psi^{-1}X\mathcal{S}_X\Psi^{-1}L), \\ (m_\Psi\mathcal{S}_X\Psi^{-1}X\Psi^{-1} - \Phi)_L &= m_\Psi\Psi^{-1}X\mathcal{S}_X\Psi^{-1}L, \\ L &= m_\Psi\mathcal{S}_X\Psi^{-1}L(m_\Psi\mathcal{S}_X\Psi^{-1}X\Psi^{-1} - \Phi)^{-1}\Psi^{-1}X, \\ L &= m_\Psi\mathcal{S}_X\Psi^{-1}L(m_\Psi\mathcal{S}_X\Psi^{-1}X - \Psi\Phi)^{-1}X,\end{aligned}$$

et en opérant avec  $\mathcal{S}.\Phi_X$  et se rappelant qu'on a

$$\begin{aligned}\mathcal{S}L\Phi_X &= 0, \\ (11) \quad \mathcal{S}_X(m_\Psi\mathcal{S}_X\Psi^{-1}X\Phi^{-1} - \Psi)^{-1}X &= 0,\end{aligned}$$

autre forme de l'équation de la surface de Kummer.

19. Prenons maintenant la seconde équation vectorielle

$$m_\Phi L = \mathfrak{U}(\mathfrak{U}_X\Psi\Phi_L.\Phi_X).$$

Développée, elle donne successivement

$$\begin{aligned}m_\Phi L &= \mathcal{S}_X\Phi_X\Psi\Phi_L - \mathcal{S}_X\Phi\Psi\Phi_L X), \\ (\mathcal{S}_X\Phi_X\Psi\Phi - m_\Phi)_L &= \mathcal{S}_X\Phi\Psi\Phi_L X, \\ L &= \mathcal{S}_X\Phi\Psi\Phi_L(\mathcal{S}_X\Phi_X\Psi\Phi - m_\Phi)^{-1}X,\end{aligned}$$

et, en opérant avec  $\mathcal{S}.\Phi_X$ ,

$$(12) \quad \mathcal{S}_X(\mathcal{S}_X\Phi_X\Psi - m_\Phi\Phi^{-1})^{-1}X = 0,$$

troisième forme de l'équation algébrique de la surface de Kummer.

20. Les équations (11) et (12) se déduisent l'une de l'autre par le simple changement de  $\Phi$  et  $\Psi$  en  $\Psi^{-1}$  et  $\Phi^{-1}$  respectivement.

Donc les deux complexes qui ont pour équations

$$(13) \quad \mathcal{S}U\Phi U - \mathcal{S}V\Psi V = 0$$

et

$$(14) \quad \mathcal{S}_U \Psi^{-1} U - \mathcal{S}_V \Phi^{-1} V = 0$$

ont la même surface singulière.

On aurait pu d'ailleurs le reconnaître directement de la manière suivante :

L'équation vectorielle

$$m_\phi L = \mathfrak{V}(\mathfrak{V}_X \Psi \Phi L, \Phi X)$$

donne successivement

$$\Phi L = \mathfrak{V}(\Phi^{-1} \mathfrak{V}_X, \Psi \Phi L, X_1),$$

$$m_\phi \Phi L = \mathfrak{V}(\mathfrak{V} \Phi X, \Phi \Psi \Phi L, X_1),$$

et si maintenant nous posons

$$L = \Phi^{-1} \Psi^{-1} L_1,$$

il viendra

$$\Psi^{-1} L_1 = \mathfrak{V}(X, \Phi^{-1} \mathfrak{V} L_1, X_1),$$

équation vectorielle qui ne diffère de l'équation (4) qu'en ce que les fonctions  $\Phi$  et  $\Psi$  sont remplacés par  $\Psi^{-1}$  et  $\Phi^{-1}$  respectivement.

En faisant cette même transformation dans l'équation (10), on obtient une quatrième forme de l'équation algébrique de la surface de Kummer,

$$(15) \quad \mathcal{S}_X \left( \mathcal{S}_X \Psi^{-1} X \Psi - \frac{\Psi \Phi \Psi}{m_\Psi} \right)^{-1} X = 1.$$

21. Il est facile de développer les équations algébriques obtenues ci-dessus pour la surface de Kummer.

Soit, par exemple, l'équation (12),

$$\mathcal{S}_X (\mathcal{S}_X \Phi X \Psi - m_\phi \Phi^{-1})^{-1} X = 0.$$

On peut la mettre sous la forme

$$\mathcal{S}_X \Phi \left( \Psi \Phi - \frac{m_\phi}{\mathcal{S}_X \Phi X} \right)^{-1} X = 0.$$

On a d'ailleurs, à un facteur près,

$$\left(\Psi\Phi - \frac{m_\phi}{S_x\Phi_x}\right)^{-1} = \frac{m_\phi^2}{(S_x\Phi_x)^2} - \frac{m_\phi}{S_x\Phi_x} [(m_2, \Psi\Phi - \Psi\Phi) + (m, \Psi\Phi)]\Phi^{-1}\Psi^{-1},$$

en désignant par  $(m, \Psi\Phi)$  et  $(m_2, \Psi\Phi)$  les invariants  $m$  et  $m_2$  de la fonction  $\Psi\Phi$ .

En portant cette expression dans l'équation de la surface, celle-ci devient

$$(16) \quad \begin{cases} m_\phi^2 - m_\phi [(m_2, \Psi\Phi) S_x\Phi_x - S_x\Phi\Psi\Phi_x] \\ + (m, \Psi\Phi) S_x\Phi_x S_x\Psi^{-1}x = 0. \end{cases}$$

On transformerait de même les autres équations de la surface.

**22.** *Plans diamétraux conjugués de la surface de Kummer. Sections de la surface par ces plans.* — Soit  $x$  un vecteur ayant même plan conjugué par rapport aux quadriques  $(S)$  et  $(S_1)$ ; on pourra poser

$$(1) \quad \Phi\Psi\Phi x = s\Phi x.$$

Mais on tire immédiatement de cette équation

$$(2) \quad \Phi x = s\Psi^{-1}x.$$

Donc un vecteur  $x$ , qui satisfait à l'équation (1), a aussi le même plan conjugué par rapport à la quadrique  $(S)$  et à la caractéristique  $(S_2)$ . En d'autres termes, les trois surfaces  $(S)$ ,  $(S_1)$  et  $(S_2)$  ont un système de trois plans diamétraux conjugués communs : deux de ces plans peuvent d'ailleurs devenir imaginaires.

La forme même de l'équation (16) de la surface  $(K)$  montre que ces plans sont des plans diamétraux de cette surface elle-même.

**23.** Soient alors  $OA, OB, OC$  les demi-diamètres conjugués supposés réels de la surface  $(S)$ , dont les directions sont aussi conjuguées par rapport à  $(S_1)$  et  $(S_2)$ .

On aura

$$\Phi_A = \frac{v_{BC}}{S_{ABC}}, \quad \Phi_B = \frac{v_{CA}}{S_{ABC}}, \quad \Phi_C = \frac{v_{AB}}{S_{ABC}},$$

d'où

$$\Phi_X = \frac{S_{BCX} v_{BC} + S_{CAX} v_{CA} + S_{ABX} v_{AB}}{(S_{ABC})^2}.$$

De sorte que l'équation de la surface (S) peut s'écrire sous la forme

$$(S_{BCX})^2 + (S_{CAX})^2 + (S_{ABX})^2 = (S_{ABC})^2.$$

On a d'ailleurs

$$m_\phi = \frac{S_{\Phi_A \Phi_B \Phi_C}}{S_{ABC}} = \frac{1}{(S_{ABC})^2}.$$

Ensuite on pourra poser

$$\Phi\Psi\Phi_A = m_\phi s_1 \Phi_A = m_\phi \frac{s_1 v_{BC}}{S_{ABC}},$$

$$\Phi\Psi\Phi_B = m_\phi \frac{s_2 v_{CA}}{S_{ABC}},$$

$$\Phi\Psi\Phi_C = m_\phi \frac{s_3 v_{AB}}{S_{ABC}},$$

d'où

$$\Phi\Psi\Phi_X = m_\phi \frac{s_1 S_{BCX} v_{BC} + s_2 S_{CAX} v_{CA} + s_3 S_{ABX} v_{AB}}{(S_{ABC})^2},$$

en sorte que l'équation de la quadrique ( $S_1$ ) pourra se mettre sous la forme

$$s_1 S^2_{BCX} + s_2 S^2_{CAX} + s_3 S^2_{ABX} = S^2_{ABC}.$$

Si  $OA_1, OB_1, OC_1$  sont les demi-diamètres de cette surface dirigés suivant  $OA, OB, OC$ , on aura

$$OA = OA_1 \sqrt{s_1}, \quad OB = OB_1 \sqrt{s_2}, \quad OC = OC_1 \sqrt{s_3}.$$

On a encore

$$\Phi_A = m_\phi s_1 \Psi^{-1}_A,$$

d'où

$$\Psi^{-1}_A = \frac{v_{BC}}{m_\phi s_1 S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{s_1} v_{BC},$$

et de même

$$\Psi^{-1} B = \frac{\mathfrak{S}_{ABC}}{s_2} \mathfrak{U}_{CA}, \quad \Psi^{-1} C = \frac{\mathfrak{S}_{ABC}}{s_3} \mathfrak{S}_{AB},$$

d'où

$$\Psi^{-1} X = \frac{\mathfrak{S}_{BCX} \mathfrak{U}_{BC}}{s_1} + \frac{\mathfrak{S}_{CAX} \mathfrak{U}_{CA}}{s_2} + \frac{\mathfrak{S}_{ABX} \mathfrak{U}_{AB}}{s_3},$$

et l'équation de la surface caractéristique  $(S_2)$  pourra s'écrire sous la forme

$$\frac{(\mathfrak{S}_{BCX})^2}{s_1} + \frac{(\mathfrak{S}_{CAX})^2}{s_2} + \frac{(\mathfrak{S}_{ABX})^2}{s_3} = (\mathfrak{S}_{ABC})^2.$$

Si  $OA_2$ ,  $OB_2$  et  $OC_2$  sont les demi-diamètres conjugués de cette surface dirigés suivant  $OA$ ,  $OB$  et  $OC$  respectivement, on aura

$$OA_2 = OA \sqrt{s_1},$$

$$OB_2 = OB \sqrt{s_2},$$

$$OC_2 = OC \sqrt{s_3},$$

d'où

$$OA_1 \times OA_2 = \overline{OA}^2,$$

$$OB_1 \times OB_2 = \overline{OB}^2,$$

$$OC_1 \times OC_2 = \overline{OC}^2.$$

On aura d'ailleurs

$$m_\Psi = \frac{1}{m_{\Psi^{-1}}} = \frac{\mathfrak{S}_{ABC}}{\mathfrak{S}_{\Psi^{-1}A} \Psi^{-1}B \Psi^{-1}C} = \frac{s_1 s_2 s_3}{(\mathfrak{S}_{ABC})^3}.$$

Enfin, on reconnaît sans aucune difficulté que  $(S_1)$  est la polaire réciproque de  $(S_2)$  par rapport à  $(S)$ .

**24.** Ceci posé, l'équation vectorielle (4) du § XV peut s'écrire sous la forme

$$\Phi_L = m_\Psi \mathfrak{U}(X \mathfrak{U} \Psi^{-1} L \Psi^{-1} X),$$

ou bien; en développant le second membre,

$$\Phi_L = m_\Psi (\mathfrak{S}_X \Psi^{-1} X \Psi^{-1} L - \mathfrak{S}_X \Psi^{-1} L \Psi^{-1} X).$$

Si nous faisons maintenant

$$L = A$$

dans cette équation, il vient

$$\Phi_A = m_\Psi (\mathfrak{S}_X \Psi^{-1} X \Psi^{-1} L - \mathfrak{S}_X \Psi^{-1} A \Psi^{-1} X),$$

ou, en tenant compte des notations et résultats du paragraphe précédent,

$$\Phi_A = m_\Psi \frac{\mathfrak{S}_X \Psi^{-1} X}{s_1 m_\Phi} \Phi_A - m_\Psi \frac{\mathfrak{S}_X BC}{s_1 m_\Phi} \Psi^{-1} X.$$

Cette équation ne peut être vérifiée que si l'on a séparément

$$\mathfrak{S}_X BC = 0,$$

$$\mathfrak{S}_X \Psi^{-1} X = \frac{s_1 m_\Phi}{m_\Psi} = \frac{(\mathfrak{S}_X BC)^2}{s_2 s_3},$$

équations d'une conique située dans le plan OBC et semblable à la section faite par ce plan dans la surface ( $S_2$ ). Les demi-diamètres de cette courbe dirigés suivant OB et OC ont respectivement pour valeurs

$$\frac{OB}{\sqrt{s_3}} = \frac{OB_2}{\sqrt{s_2 s_3}} \quad \text{et} \quad \frac{OC}{\sqrt{s_2}} = \frac{OC_2}{\sqrt{s_2 s_3}}.$$

25. Prenons maintenant l'équation

$$m_\Phi L = \mathfrak{V}(\mathfrak{V}_X \Psi \Phi L A \Phi X)$$

et faisons dans cette équation  $x = A$ ; il viendra

$$m_\Phi A \mathfrak{V}(\mathfrak{V}_X \Psi \Phi A \Phi X).$$

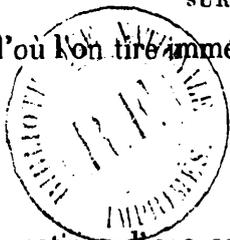
Or on a

$$\Psi \Phi A = m_\Phi s_1 A,$$

et l'équation ci-dessus peut s'écrire

$$A = s_1 \mathfrak{V}(\mathfrak{V}_X A \Phi X) = s_1 (\mathfrak{S}_X \Phi X.A - \mathfrak{S}_X \Phi A.X),$$

d'où l'on tire immédiatement



$$\begin{aligned} \mathcal{S}_x \Phi_A &= \mathcal{S}_x \Phi_{BC} = 0, \\ s_1 \mathcal{S}_x \Phi_x &= 1, \end{aligned}$$

équations d'une seconde conique située dans le plan OBC, et semblable à la section faite par ce plan dans la quadratique (S). Les demi-diamètres de cette courbe dirigés suivant OB et OC ont respectivement pour valeurs

$$\frac{OB}{\sqrt{s_1}} \quad \text{et} \quad \frac{OC}{\sqrt{s_1}}.$$

Le plan diamétral OBC coupe donc la surface (K) suivant deux coniques; il en est de même évidemment pour les deux autres plans diamétraux conjugués de la surface.

26. Les deux coniques, sections de la surface par l'un de ses plans diamétraux, se coupent en quatre points, qui sont des points coniques de la surface.

La surface (K) a ainsi douze points coniques à distance finie, situés quatre par quatre dans ses trois plans diamétraux conjugués.

L'équation (16) du n° 21 montre, en outre, que l'intersection de la surface avec le plan situé tout entier à l'infini se compose également de deux courbes : ce sont les sections à l'infini des cônes asymptotes des quadratiques (S) et (S<sub>2</sub>). Ces courbes se coupent elles-mêmes en quatre points qui complètent les seize points doubles de la surface.

Nous reviendrons plus loin sur la détermination des points doubles à distance finie.

27. *Plans tangents de la surface (K) aux points X et X<sub>1</sub>.* — Cherchons le plan tangent au point x déterminé par l'équation

$$\Phi_L = \mathcal{V}(x \Psi \mathcal{V}_{Lx}).$$

Opérons avec  $\mathcal{S}_L$ , et nous aurons

$$\mathcal{S}_L \Phi_L = \mathcal{S} \mathcal{V}_{Lx} \Psi \mathcal{V}_{Lx}.$$

Si nous différencions cette équation, il vient

$$\begin{aligned} S d_L \Phi_L &= S \mathfrak{U} d_{LX} \Psi \mathfrak{U}_{LX} + S \mathfrak{U}_L dx \Psi \mathfrak{U}_{LX} \\ &= S d_L \Phi_L + S \mathfrak{U}_L dx \Psi \mathfrak{U}_{LX}, \end{aligned}$$

d'où

$$S \mathfrak{U} dx_L \Phi \mathfrak{U}_{LX} = 0.$$

Si donc  $P$  est un vecteur parallèle à la normale au point  $x$ , on aura

$$(1) \quad P \parallel \mathfrak{U} (L \Psi \mathfrak{U}_{LX}) \parallel \mathfrak{U}_L \Psi \Phi_M,$$

d'où

$$S_{PL} = 0;$$

donc le plan tangent au point  $X$  contient la parallèle à  $OL$  mené par ce point, c'est-à-dire la droite singulière du complexe, intersection des deux plans auxquels se réduit le cône du complexe pour ce point.

Mais la relation vectorielle (1) peut encore se mettre sous la forme

$$\Phi^{-1} P \parallel \Phi' \mathfrak{U}_L \Psi \Phi_M \parallel \mathfrak{U} \Phi_L \Phi \Psi \Phi_M.$$

Or  $\Phi^{-1} P$  est le diamètre conjugué par rapport à  $(S)$  du plan tangent cherché. Donc *le diamètre conjugué par rapport à  $(S)$  du plan tangent de la surface  $(K)$  au point  $X$  est parallèle à la trace du plan tangent à la surface  $(S_1)$  au point  $M'$  sur le plan  $MON$  (fig. 1).*

De même le plan tangent en  $X$ , contient la droite singulière du complexe déterminée par ce point, et son diamètre conjugué par rapport à  $(S)$  est parallèle à la trace du plan tangent en  $L'$  à la surface  $(S_1)$  sur le plan  $LON$ .

**28. Points coniques; cônes des tangentes en ces points.** — En se reportant à la construction géométrique de la surface  $(K)$ , qui a fait l'objet du § 16, on voit que, si un plan central coupe les surfaces  $(S)$  et  $(S_1)$  suivant deux coniques semblables, le système des diamètres conjugués communs à ces deux courbes sera complètement indéterminé. On pourra donc prendre pour  $OL$  ou  $OM$  un vecteur quelconque situé dans le plan de ces coniques, et le rapport  $OL : OM$  restera

constant. Ainsi, aux vecteurs en nombre infini situés dans le plan en question correspondra un point unique de la surface (K) : c'est un point double de cette surface, et les considérations qui précèdent montrent que la recherche des points doubles de la surface (K) situés à distance finie revient à celle des plans centraux qui coupent (S) et (S<sub>1</sub>) suivant deux coniques semblables.

29. La solution de ce problème est des plus simples. En effet, si un plan coupe les quadriques (S) et (S<sub>1</sub>) suivant deux coniques semblables, on pourra déterminer la constante  $l$  de telle sorte que l'intersection de (S<sub>1</sub>) avec la quadratique semblable à (S) ayant pour équation

$$l \mathfrak{S}_x \Phi_x = 1$$

se compose de deux courbes planes, c'est-à-dire de telle sorte que le cône

$$\mathfrak{S}_x \left( l \Phi - \frac{\Phi \Psi \Phi}{m_\phi} \right)_x = 0$$

se réduise à un système de deux plans. Mais l'équation de ce cône peut s'écrire sous la forme

$$(l - s_1)(\mathfrak{S}_{BCX})^2 + (l - s_2)(\mathfrak{S}_{CAx})^2 + (l - s_3)(\mathfrak{S}_{ABx})^2 = 0,$$

et, pour qu'il se réduise à un système de deux plans, il faut que  $l$  soit égal à l'une ou l'autre des trois constantes  $s$ ,  $s_1$  et  $s_2$ .

Soit, par exemple,  $l = s_1$ ; l'équation ci-dessus devient

$$(s_1 - s_2)(\mathfrak{S}_{CAx})^2 + (s_1 - s_3)(\mathfrak{S}_{ABx})^2 = 0,$$

et elle représente un système de deux plans passant par le diamètre OA.

On trouvera de même deux plans analogues passant par chacun des deux autres diamètres conjugués de la surface.

30. Il est facile de reconnaître analytiquement que, lorsque le vecteur  $L$  se meut dans l'un des plans que nous venons de déterminer, les points correspondants  $X$  ne changent pas, et que ce sont deux points doubles de la surface de Kummer.

En effet, de l'équation vectorielle

$$\Phi_L = \mathfrak{V}(\mathfrak{X}\Psi \mathfrak{V}_L\mathfrak{X}),$$

on tire

$$\mathfrak{X} \parallel \mathfrak{V}(\Phi_L \mathfrak{V} \Psi \Phi_L)$$

ou

$$\mathfrak{X} \parallel \mathfrak{L} \mathfrak{S}_L \Phi \Psi \Phi_L - \Psi \Phi_L \mathfrak{S}_L \Phi_L,$$

et

$$(1) \quad \Phi \mathfrak{X} \parallel \Phi_L \mathfrak{S}_L \Phi \Psi \Phi_L - \Phi \Psi \Phi_L \mathfrak{S}_L \Phi_L.$$

Mais l'équation de l'ensemble de deux des plans qui coupent les quadratiques (S) et (S<sub>1</sub>) suivant deux courbes semblables étant

$$\mathfrak{S}_X(\Phi \Psi \Phi - m_\phi s \Phi) \mathfrak{X} = 0,$$

on peut poser, si les plans considérés sont réels,

$$\mathfrak{S}_X(\Phi \Psi \Phi - m_\phi s \Phi) \mathfrak{X} = 2m_\phi g \mathfrak{S}_{EX} \mathfrak{S}_{FX},$$

E et F étant les vecteurs unitaires normaux à ces plans, et l'équation

$$\mathfrak{S}_X \Phi \Psi \Phi \mathfrak{X} = m_\phi$$

de la surface (S<sub>1</sub>) pourra s'écrire sous la forme

$$s \mathfrak{S}_X \Phi \mathfrak{X} + 2g \mathfrak{S}_{EX} \mathfrak{S}_{FX} = 1,$$

et l'on aura

$$\frac{1}{m_\phi} \Phi \Psi \Phi \mathfrak{X} = s \Phi \mathfrak{X} + g(F \mathfrak{S}_{EX} + E \mathfrak{S}_{FX}).$$

Soit maintenant L un vecteur de la surface (S) situé dans le plan  $\mathfrak{S}_{EX} = 0$ ; on aura

$$\mathfrak{S}_{EL} = 0,$$

et, par suite,

$$\frac{1}{m_\phi} \Phi \Psi \Phi_L = s \Phi_L + g_L \mathfrak{S}_{FL},$$

$$2) \quad \mathfrak{S}_L \Phi \Psi \Phi_L = m_\phi s \mathfrak{S}_E \Phi_L = m_\phi s.$$

L'équation (1) donnera donc

$$\Phi x \parallel s \Phi L - \frac{1}{m_\phi} \Phi \Psi \Phi L \parallel E,$$

ou

$$x \parallel \Phi^{-1} E.$$

Ainsi le point  $x$  est bien situé, quel que soit  $L$ , sur le diamètre conjugué par rapport à  $(S)$  du plan dans lequel se meut ce vecteur.

On a d'ailleurs [équation (6) du § 16]

$$S_x \Phi x = \frac{m_\phi s_M \Phi_M}{s_M \Phi \Psi \Phi \Psi} = \frac{1}{s},$$

en vertu de l'équation (2); donc le point  $X$  est bien un point fixe.

**31.** Cherchons maintenant l'équation du cône décrit par la normale à la surface  $(K)$  en ce point.

Si  $y$  est l'une des normales, on aura

$$y \parallel \mathfrak{V}_M \Psi \Phi L \parallel \mathfrak{V}(\mathfrak{V}_E \Phi L, \Psi \Phi L),$$

ou

$$y \parallel \Phi L S_E \Psi \Phi L - E S_L \Phi \Psi \Phi L.$$

Or on a

$$S_E \Psi \Phi L = m_\phi g S_{FL} S_E \Phi^{-1} E,$$

$$S_L \Phi \Psi \Phi L = m_\phi s;$$

donc on a

$$y \parallel g S_{FL} S_E \Phi^{-1} E \Phi L - s E,$$

et l'on pourra poser

$$y = k(g S_{FL} S_E \Phi^{-1} E \Phi L - s E).$$

Opérons sur cette équation avec  $S.L$  et  $S.\Phi^{-1}E$ , et nous aurons

$$S_{LY} = kg S_{FL} S_E \Phi^{-1} E,$$

$$S_{Y \Phi^{-1} E} = -ks S_E \Phi^{-1} E,$$

d'où, en éliminant  $k$ ,

$$s \mathfrak{S}_{LY} + g \mathfrak{S}_{FLY} \mathfrak{S} \Phi^{-1} E = 0.$$

On a d'ailleurs

$$\mathfrak{S}_{EL} = 0,$$

$$\mathfrak{S}_{EY} \Phi L = 0.$$

En éliminant enfin  $L$  entre les équations qui précèdent, il vient pour l'équation du cône cherché

$$\mathfrak{S} E \Phi \mathfrak{V}_{EY} (s Y + g F \mathfrak{S} Y \Phi^{-1} E) = 0,$$

ou

$$s \mathfrak{S} \mathfrak{V}_{EY} \Phi \mathfrak{V}_{EY} + g \mathfrak{S} Y \Phi^{-1} E \mathfrak{S} \mathfrak{V}_{EF} \Phi \mathfrak{V}_{EY} = 0,$$

équation d'un cône du second ordre, réciproque du cône enveloppe des plans tangents à la surface au point  $X$ .

**32.** On voit, d'après ce qui précède, que si  $x$ , est le vecteur de ce point singulier, l'expression

$$\theta_x = \Phi_x - \mathfrak{V}(x, \Psi \mathfrak{V}_{xx},)$$

se réduit à zéro pour tout vecteur situé dans le plan

$$(1) \quad \mathfrak{S}_{EX} = 0.$$

La fonction  $\theta_x$  est alors une fonction linéaire à un seul terme, et le cône du complexe qui a son sommet au point singulier considéré se réduit à un système de deux plans coïncidents parallèles au plan (1). Ainsi donc les plans singuliers de la surface de Kummer sont les points pour lesquels le cône du complexe se réduit à un système de deux plans coïncidents.

**33.** *Équations tangentielles de la surface de Kummer.* — Soit

$$(1) \quad \mathfrak{S}_{XY} = 1$$

l'équation d'un plan; nous appellerons, comme d'habitude, *équation tangentielle d'une surface* une équation en  $\mathbf{r}$  vectorielle ou algébrique, qui exprime que le plan (1) est tangent à la surface.

L'équation (1) représente le plan polaire du point  $\mathbf{r}$  par rapport à la sphère de rayon égal à l'unité ayant son centre à l'origine; donc, si dans l'équation tangentielle d'une surface on regarde  $\mathbf{r}$  comme le vecteur d'un point variable, elle représentera l'équation de la polaire réciproque de la surface considérée par rapport à la sphère unitaire.

34. Ceci posé, on sait que la surface (K) est l'enveloppe des plans dans lesquels la courbe du complexe se réduit à un système de deux points. Nous obtiendrons donc l'équation tangentielle de la surface de Kummer en écrivant la condition qui exprime que la courbe du complexe située dans le plan (1) se réduit à un système de deux points : cherchons cette condition.

Si dans l'équation du complexe

$$\mathfrak{S}u\Phi u - \mathfrak{S}v\Psi v = 0,$$

nous remplaçons  $u$  par  $\mathfrak{U}v\mathbf{Y}$ , il vient

$$(1) \quad \mathfrak{S}\mathfrak{U}v\mathbf{Y}\Phi\mathfrak{U}v\mathbf{Y} - \mathfrak{S}v\Phi v = 0,$$

et l'on sait que, si l'on regarde  $v$  comme un vecteur variable, cette équation représente le cône réciproque de celui qui a son sommet à l'origine, et qui passe par la courbe du complexe située dans le plan (1).

Si cette courbe se réduit à un système de deux points, le cône (2) se réduira lui-même à un système de deux plans, c'est-à-dire que pour une valeur  $L$  convenablement choisie de  $v$ , on pourra poser

$$(3) \quad \Psi_L = \mathfrak{U}(\mathbf{Y}\Phi\mathfrak{U}L\mathbf{Y}).$$

Cette équation est une équation tangentielle de la surface de Kummer. On voit qu'elle ne diffère de l'équation ponctuelle

$$\Phi_L = \mathfrak{U}(X\Psi\mathfrak{U}LX)$$

que par le changement de  $\Phi$  en  $\Psi$  et de  $\Psi$  en  $\Phi$ . Nous pourrions énoncer sans démonstration les résultats corrélatifs de ceux obtenus précédemment.

La surface a une seconde équation tangentielle vectorielle qu'on peut écrire sous la forme

$$m_{\Psi} L = \mathfrak{U}(\mathfrak{U}_Y, \Phi \Psi_L \Psi_{Y_1}).$$

On peut encore, en utilisant une remarque faite précédemment (n° 20), écrire les équations tangentielles de la surface sous la forme

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} L &= \mathfrak{U}_{Y^{-1}} \Psi_{LY}, \\ L &= m_{\Phi} \mathfrak{U}(\mathfrak{U}_Y, \Psi^{-1} \Phi^{-1} L \Phi^{-1} Y_1). \end{aligned}$$

L'équation tangentielle algébrique peut s'écrire sous l'une ou l'autre des quatre formes

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_Y(\Psi^{-1} \mathfrak{S}_Y \Psi_Y - m_{\Psi} \Psi^{-1} \Phi^{-1} \Psi^{-1})^{-1} Y &= 1, \\ \mathfrak{S}_Y \left( \mathfrak{S}_Y \Phi^{-1} Y \Phi - \frac{1}{m_{\Phi}} \Phi \Psi \Phi \right)^{-1} Y &= 1, \\ \mathfrak{S}_Y(m_{\Phi} \mathfrak{S}_Y \Phi^{-1} Y \Psi^{-1}) - \Phi)^{-1} Y &= 0, \\ \mathfrak{S}_Y(\mathfrak{S}_Y \Psi_Y \Phi - m_{\Psi} \Psi^{-1}) Y &= 0. \end{aligned}$$

Et l'on voit que les surfaces singulières des complexes ayant pour équations

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_U \Phi U - \mathfrak{S}_V \Psi V &= 0, \\ \mathfrak{S}_U \Phi^{-1} U - \mathfrak{S}_V \Psi^{-1} V &= 0, \end{aligned}$$

sont polaires réciproques par rapport à la sphère unitaire.

55. Il est facile de revenir de l'une des équations tangentielles de la surface à l'une de ses équations ponctuelles, ce qui fournira, pour le cas particulier que nous étudions, une démonstration du théorème général de Plücker cité plus haut, à savoir que la surface lieu des points singuliers d'un complexe du second ordre est identique à la surface enveloppe de ses plans tangents singuliers.

Prenons, par exemple, l'équation

$$(4) \quad \mathfrak{S}_Y (\mathfrak{S}_Y \Psi_Y \Psi^{-1} - m_\Psi \Psi^{-1} \Phi^{-1} \Psi^{-1})^{-1} Y = I,$$

et posons

$$(\mathfrak{S}_Y \Psi_Y \Psi^{-1} - m_\Psi \Psi^{-1} \Phi^{-1} \Psi^{-1})^{-1} Y = \Psi_T,$$

d'où

$$(5) \quad Y = \mathfrak{S}_Y \Psi_Y \Psi_T - m_\Psi \Psi^{-1} \Phi^{-1} \Psi_T.$$

L'équation (4) devient alors,

$$(6) \quad \mathfrak{S}_Y \Psi_T = I,$$

ou bien

$$(7) \quad \mathfrak{S}_Y \Psi_Y \mathfrak{S}_T \Psi_T - m_\Psi \mathfrak{S}_T \Phi^{-1} \Psi_T = I.$$

Si maintenant nous différencions l'équation (5), et que nous opérions sur le résultat avec  $\mathfrak{S} \cdot \Psi_T$ , il vient

$$\mathfrak{S} d_Y \Psi_T - 2 \mathfrak{S} d_Y \Psi_Y \mathfrak{S}_T \Psi_T - \mathfrak{S}_Y \Psi_Y \mathfrak{S} d_T \Psi_T + m_\Psi \mathfrak{S} d_T \Phi^{-1} \Psi_T = 0.$$

Différencions également l'équation (7), et nous aurons

$$\mathfrak{S} d_Y \Psi_Y \mathfrak{S}_T \Psi_T + \mathfrak{S}_Y \Psi_Y \mathfrak{S} d_T \Psi_T - m_\Psi \mathfrak{S} d_T \Phi^{-1} \Psi_T = 0.$$

En ajoutant les deux équations qui précèdent, il vient

$$\mathfrak{S} d_Y \Psi_T - \mathfrak{S} d_Y \Psi_Y \mathfrak{S}_T \Psi_T = 0,$$

ou

$$\mathfrak{S} d_Y (\Psi_T - \mathfrak{S}_T \Psi_T \Psi_Y) = 0.$$

On a d'ailleurs, quelle que soit la différentielle  $d_Y$ ,

$$\mathfrak{S}_X d_Y = 0;$$

donc, on peut poser

$$k_X = \mathfrak{S}_T \Psi_T \Psi_Y - \Psi_T.$$

En opérant sur cette équation successivement avec  $\mathcal{S} \cdot \tau$  et  $\mathcal{S} \cdot \Psi^{-1} x$ , elle donne, en tenant compte des résultats qui précèdent,

$$\begin{aligned} \mathcal{S} x \tau &= 0, \\ k \mathcal{S} x \Psi^{-1} x &= \mathcal{S} \tau \Psi \tau. \end{aligned}$$

On a donc enfin

$$\frac{\mathcal{S} \tau \Psi \tau}{\mathcal{S} x \Psi^{-1} x} x = \mathcal{S} \tau \Psi \tau \Psi \gamma - \Psi \tau,$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathcal{S} \gamma &= \frac{x}{\mathcal{S} x \Psi^{-1} x} + \frac{\Psi \tau}{\mathcal{S} \tau \Psi \tau}, \\ \gamma &= \frac{\Psi^{-1} x}{\mathcal{S} x \Psi^{-1} x} + \frac{\tau}{\mathcal{S} x \Psi \tau}, \\ \mathcal{S} \gamma \Psi \gamma &= \frac{1}{\mathcal{S} x \Psi^{-1} x} + \frac{1}{\mathcal{S} \tau \Psi \tau}. \end{aligned}$$

En portant ces valeurs de  $\gamma$  et de  $\mathcal{S} \gamma \Psi \gamma$  dans l'équation (5), il vient

$$x = (\Psi - m_\nu \mathcal{S} x \Psi^{-1} x \Phi^{-1}) \tau,$$

d'où

$$\tau = (\Psi - m_\nu \mathcal{S} x \Psi^{-1} x \Phi^{-1})^{-1} x,$$

ou enfin, en opérant avec  $\mathcal{S} \cdot x$ ,

$$\mathcal{S} x (m_\nu \mathcal{S} x \Psi^{-1} x \Phi^{-1} - \Psi)^{-1} x = 0,$$

équation identique à l'équation (11) de la surface (K) du § 18.

**36.** La construction géométrique de la surface (K) à l'aide de ses plans tangents se déduit sans peine de ce que nous avons exposé plus haut relativement à la construction de la surface par points; il nous paraît donc inutile d'y insister.

Nous nous bornerons de même à faire remarquer que la surface a seize plans tangents singuliers, dont quatre passant par le centre, qui la touchent suivant des coniques. Ce sont les plans singuliers dans lesquels la courbe du complexe se réduit à deux points coïncidents.

37. *Équation générale des complexes du second ordre qui ont la surface (K) pour surface singulière.* — La droite singulière du complexe

$$(1) \quad \mathfrak{S}u\Phi u - \mathfrak{S}v\Phi v = 0,$$

qui touche la surface (K) au point M, n'est pas déterminée par la surface elle-même : c'est l'une quelconque de ses tangentes en ce point. Nous allons démontrer qu'on peut choisir à volonté une autre des tangentes de la surface (K) au point M et déterminer un nouveau complexe du second ordre ayant cette tangente pour ligne singulière et la surface (K) pour surface singulière, ou, en d'autres termes, que la surface (K) est la surface singulière d'un nombre infini de complexes du second ordre.

Soit (u, v) la droite singulière du complexe donné (1) qui correspond au point M de la surface (K). On reconnaît sans peine (§ 27) que le plan tangent au point M contient non seulement cette droite elle-même, mais encore celle qui a pour coordonnées  $-\Psi v$  et  $\Phi u$ . De sorte qu'une tangente quelconque de la surface (K) au point M a pour coordonnées

$$(2) \quad \begin{cases} u_1 = \sigma u - \Psi v, \\ v_1 = \sigma v + \Phi u, \end{cases}$$

$\sigma$  étant un nombre arbitraire.

On a, d'ailleurs,

$$(3) \quad \mathfrak{S}\Phi u \Psi v = 0;$$

on voit donc que les lignes singulières du complexe donné forment une *congruence* du quatrième ordre, représentée par l'ensemble des équations (1) et (3).

Ceci posé, les équations (2), résolues par rapport à u et v, donnent

$$(4) \quad \begin{cases} u = (\Psi\Phi + \sigma^2)^{-1}(\Psi v_1 + \sigma u_1), \\ v = (\Phi\Psi + \sigma^2)^{-1}(\sigma v_1 - \Phi u_1). \end{cases}$$

L'équation (3) peut d'ailleurs se mettre sous la forme

$$(5) \quad \mathfrak{S}U(\Phi\Psi + \sigma^2)v = 0.$$

Éliminons enfin  $u$  et  $v$  entre les équations (4) et (5), et nous aurons

$$\mathfrak{S}(\Psi v_1 + \sigma u_1)(\Phi\Psi + \sigma^2)^{-1}(\sigma v_1 - \Phi u_1) = 0,$$

ou bien

$$\begin{aligned} \sigma \mathfrak{S}U_1(\Phi\Psi + \sigma^2)^{-1}\Phi u_1 - \sigma \mathfrak{S}v_1\Psi(\Phi\Psi + \sigma^2)^{-1}v_1 \\ + \mathfrak{S}\Psi v_1(\Phi\Psi + \sigma^2)^{-1}\Phi u_1 - \sigma^2 \mathfrak{S}U_1(\Phi\Psi + \sigma^2)^{-1}v_1 = 0, \end{aligned}$$

ou enfin, après des réductions faciles et en supprimant les indices,

$$(6) \quad \mathfrak{S}U(\Phi\Psi + \sigma^2)^{-1}\Phi U - 2\sigma \mathfrak{S}U(\Phi\Psi + \sigma^2)^{-1}v - \mathfrak{S}v\Psi(\Phi\Psi + \sigma^2)^{-1}v = 0.$$

Pour une valeur quelconque de  $\sigma$ , cette équation représente un complexe du second ordre qui a évidemment la surface (K) pour surface singulière.

L'équation (6) est du quatrième ordre par rapport à  $\sigma$ ; donc il y a quatre complexes du second ordre ayant la surface (K) pour surface singulière, et contenant une droite donnée quelconque ( $u, v$ ).

Pour  $\sigma = \infty$ , l'équation (6) devient

$$\mathfrak{S}U\Phi v - \mathfrak{S}v\Psi v = 0,$$

et, pour  $\sigma = 0$ ,

$$\mathfrak{S}U\Psi^{-1}U - \mathfrak{S}v\Phi^{-1}v = 0.$$

Nous retrouvons ainsi le complexe donné et celui que nous avons déjà obtenu précédemment : la droite singulière relative à ce dernier complexe a évidemment pour coordonnées  $-\Psi v$  et  $\Phi U$ .

**38.** Parmi les complexes en nombre infini que représente l'équation (6), il y en a six qui se réduisent à un complexe linéaire.

En effet, si on développe le premier membre de l'équation (6) en

suivant la marche indiquée au § 23, on obtient sans difficulté

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{(\mathfrak{S}_{BCU})^2}{m_\phi s_1 + \sigma^2} + \frac{(\mathfrak{S}_{CAU})^2}{m_\phi s_2 + \sigma^2} + \frac{(\mathfrak{S}_{ABU})^2}{m_\phi s_3 + \sigma^2} \\ & + \mathfrak{S}_{ABC} \left( \frac{\mathfrak{S}_{BCU} \mathfrak{S}_{AV}}{m_\phi s_1 + \sigma^2} + \frac{\mathfrak{S}_{CAU} \mathfrak{S}_{BV}}{m_\phi s_2 + \sigma^2} + \frac{\mathfrak{S}_{ABU} \mathfrak{S}_{CV}}{m_\phi s_3 + \sigma^2} \right) \\ & + \frac{s_1 (\mathfrak{S}_{AV})^2}{m_\phi s_1 + \sigma^2} + \frac{s_2 (\mathfrak{S}_{BV})^2}{m_\phi s_2 + \sigma^2} + \frac{s_3 (\mathfrak{S}_{CV})^2}{m_\phi s_3 + \sigma^2} = 0. \end{aligned} \right.$$

Si l'on pose

$$m_\phi s_i + \sigma^2 = 0,$$

cette équation devient

$$(\mathfrak{S}_{BCU})^2 - 2\sigma \mathfrak{S}_{ABC} \mathfrak{S}_{BCU} \mathfrak{S}_{AV} + \sigma^2 (\mathfrak{S}_{ABC})^2 (\mathfrak{S}_{AV})^2 = 0,$$

ou

$$(\mathfrak{S}_{BCU} - \sigma \mathfrak{S}_{ABC} \mathfrak{S}_{AV})^2 = 0,$$

et l'on voit qu'elle représente l'ensemble de deux complexes linéaires réunis en un seul.

Les complexes linéaires qu'on obtient ainsi en remplaçant, dans l'équation (7),  $\sigma$  par l'une quelconque des valeurs tirées des équations

$$m_\phi s_1 + \sigma^2 = 0,$$

$$m_\phi s_2 + \sigma^2 = 0,$$

$$m_\phi s_3 + \sigma^2 = 0$$

sont ceux que M. Klein appelle les *complexes fondamentaux du système des complexes du second ordre* représentés par l'équation (6), et à l'aide desquels il démontre d'une manière très élégante les propriétés des complexes généraux du second ordre et de la surface de Kummer (*Mathematische Annalen*). Nous reviendrons dans un prochain Mémoire sur cette importante question.

39. Si nous supposons que l'une des fonctions  $\Phi$  ou  $\Psi$  devienne égale à l'unité, les résultats qui précèdent fourniront une démonstration des propriétés bien connues de la surface des ondes de Fresnel :

l'équation vectorielle de cette surface se présente alors sous les formes simples

$$\Phi_L = \mathcal{V} \times \mathcal{V}_{LX},$$

$$L = \mathcal{V} \times \Phi^{-1} \mathcal{V}_{LX},$$

qui ne nous paraissent pas avoir été remarquées.