JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. WEST

Exposé des méthodes en Mathématiques, d'après Wronski (deuxième note)

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 8 (1882), p. 19-54.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1882_3_8__19_0>

Exposé des méthodes en Mathématiques, d'après Wronski

(DEUXIÈME NOTE);

PAR M. E. WEST.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

Sur l'intégration des équations. — Nous venons de voir comment on peut résoudre toute espèce d'équations primitives par la méthode secondaire élémentaire; il nous reste maintenant à examiner comment la même méthode se prête à la résolution des équations non primitives, c'est-à-dire à l'intégration des équations qui contiennent des différences ou des différentielles de la quantité inconnue. Ici encore l'expression fondamentale (3) s'applique avec autant de facilité à ce genre d'équations qu'à celui que nous avons considéré en premier lieu.

Mais, avant d'entamer le sujet, il faut définir ce que l'on entend par intégrer une équation. On dit ordinairement qu'intégrer une équation est trouver plusieurs fonctions, ou une seule, qui satisfassent à l'équation proposée. Cette définition est complète et se trouve par suite suffisante. Cependant on admet d'habitude que la solution doit donner une expression finie; cette condition n'étant pas comprise dans la définition précédente ne présente par elle-même aucune nécessité; si cette condition est admise, elle doit forcément particulariser la forme de la solution. La marche à suivre qui paraît la plus naturelle pour obtenir une expression finie dans une intégration, ou dans toute autre question, consiste à rechercher d'abord toutes les formes possibles qui conviennent à l'expression de la solution et à en déduire ensuite les conditions qui permettent de réduire une ou plusieurs de ces expressions à une forme finie. La *Méthode suprême* de Wronski est celle qui se prête le mieux à ce genre difficile de questions; pour l'instant nous nous contenterons de faire connaître une méthode qui permet, dans tous les cas, d'obtenir une solution utilisable en pratique; cette solution se présente ordinairement sous forme de suite indéfinie. Il faut se rendre compte que bien souvent les expressions finies que l'on obtiendrait seraient si compliquées qu'elles seraient impossibles à utiliser dans les calculs; nous en donnerons plus tard un exemple remarquable. Au contraire, la méthode générale et pratique dont nous parlons offre une utilité incontestable, car personne n'ignore qu'il existe nombre de questions, et parmi celles-ci des questions importantes, qui n'ont pu être traitées complètement, faute de moyens d'obtenir les solutions.

Voici la marche que nous allons suivre : il résulte de ce que nous avons dit précédemment que l'expression (3) est une expression générale d'une certaine fonction $F(y)$ formée avec la quantité inconnue y, laquelle est donnée par l'équation $\varphi(y) = 0$; cette équation contient en outre, dans le cas qui nous occupe, une variable indépendante x, ou plusieurs variables indépendantes, ainsi que des différences ou des différentielles de l'inconnue et de la variable. La question se trouve donc ramenée à trouver une fonction qui satisfasse au deuxième membre de l'expression (3), problème facile à résoudre comme on peut le prévoir maintenant.

On voit même que la fonction intégrale peut prendre généralement un nombre indéfini de formes essentiellement différentes; ces formes différentes dépendent de la nature des fonctions fondamentales, qui sont admises à figurer dans l'expression définitive; nous allons faire un choix de ces fonctions. On peut s'astreindre, par exemple, à n'admettre que des fonctions exponentielles, ou encore des transcendantes d'un ordre plus élevé; dans la première supposition, on pourra très rarement obtenir pour intégrale une fonction finie, et dans la deuxième on pourra obtenir une fonction intégrale remplissant cette condition, dans des cas d'autant plus fréquents que l'on admettra comme fonctions fondamentales un plus grand nombre d'espèces de fonctions. Mais ici se présente un inconvénient très grave : c'est l'introduction d'un nombre de plus en plus grand de ces fonctions dont les propriétés principales devront être connues, et pour lesquelles des tables devront être calculées. Or, cette étude préalable, si elle était étendue à un nombre de plus en plus grand de fonctions, deviendrait bientôt matériellement impossible; on peut en juger déjà par l'étude des fonctions elliptiques et abéliennes. Cette étude, faite évidemment par des moyens analogues à ceux qui sont appliqués aux fonctions problématiques, conduit, pour être logique et pour éviter des complications très grandes, à cette conséquence que l'on ne doit pas rechercher en général de solutions finies.

Il faut, au contraire, chercher à n'admettre que le nombre le plus restreint de fonctions fondamentales, et nous allons voir que ces fonctions se réduisent seulement aux fonctions exponentielles et à leurs inverses les fonctions logarithmiques. Dans ces conditions, les intégrations sont non seulement toujours possibles, mais elles sont toujours faciles et par conséquent pratiques.

D'ailleurs, d'après ce que nous avons dit à propos de la résolution des équations primitives, nous sommes encore conduit à distinguer dans la solution la partie essentiellement *théorique* de la partie *technique*, et ce que l'on doit chercher, c'est de réduire au minimum la partie technique de la solution au moyen des fonctions fondamentales que l'on se donne *a priori*. Quant à rechercher les conditions pour que cette partie technique s'annule toujours, en laissant alors arbitraire la nature des fonctions fondamentales admises à figurer dans la solution, cela peut être donné par la *Méthode suprême*, comme nous l'avons déjà dit, mais ce n'est qu'un problème particulier qui ne présente ordinairement pas d'utilité dans la pratique.

Il est même facile de concevoir pour quelle raison les solutions finies, en général, n'existent pas théoriquement. On sait en effet que les fonctions qui satisfont aux équations différentielles, ou aux différences finies, sont généralement des fonctions transcendantes, c'est-à-dire, suivant l'acception du mot qui signifie en dehors des conditions du temps, des fonctions dont on ne peut avoir que des valeurs de plus en plus approchées sans pouvoir jamais en obtenir la valeur exacte. Il en résulte naturellement que l'intégration d'une équation doit conduire à une expression de forme indéfinie, laquelle ne peut se réduire à une forme finie que par l'introduction de conventions particulières, ainsi que nous l'avons indiqué plus haut.

A cette occasion, nous devons dire que Wronski a cependant indiqué un système d'intégration finie au moyen des *facultés algorithmiques*, fonctions découvertes, il y a plus d'un siècle, par Vandermonde et désignées par lui sous le nom d'*irrationnelles d'ordres supérieurs*. Il faut remarquer que les intégrales sont alors données par une seule espèce de fonctions; cette manière d'intégrer, utile dans certaines conditions, ne permet pas de calculer les valeurs numériques des intégrales, parce qu'il faut développer les facultés et que l'on obtient alors, dans la plupart des cas, des développements non convergents; il faut donc effectuer encore une seconde transformation pour obtenir la convergence nécessaire, et l'on retombe sur des expressions auxquelles on pourrait arriver directement par d'autres méthodes. Wronski, dans sa théorie de la chaleur, a donné une équation intégrée par les facultés algorithmiques (voir *Nouveaux systèmes de machines à vapeur*, 1834-1835); il exprime sous forme finie, formule (54) ou (57), l'intégration d'une équation différentielle très élevée, qui donne la loi de la relation de la température intime des corps et de leur densité, et par suite la loi de la force élastique des vapeurs; mais l'Ouvrage n'ayant pas été achevé, l'auteur n'a pu faire connaître l'équation d'où il était parti.

Il n'y a pas lieu de distinguer les équations qui peuvent être intégrées de celles qui ne le peuvent pas, puisque l'on peut toujours satisfaire à une équation donnée, comme nous allons le voir. Seulement on pourra rencontrer des solutions indiquant que l'équation proposée est impossible, si elle a été formée au hasard, c'est-à-dire si elle ne répond à aucun problème que l'on puisse réellement rencontrer. Nous ne nous occuperons pas d'équations ainsi formées, car il est clair que, si l'équation ne représente rien, la solution n'ayant aucune signification, toute

---

(1) On peut voir, dans le programme de l'Ouvrage cité, l'énoncé en lettres italiques du principe fondamental de la Théorie de la chaleur; c'est donc en France, en 1835, que ce principe a été énoncé pour la première fois d'une manière bien précise; plus loin la formule (92) contient l'expression mathématique du même principe.

interprétation que l'on en ferait serait complètement arbitraire et n'aurait aucune valeur. Au contraire, les équations provenant d'un problème offrant une réalité conduisent à des solutions dont la signification est bien déterminée, et ces équations ont une formation analytique qui a été indiquée pour la première fois par Lagrange; cette origine est la seule que l'on ait à considérer ici. Wronski a donné quelques indications à cet égard; voici ce qui en est.

Les équations différentielles doivent être classées, 1° d'après leur ordre d'indétermination, 2° d'après le nombre des variables qu'elles renferment, 3° d'après l'ordre des différentielles de ces variables. Il existe d'autres classifications, mais elles sont accessoires; telles sont celles qui se basent sur le degré de la puissance à laquelle se trouvent élevées les différentielles, ou sur l'ordre d'indétermination où se trouvent les variables.

Puisque nous ne considérons que les questions présentant une entière réalité, nous admettrons nécessairement l'existence d'une ou de plusieurs équations primitives; c'est là la condition principale : les équations différentielles n'en sont par suite que des conséquences.

Soit le premier ordre d'indétermination des équations; supposons d'abord qu'il n'y ait que deux variables et que les différentielles n'entrent qu'au premier ordre : il s'agit de voir comment d'une équation primitive on peut généralement déduire une équation différentielle. Or, une pareille équation ne provient que d'une relation entre l'équation primitive et celle-ci différentiée; de plus, toute relation entre deux équations ne peut s'établir qu'en comparant deux quantités dépendant à la fois de ces équations, ce qui revient à établir l'égalité entre deux fonctions de quantités qui entrent dans les équations; soit donc $\varphi(x, y)$ une fonction comprise dans l'équation primitive que nous écrirons

$$(a) \qquad \Phi[x, y, \varphi(x, y)] = 0;$$

la fonction φ devant se trouver encore dans l'équation précédente différentiée, la relation cherchée s'obtiendra en éliminant φ entre les deux équations. On voit que cette fonction φ ne peut être quelconque, puisqu'elle doit subsister malgré la différentiation de Φ; cette condition se trouvera remplie si la dérivée de Φ par rapport à φ est nulle, parce qu'alors Φ étant, pour ainsi dire, une fonction invariable de φ, la différentiation de Φ par rapport à la variable indépendante x ne peut avoir d'influence sur la fonction φ, et celle-ci se retrouvera une fois l'opération effectuée. Il faut donc que l'on ait

$$\left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right) = 0\,;$$

φ est ici une *fonction singulière*. Mais la quantité φ peut encore se retrouver dans la fonction Φ, après sa différentiation par rapport à x, si φ se réduit à une constante; celle-ci pourra être éliminée et donner lieu à la relation qui forme l'équation générale du premier ordre. En résumé, on sait qu'en différentiant l'équation primitive, ce qui donne

$$(b) \qquad \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)dx + \left(\frac{d\Phi}{dy}\right)dy + \left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)d\varphi = 0,$$

l'élimination de φ entre cette équation et l'équation primitive ne peut avoir lieu que si l'on a

$$(c) \qquad \left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right) = 0, \quad \text{ou} \quad d\varphi = 0.$$

Ainsi une équation différentielle du premier ordre équivaut à deux équations primitives, l'une contenant une fonction singulière $\varphi(x,y)$, l'autre une constante arbitraire.

Si la relation primitive entre deux variables contient plusieurs fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\mu$ de ces mêmes variables, de telle sorte que l'on ait

$$\Phi[x, y, \varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y), \ldots, \varphi_\mu(x,y)] = 0,$$

en prenant la différentielle totale de Φ, puis la différentielle totale de celle-ci, et ainsi de suite, en effectuant μ opérations successives, on pourra éliminer entre les μ équations différentielles et l'équation primitive les μ fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\mu$, et obtenir une équation différentielle d'ordre μ. Mais, pour que cette élimination puisse se faire, il faut que la somme des termes qui contiennent les différentielles de

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\mu$, dans chacune des μ relations différentielles précédentes, soit nulle, ce qui donnera μ équations de condition auxquelles les fonctions φ doivent satisfaire; ces quantités φ y satisferont toujours si elles se réduisent à des constantes. Ainsi l'équation différentielle du $\mu^{\text{ième}}$ ordre équivaut à deux sortes d'équations primitives, l'une contenant μ constantes arbitraires, et l'autre contenant de une à μ fonctions singulières avec un nombre complémentaire de constantes arbitraires. Cela est connu.

Dans le premier ordre d'indétermination des équations renfermant trois variables, soient les deux équations

$$(d)\qquad \begin{cases} \Phi_1[x, y, z, \varphi_1(x, y, z), \psi(x, y, z)] = 0, \\ \Phi_2[x, y, z, \varphi_2(x, y, z), \psi(x, y, z)] = 0; \end{cases}$$

φ_1, φ_2 et ψ sont trois fonctions contenues dans les fonctions Φ_1 et Φ_2. On a, en différentiant,

$$(e)\qquad \begin{cases} \left(\frac{d\Phi_1}{dx}\right)dx + \left(\frac{d\Phi_1}{dy}\right)dy + \left(\frac{d\Phi_1}{dz}\right)dz + \left(\frac{d\Phi_1}{d\varphi_1}\right)d\varphi_1 + \left(\frac{d\Phi_1}{d\psi}\right)d\psi = 0, \\ \left(\frac{d\Phi_2}{dx}\right)dx + \left(\frac{d\Phi_2}{dy}\right)dy + \left(\frac{d\Phi_2}{dz}\right)dz + \left(\frac{d\Phi_2}{d\varphi_2}\right)d\varphi_2 + \left(\frac{d\Phi_2}{d\psi}\right)d\psi = 0, \end{cases}$$

et si l'on a

$$(f)\qquad \left(\frac{d\Phi_1}{d\varphi_1}\right)d\varphi_1 + \left(\frac{d\Phi_1}{d\psi}\right)d\psi = 0, \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\Phi_2}{d\varphi_2}\right)d\varphi_2 + \left(\frac{d\Phi_2}{d\psi}\right)d\psi = 0,$$

on pourra éliminer entre les quatre premières équations deux des trois fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \psi$, ou toutes les trois.

Dans le premier cas, en éliminant les deux fonctions φ_1 et φ_2 par exemple, on aura deux équations différentielles du premier ordre

$$(g)\qquad \begin{cases} \Psi_1[x, y, z, \psi(x, y, z), dx, dy, dz, d\psi(x, y, z)] = 0, \\ \Psi_2[x, y, z, \psi(x, y, z), dx, dy, dz, d\psi(x, y, z)] = 0. \end{cases}$$

Mais les relations (f) peuvent avoir lieu dans deux cas, si les fonctions

φ_1, φ_2, ψ se réduisent à des constantes, ou si l'une d'elles, ou deux ou trois sont des fonctions satisfaisant à ces relations. Si aucune de ces fonctions ne se réduit à une constante, comme il n'existe que deux relations (f), l'une des fonctions, ψ par exemple, sera une fonction arbitraire, et les deux autres, φ_1 et φ_2, seront exprimées par les relations (f) en fonction de ψ et de sa dérivée. Ainsi les deux équations différentielles du premier ordre équivalent à deux systèmes d'équations primitives, l'une où les deux équations primitives contiennent deux constantes arbitraires, et l'autre où elles contiennent une ou deux fonctions singulières φ_1 et φ_2 telles que celles-ci satisfassent aux conditions (f).

Dans le second cas, en éliminant les trois fonctions φ_1, φ_2, ψ entre les quatre équations, on aura l'équation différentielle du premier ordre

$$(h) \qquad \Theta(x, y, z, dx, dy, dz) = 0.$$

Cette équation équivaut encore à deux systèmes d'équations primitives entre les variables : dans l'un, les trois fonctions φ_1, φ_2, ψ se réduisent à trois constantes arbitraires; dans l'autre, les équations primitives contiennent une, deux ou trois fonctions singulières satisfaisant aux conditions (f); celles-ci pouvant contenir une fonction arbitraire ψ, les équations primitives contiennent alors cette fonction arbitraire et sa dérivée, puisque, en vertu de (f), les fonctions φ_1 et φ_2 s'expriment au moyen de ψ et de sa dérivée.

Généralement, pour le premier ordre d'indétermination des équations de ν variables et d'ordre μ des différentielles, il faudrait supposer l'existence de $\nu - 1$ équations primitives contenant deux systèmes des fonctions singulières des ν variables : $\mu(\nu - 1)$ fonctions φ ordinairement différentes dans les $\nu - 1$ équations, et $\nu - 2$ fonctions ψ qui se trouvent dans chacune des équations. On aurait ainsi le système d'équations primitives

$$(i) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_1(x_1, x_2, \ldots x_\nu, \; \varphi_{11}, \; \varphi_{12}, \; \ldots \varphi_{1\mu}, \; \psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{\nu-2}) = 0, \\ \Phi_2(x_1, x_2, \ldots x_\nu, \; \varphi_{21}, \; \varphi_{22}, \; \ldots \varphi_{2\mu}, \; \psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{\nu-2}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_{\nu-1}(x_1, x_2, \ldots x_\nu, \; \varphi_{(\nu-1)1}, \varphi_{(\nu-1)2}, \ldots \varphi_{(\nu-1)\mu}, \; \psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{\nu-2}) = 0. \end{array} \right.$$

Ces $\mu(\nu - 1) + \nu - 2$ fonctions singulières peuvent se réduire toutes à des constantes arbitraires; on aura, dans ce cas, un premier système d'équations primitives, les équations différentielles provenant de l'élimination de ces constantes entre les équations primitives et les équations que l'on en déduirait en les différentiant jusqu'à l'ordre μ. Si les fonctions singulières ne se réduisent pas toutes à des constantes, elles seront déterminées par des relations que l'on établirait facilement comme plus haut, ce qui permettrait de les éliminer entre les équations primitives et ces mêmes équations différentiées jusqu'à l'ordre μ, de manière à former le système des équations différentielles. Les équations (i) forment alors un second système d'équations primitives. On verrait dans ce cas, s'il y a moins de $\nu - 2$ constantes arbitraires, qu'on ne peut déterminer plus de $\mu(\nu - 1)$ fonctions singulières, à cause du nombre de relations de condition, qui est $\mu(\nu - 1)$, et les autres fonctions singulières sont arbitraires.

On verrait encore qu'en partant de l'un ou de l'autre système d'équations primitives, on pourrait éliminer $\mu(\nu - 1)$ constantes arbitraires ou fonctions singulières ou un plus grand nombre de ces constantes ou de ces fonctions, ce qui donnerait un système de $\nu - 1$ équations différentielles ou un nombre moindre.

Les équations aux différentielles partielles proviennent des ordres d'indétermination des équations supérieurs au premier. Nous ne pouvons donner ici des développements aussi étendus que le comporte la question de la formation des équations différentielles; on pourra consulter à ce sujet l'*Introduction à la Philosophie des Mathématiques*, d'où nous avons extrait en partie ce qui précède [1].

Enfin, il faut encore faire une remarque importante sur l'habitude que l'on a de traiter les questions d'intégration au moyen de considérations géométriques; cette méthode ne peut conduire à rien de général, par la raison que la Géométrie et l'Analyse, l'Algorithmie pour mieux dire, sont deux sciences indépendantes l'une de l'autre en principe. La première est une science qui n'admet que l'idée d'espace pour unique élément concret, et la seconde que l'idée de nombre. Ces sciences

---

[1] Nous avons indiqué ce qui précède pour bien préciser ce que nous entendons par *solutions singulières* et *fonctions singulières*; la suite exigerait, pour être développée, des notations spéciales; nous aurons occasion d'y revenir plus tard.

n'ont de commun que la partie purement abstraite; il en résulte qu'une théorie géométrique traduite en analyse ne peut donner *nécessairement* une théorie complète d'Analyse : elle ne peut le faire que d'une manière *contingente*. C'est pour cette raison que la Géométrie symbolique à laquelle on a été conduit ne peut faire faire de véritables progrès à l'Analyse. La représentation géométrique des imaginaires est également inutile tout au moins, par la raison que la forme générale des quantités algébriques est

$$a_0 + \rho a_1 + \rho^2 a_2 + \ldots + \rho^{m-1} a_{m-1},$$

au lieu de $a + b\sqrt{-1}$, ρ étant une racine $m^{\text{ième}}$ de l'unité. Ces deux formes sont, il est vrai, équivalentes au fond, car, en supposant que l'on réduise toutes les quantités imaginaires de la première, on retombe évidemment sur la forme $a + b\sqrt{-1}$; mais cette réduction ne peut se faire arbitrairement sans faire disparaître certaines conditions du problème que l'on traite et dont il faut nécessairement tenir compte : une telle réduction peut rendre la solution très difficile, sinon impossible, puisqu'elle particularise la forme des quantités. On verra plus tard quelle est l'importance de cette remarque.

Ainsi les méthodes géométriques ne peuvent être généralement admises comme auxiliaires des méthodes algorithmiques; c'est ce que Wronski a compris le premier; en suivant ses indications, nous parviendrons à l'intégration complète des équations, sans avoir besoin de nous appuyer sur aucune considération géométrique.

Nous n'avons pas à insister davantage sur les observations qui précèdent : il suffit de les signaler pour l'instant; nous aurons occasion d'y revenir avec plus de détails dans ce qui va suivre. Nous allons maintenant entreprendre l'intégration des équations en examinant d'abord les équations différentielles ne contenant qu'une variable indépendantes, puis les équations aux différences finies dans lesquelles l'inconnue ne dépend aussi que d'une seule variable. Nous examinerons ensuite comment on peut intégrer les équations contenant des différences ou des différentielles d'une fonction de plusieurs variables indépendantes, et enfin les équations simultanées primitives ou non.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NE CONTENANT QU'UNE SEULE VARIABLE INDÉPENDANTE.

Nous rappelons que, pour résoudre une équation généralement quelconque, il s'agit de trouver une fonction qui, mise à la place de l'inconnue, satisfasse identiquement à l'équation proposée. L'expression (2) est, comme on l'a vu, une expression générale de la quantité inconnue y qui satisfait à l'équation donnée

$$\varphi(y) = 0. \tag{12}$$

Maintenant y est considéré comme fonction d'une variable indépendante x, et la fonction φ contient, outre l'inconnue y et la variable x, les différentielles de ces deux quantités. La question se ramène donc, pour intégrer l'équation (12), à introduire dans l'expression (2) la variable x et à calculer les dérivées des divers ordres de l'inconnue y qui y entrent. Pour ce dernier objet, on est conduit à considérer généralement une fonction de l'inconnue $F(y)$, F étant une fonction donnée; on sait d'ailleurs que dans certains cas la véritable inconnue d'un problème n'est pas précisément la quantité y qui entre dans l'équation du problème, mais une fonction de cette quantité, telle que $\sin y$ par exemple; nous en avons déjà trouvé un exemple dans la résolution de l'équation transcendante que nous avons traitée plus haut. Pour cette raison, nous substituerons à l'expression (2) l'expression plus générale (3), savoir

$$F(y) = F(w) - \varphi(w)\frac{dF(w)}{d\varphi(w)} + [\varphi(w)]^2\frac{d\varphi(w)\,d^2F(w) - d^2\varphi(w)\,dF(w)}{2[\varphi(w)]^3} - \ldots$$

Nous nous proposons donc de trouver une fonction déterminée F de la quantité y donnée par l'équation différentielle (12).

Formation de l'équation réduite. — D'après ce que nous avons déjà dit, la quantité fondamentale w qui entre dans l'expression (3) est ici une fonction de x; la fonction $F(w)$, également fonction de x, devra être aussi rapprochée que possible de la fonction cherchée $F(y)$, et elle sera déterminée par une équation déjà désignée sous le nom d'*équation réduite*. Cette équation devra ainsi différer le moins possible de l'équation proposée (12); de cette manière, la fonction $\varphi(w)$ étant constamment réduite à sa valeur minima, l'expression fondamentale possédera le maximum de convergence.

La marche à suivre est donc ici la même que celle que nous avons indiquée dans le cas des équations primitives, en introduisant toutefois les modifications dues à la nature des équations différentielles, comme nous allons le voir.

Nous formerons l'équation réduite en introduisant dans l'équation proposée une quantité arbitraire ω, soit en coefficient, soit en exposant, de telle sorte que l'équation transformée

$$\varphi(y, \omega) = 0, \tag{13}$$

pour $\omega = 1$, reproduise l'équation proposée, qui est, d'après cette notation,

$$\varphi(y, 1) = 0, \tag{13'}$$

et pour $\omega = 0$ donne l'équation réduite

$$\varphi(y, 0) = 0, \tag{13''}$$

Cette équation devra être résoluble par des procédés ordinaires et devra ainsi différer aussi peu qu'il se pourra de l'équation (13)'; elle sera une équation différentielle de même ordre que la proposée, afin d'admettre le même genre de solution.

Or cette réduction est toujours possible; on conçoit même qu'elle puisse être faite de plusieurs manières, ce qui laisse un certain arbitraire dans cette réduction. On peut ainsi, au moyen de l'équation réduite, introduire dans la solution même de l'équation proposée diverses espèces de fonctions, généralement des transcendantes d'ordres plus ou moins élevés. Ces fonctions fondamentales, dont les propriétés devront être nécessairement bien connues, conduiront dans certains cas à des solutions finies, ainsi que nous l'avons dit plus haut. Remarquons aussi que chacune de ces fonctions nécessitera préalablement une étude particulière, et leur usage exigera l'emploi de tables spéciales pour chacune d'elles; il est donc important de chercher à réduire ces fonctions au nombre strictement nécessaire, ce qui est d'ailleurs indispensable dans les applications.

Pour cela, comme on va le voir, l'équation réduite peut être ramenée dans tous les cas à être une équation différentielle linéaire à coefficients constants, toujours intégrable théoriquement et d'une manière finie, et cette solution permet de n'introduire que des transcendantes de la forme e^{rx}, où r est une constante, c'est-à-dire des exponentielles ou des sinus d'un ordre quelconque suivant que r sera réel ou imaginaire. Elles sont, en y joignant les logarithmes fonctions inverses des exponentielles, les seules transcendantes nécessaires; ces fonctions sont élémentaires et bien connues ([1]).

Ainsi, d'après cette théorie, contrairement aux opinions admises, les autres transcendantes, quelles qu'elles soient, ne peuvent se rencontrer que dans des problèmes particuliers, et rien ne conduit à les introduire nécessairement dans les calculs; au contraire, elles sont facilement exprimables au moyen des transcendantes élémentaires que nous venons de citer; nous aurons occasion de nous en rendre compte en exposant une autre méthode.

En formant une équation réduite à coefficients constants, nous obtenons dans tous les cas une réduction uniforme, ne comportant rien d'arbitraire, ce qui est un caractère des solutions théoriques, telles que Wronski les a définies. La quantité $F(x)$ formera donc encore ici la partie essentiellement théorique et finie de la solution, et la série des autres termes de l'expression (3) formera la partie technique et indéfinie, partie qui existera généralement. La solution sera considérée comme théorique, quand cette seconde partie sera aussi réduite que possible, et l'expression donnant la solution cherchée atteindra le maximum de convergence.

La formation de l'équation réduite, telle que nous l'indiquons, con-

---

([1]) Les sinus d'ordres supérieurs sont cependant des fonctions encore peu connues; nous en donnerons les propriétés toutes les fois que l'occasion s'en présentera.

duit à l'intégrale générale de l'équation proposée par suite de l'introduction unique de constantes arbitraires ; quant aux solutions singulières, on pourrait les obtenir soit en les déduisant de l'intégrale générale, soit en modifiant convenablement la formation de l'équation réduite.

Calcul de l'inconnue. — Pour opérer comme nous venons de le dire, nous mettrons l'équation différentielle proposée, supposée d'ordre μ, sous la forme suivante, ce que l'on peut toujours faire,

$$(14) \qquad \frac{d^\mu y}{dx^\mu} H_\mu + \frac{d^{\mu-1} y}{dx^{\mu-1}} H_{\mu-1} + \ldots + y H_0 = \psi(x);$$

$\psi(x)$ est une fonction quelconque de la seule variable x et les coefficients $H_0, H_1, \ldots, H_\mu$ peuvent être des fonctions quelconques de x, de la fonction inconnue y et de ses dérivées des divers ordres, pourvu qu'ils ne dépassent pas l'ordre μ, qui est l'ordre le plus élevé.

Pour plus de simplicité, nous pourrons écrire cette équation ainsi :

$$(14)' \qquad \sum_\mu \frac{d^\sigma y}{dx^\sigma} H_\sigma = \psi(x),$$

en convenant de faire varier l'indice σ de o à μ pour obtenir tous les termes compris sous le signe Σ.

Considérons les variations de l'inconnue, correspondantes à des valeurs de la variable indépendante, comprises entre deux limites quelconques, mais déterminées, p et q. Soient y_p et y_q les deux valeurs de y correspondantes ; la fonction F variera entre les limites $F(y_p)$ et $F(y_q)$; si nous désignons par β une valeur de y telle que la quantité $F(\beta)$ soit sensiblement la moyenne entre les quantités $F(y_p)$ et $F(y_q)$, α étant la valeur de x correspondante, les valeurs α et β de x et de y sont ce que Wronski appelle *valeurs moyennes;* nous les supposerons provisoirement connues.

Appelons h_σ ce que devient le coefficient général H_σ, quand on y remplace les quantités x, y et leurs dérivées par leurs valeurs moyennes ; nous pourrons introduire la quantité arbitraire ω comme il suit, et prendre pour l'équation transformée (13) l'équation

$$(15) \qquad \sum_{\mu} \frac{d^{\sigma} y}{dx^{\sigma}} h_{\sigma} \left(\frac{H_{\sigma}}{h_{\sigma}}\right)^{\omega} - \psi(x) = 0.$$

Car, pour $\omega = 1$, nous obtenons l'équation proposée (14)', et pour $\omega = 0$ l'équation réduite à coefficients constants

$$(16) \qquad \sum_{\mu} \frac{d^{\sigma} y}{dx^{\sigma}} h_{\sigma} - \psi(x) = 0.$$

Tel est le moyen de former généralement l'équation réduite.

Quant à la solution de cette dernière, l'inconnue y étant ici la valeur fondamentale que nous avons dénotée par w, en désignant par $m_1, m_2, \ldots, m_{\mu}$ les μ racines de l'équation caractéristique

$$(17) \qquad h_{\mu} m^{\mu} + h_{\mu-1} m^{\mu-1} + \ldots + h_0 = 0,$$

nous aurons

$$(17)' \qquad w = \Sigma_{\mu} e^{m x} [M_{\sigma} + N_{\sigma} \int \psi(x) e^{-m_{\sigma} x} dx],$$

M_{σ} est une des μ constantes arbitraires de l'intégration, et N_{σ} une constante dont la valeur est

$$N_{\sigma} = \frac{1}{h_{\mu}(m_{\sigma} - m_1)(m_{\sigma} - m_2)\ldots(m_{\sigma} - m_{\mu})},$$

l'indice σ variant de 1 à μ.

Il peut être nécessaire, dans certains cas, d'introduire une fonction arbitraire dans l'équation réduite, afin de lever certaines difficultés qui se présentent parfois. Pour cela on peut ajouter cette fonction arbitraire $\chi(x)$ au second membre de l'équation transformée, pour ne pas modifier la forme de la valeur fondamentale w; cette équation sera donc généralement

$$(18) \qquad \sum_{\mu} \frac{d^{\sigma} y}{dx^{\sigma}} h_{\sigma} \left(\frac{H_{\sigma}}{h_{\sigma}}\right)^{\omega} - \psi(x) - (1 - \omega)\chi(x) = 0,$$

équation qui reproduit l'équation proposée pour $\omega = 1$, et fournit l'équation réduite

$$(19) \qquad \sum_{\mu} \frac{d^\sigma y}{dx^\sigma} h_\sigma - \psi(x) - \chi(x) = 0,$$

pour $\omega = 0$. Si la fonction $\psi(x)$ est nulle, il convient de prendre pour la fonction arbitraire $\chi(x)$ l'exponentielle se^{rx}, s et r étant des constantes qu'il faut déterminer convenablement; de cette façon l'expression de la valeur fondamentale w conserve la forme qu'elle aurait dans le cas où la fonction arbitraire n'existerait pas.

Ajoutons que, si l'équation caractéristique (17) a des racines imaginaires, les exponentielles de l'expression (17) devront être remplacées par des fonctions de sinus d'un ordre plus ou moins élevé, comme l'a montré le premier M. Yvon Villarceau dans le Mémoire déjà cité; nous en verrons des exemples.

Nous avons vu que les différentielles qui entrent dans l'expression fondamentale (3) sont prises seulement par rapport à la quantité w, celle-ci étant une fonction de x qui est maintenant déterminée d'une manière générale. Pour les calculs nous remplacerons les différentielles des fonctions φ et F par leurs dérivées par rapport à w; nous aurons donc, à la place de l'expression (3), l'expression

$$(19)_1 \quad \left\{ \begin{aligned} F(y) = {} & F(w) - \varphi(w) \frac{1}{\frac{d\varphi(w)}{dw}} \frac{dF(w)}{dw} \\ & + \frac{1}{2}[\varphi(w)]^2 \, \frac{\frac{d\varphi(w)}{dw}\frac{d^2F(w)}{dw^2} - \frac{d^2\varphi(w)}{dw^2}\frac{dF(w)}{dw}}{\left[\frac{d\varphi(w)}{dw}\right]^3} - \ldots \end{aligned} \right.$$

En prenant les dérivées par rapport à w de certaines fonctions de x, que nous désignerons généralement par $f(x)$, nous aurons

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{df(x)}{dw} &= \frac{df(x)}{dx}\frac{dx}{dw}, \\ \frac{d^2f(x)}{dw^2} &= \frac{d^2f(x)}{dx^2}\left(\frac{dx}{dw}\right)^2 + \frac{df(x)}{dx}\frac{d^2x}{dw^2}, \\ \frac{d^3f(x)}{dw^3} &= \frac{d^3f(x)}{dx^3}\left(\frac{dx}{dw}\right)^3 + 3\frac{d^2f(x)}{dx^2}\frac{d^2x}{dw^2}\frac{dx}{dw} + \frac{df(x)}{dx}\frac{d^3x}{dw^3}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

Nous avons de plus à calculer les dérivées de x par rapport à w, ce qui donnera

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dx}{dw} = \frac{1}{\frac{dw}{dx}},\\ &\frac{d^2x}{dw^2} = -\frac{d^2w}{dx^2}\frac{1}{\left(\frac{dw}{dx}\right)^3},\\ &\frac{d^3x}{dw^3} = \left[3\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 - \frac{dw}{dx}\frac{d^3w}{dx^3}\right]\frac{1}{\left(\frac{dw}{dx}\right)^5},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Wronski a donné l'expression générale de ces dérivées pour les différents ordres; les valeurs précédentes suffisent pour l'instant.

Nous pouvons maintenant porter les valeurs des dérivées de $F(w)$ et $\varphi(w)$ dans l'expression précédente $(19)_1$; pour cela, remarquons que ces fonctions ne dépendent que de la variable x, puisque w est une fonction de x; il en résulte que, en appliquant les expressions (20) et (21), où $f(x)$ peut représenter l'une des deux fonctions F ou φ, nous avons

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} F(y) = F(w) &- \varphi(w)\frac{1}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)}\left(\frac{d(Fw)}{dx}\right)\\ &+ \frac{1}{2}\left[\varphi(w)\right]^2\frac{1}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)^3}\left[\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)\left(\frac{d^2F(w)}{dx^2}\right)\right.\\ &\left.- \left(\frac{d^2\varphi(w)}{dx^2}\right)\left(\frac{dF(w)}{dx}\right)\right] - \ldots \end{aligned}\right.$$

De plus, on a encore besoin des dérivées, par rapport à x, prises sur la seule variable y de la fonction $F(y)$; soit $\left(\frac{d^\nu F(y)}{dx^\nu}\right)$ la dérivée d'ordre ν, la fonction $F(y)$ étant quelconque; on peut admettre qu'elle représente la dérivée en question; par suite, l'expression (22) donne

$$(22)'\quad \left\{\begin{aligned} \left(\frac{d^\nu F(y)}{dx^\nu}\right) = \left(\frac{d^\nu F(w)}{dx^\nu}\right) &- \varphi(w)\frac{1}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)}\left(\frac{d^{\nu+1}F(w)}{dx^{\nu+1}}\right)\\ &+ \frac{1}{2}\left[\varphi(w)\right]^2\frac{1}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)^3}\left[\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)\left(\frac{d^{\nu+2}F(w)}{dx^{\nu+2}}\right)\right.\\ &\left.- \left(\frac{d^2\varphi(w)}{dx^2}\right)\left(\frac{d^{\nu+1}F(w)}{dx^{\nu+1}}\right)\right] - \ldots \end{aligned}\right.$$

En particulier, si $F(y)$ se réduit à y, il vient

$$
(22)'' \quad \left\{
\begin{aligned}
&y = w - \varphi(w)\frac{1}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)}\frac{dw}{dx} \\
&\qquad + \frac{1}{2}[\varphi(w)]^2\frac{1}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)^3}\left[\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)\frac{d^2w}{dx^2} - \left(\frac{d^2\varphi(w)}{dx^2}\right)\frac{dw}{dx}\right] - \ldots \\
&\text{et} \\
&\frac{d^\nu y}{dx^\nu} = \frac{d^\nu w}{dx^\nu} - \varphi(w)\frac{1}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)}\frac{d^{\nu+1}w}{dx^{\nu+1}} \\
&\qquad + \frac{1}{2}[\varphi(w)]^2\frac{1}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)^3}\left[\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)\frac{d^{\nu+2}w}{dx^{\nu+2}} - \left(\frac{d^2\varphi(w)}{dx^2}\right)\frac{d^{\nu+1}w}{dx^{\nu+1}}\right] - \ldots .
\end{aligned}
\right.
$$

Enfin, il faut encore calculer les dérivées de $F(w)$, de $\varphi(w)$ et de w par rapport à x. La forme de la fonction F n'étant pas explicitement donnée ici, bien qu'elle soit connue dans chaque cas particulier, on ne peut effectuer pour l'instant le calcul de ses dérivées; il suffirait évidemment de substituer à la quantité w sa valeur donnée par $(17)'$, et à ses dérivées, si elles existent, les valeurs que l'on obtiendrait en prenant les dérivées successives du deuxième membre de l'expression $(17)'$. Cependant, w n'étant qu'une première valeur approchée de l'inconnue y, on pourra faire usage de la relation différentielle proposée (14) pour obtenir, avec la plus grande exactitude possible, les dérivées cherchées à partir de la $\mu^{\text{ième}}$.

Pour ce qui concerne la fonction φ, nous avons, d'après $(14)'$,

$$
(23) \qquad \varphi(w) = \sum_\mu \frac{d^\sigma w}{dx^\sigma} H'_\sigma - \psi(x),
$$

en désignant ici par H'_σ la valeur que prend le coefficient H_σ quand on y remplace y par w; on peut éliminer la plus haute dérivée de w au moyen de l'équation réduite.

On obtient ensuite, en ne prenant la dérivée de $\varphi(y)$ que sur la variable y,

$$
\left(\frac{d\varphi(y)}{dx}\right) = \sum_\mu \frac{d^{\sigma+1}y}{dx^{\sigma+1}} H_\sigma + \sum_\mu \frac{d^\sigma y}{dx^\sigma}\left(\frac{dH_\sigma}{dx}\right);
$$

mais, en prenant aussi la dérivée totale sur la même fonction $\varphi(y)$, on a

$$\sum_\mu \frac{dy^{\sigma+1}}{dx^{\sigma+1}} H_\sigma + \sum_\mu \frac{dy^\sigma}{dx^\sigma}\frac{dH}{dx} - \frac{d\psi(x)}{dx} = 0,$$

par suite, en retranchant le premier membre de cette égalité du second membre de la précédente et changeant y en w, on obtient

$$(23)' \qquad \left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right) = \sum_\mu \frac{d^\sigma y}{dx^\sigma}\left[\left(\frac{dH'_\sigma}{dx}\right) - \frac{dH'_\sigma}{dx}\right] + \frac{d\psi(x)}{dx}.$$

En opérant de même, on a encore

$$(23)'' \qquad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{d^2\varphi(w)}{dx^2}\right) &= \sum_\mu 2\frac{d^{\sigma+1}w}{dx^{\sigma+1}}\left[\left(\frac{dH'_\sigma}{dx}\right) - \frac{dH_\sigma}{dx}\right] \\ &\quad + \sum_\mu \frac{d^\sigma w}{dx^\sigma}\left[\left(\frac{d^2H'_\sigma}{dx^2}\right) - \frac{d^2H'_\sigma}{dx^2}\right] + \frac{d^2\psi(x)}{dx^2}; \end{aligned}\right.$$

et ainsi de suite. D'après ce que nous venons de dire, les dérivées $\left(\frac{dH'_\sigma}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2H'_\sigma}{dx^2}\right)$, $\cdots$ ne subsistent qu'autant que le coefficient H'_σ contient la quantité w, puisque les dérivations ne sont effectuées ici que sur des fonctions de w [1]. Dans les sommes Σ, σ varie de zéro à μ.

Enfin, pour ce qui est de la valeur fondamentale w, l'équation réduite donne, d'après $(17)'$,

$$(24) \qquad \left\{ \begin{aligned} w &= \sum_\mu e^{m_\sigma x}\left[M_\sigma + N_\sigma \int \psi(x) e^{-m_\sigma x} dx\right], \\ \frac{dw}{dx} &= \sum_\mu m_\sigma e^{m_\sigma x}\left[M_\sigma + N_\sigma \int \psi(x) e^{-m_\sigma x} dx\right] + \sum_\mu N_\sigma \psi(x), \\ \frac{d^2w}{dx^2} &= \sum_\mu m_\sigma^2 e^{m_\sigma x}\left[M_\sigma + N_\sigma \int \psi(x) e^{-m_\sigma x} dx\right] \\ &\quad + \sum_\mu m_\sigma N_\sigma \psi(x) + \sum_\mu N_\sigma \frac{d\psi(x)}{dx}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right.$$

Ici l'indice σ varie de 1 à μ.

---

(1) Si les coefficients H' ne sont que des fonctions de w et si $\psi(x)$ est nul, les expressions $(23)'$, $(23)''$ sont nulles identiquement, et les expressions (22), $(22)'$, $(22)''$ ont leurs termes infinis, sauf le premier; dans ce cas il faut recourir, pour le calcul de l'inconnue, aux formules de la *génératrice neutre,* lesquelles sont les réduites de certaines fractions continues toujours convergentes.

Si la fonction $\psi(x)$ est se^{rx}, en faisant $r = m_0$, s et r étant des constantes, et posant

$$(25)\quad \begin{cases} M_0 = \dfrac{s}{h_\mu(m_0-m_1)(m_0-m_2)(m_0-m_3)\ldots(m_0-m_\mu)} \\ \quad = \dfrac{s}{h_\mu m_0^\mu + h_{\mu-1}m_0^{\mu-1}+\ldots+h_0}, \end{cases}$$

on a

$$(26)\quad \begin{cases} w = \sum_\mu e^{m_\sigma x}M_\sigma, \\ \text{et} \\ \dfrac{d^\nu w}{dx^\nu} = \sum_\mu m_\sigma^\nu e^{m_\sigma x}M_\sigma. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que cette expression de w et celles de ses dérivées rendent identique l'équation réduite

Dans ces dernières sommes, l'indice σ varie de zéro à μ. De même qu'il a été dit plus haut, on peut, à partir de la $\mu^{\text{ième}}$ dérivée, faire usage de la relation différentielle proposée pour calculer les dérivées des ordres supérieurs, de préférence aux relations précédentes (24) ou (26), afin d'obtenir un plus haut degré d'approximation.

On doit remarquer que la valeur moyenne de la fonction cherchée $F(y)$ est donnée exactement par l'équation réduite (19); il en résulte que, pour la valeur moyenne de y, l'expression (22) se réduit à son premier terme, et tous les autres sont nuls. Pour les valeurs voisines de la valeur moyenne de l'inconnue, l'expression (22) est très convergente, et cette convergence diminue généralement à mesure que la valeur de y s'éloigne de cette valeur particulière. La valeur moyenne doit donc être choisie de telle sorte qu'elle corresponde, autant que possible, à la moyenne des variations de la fonction cherchée; la convergence de l'expression (22) se trouve ainsi à peu près la même pour les valeurs extrêmes considérées p et q de x. Quant au nombre de termes que l'on doit prendre pour obtenir la quantité cherchée, il dépend à la fois de l'approximation que l'on veut obtenir et de la variation des valeurs de y par rapport à sa valeur moyenne. Si, pour certaines valeurs assez éloignées de cette dernière, l'expression (22) n'était plus suffisamment convergente, ou même était divergente, il faudrait avoir recours aux formules (10) et (11) de la *génération neutre* (*voir* la Note de janvier 1881), ou à la méthode d'exhaustion, ou encore à ces deux moyens à la fois.

Ici l'application de la méthode d'exhaustion se présente plutôt comme un simple procédé que comme une véritable méthode; nous conservons cependant le nom de *méthode d'exhaustion*, à cause de son origine.

Pour indiquer que l'on fait usage de la méthode d'exhaustion, nous écrirons l'expression (22) de la manière suivante :

$$(27) \qquad F(y) = F(w) - \varphi(w, \omega) \frac{1}{\left(\frac{d\varphi(w, \omega)}{dx}\right)} \left(\frac{dF(w)}{dx}\right) + \cdots,$$

et l'on donnera à ω une valeur convenable comprise entre zéro et l'unité.

Si $\omega < 1$, $F(y)$ n'est plus alors la quantité cherchée, mais cette fonction doit être considérée comme étant une nouvelle valeur fondamentale $F(w_1)$. On calculera donc les dérivées $\frac{dF(w_1)}{dx}, \frac{d^2F(w_1)}{dx^2}, \ldots$, et, en donnant à ω, que nous désignerons spécialement ici par ω_1, une valeur plus grande que la première fois, on reportera la fonction $F(w_1)$ et ses dérivées dans l'expression (27), et l'on obtiendra une nouvelle valeur $F(w_2)$ sur laquelle on opérera comme on vient de le faire sur $F(w_1)$, à moins que l'on ait pu faire $\omega_1 = 1$, car dans ce cas $F(w_1)$ n'est autre que $F(y)$.

Détermination des constantes. — Nous venons de donner toutes les expressions nécessaires pour obtenir la valeur de la fonction cherchée avec autant d'approximation qu'on peut le désirer; il ne nous reste plus qu'à déterminer les constantes d'intégration et les valeurs dites *moyennes*.

Admettons que ces valeurs moyennes diffèrent des valeurs initiales, qui fixent les constantes d'intégration; la valeur initiale a de x correspondant aux valeurs respectives de y et de ses $\mu - 1$ premières dérivées $b, b', b'', \ldots, b^{(\mu-1)}$, fait connaître la quantité $F(b), \frac{dF(b)}{da}, \ldots$; les expressions précédentes (22) et (22)' nous donnent alors, au moyen de la valeur fondamentale w qui contient les μ constantes $M_1, M_2, \ldots, M_\mu$,

μ relations qui serviront à déterminer ces constantes. Ces relations sont μ équations transcendantes, primitives, simultanées, en prenant dans les expressions (22) et (22)$'$ autant de termes qu'il en faut pour avoir une approximation suffisante. Ce système peut être résolu comme nous l'indiquerons plus loin.

Connaissant donc les valeurs des constantes, qui sont fonctions des valeurs moyennes, si nous faisons, pour la valeur moyenne α de x, $\gamma = \beta$ et $\frac{d^\sigma(\beta)}{dx^\sigma} = \beta^{(\sigma)}$, nous aurons à déterminer les quantités $\beta, \beta',$ $\beta'', \ldots, \beta^{(\mu)}$, au moyen des expressions (22)$''$. Mais ici ces expressions se réduisent à la valeur fondamentale donnée par l'équation réduite et à ses dérivées, et ces quantités contiennent explicitement les valeurs des constantes, lesquelles seront remplacées par leurs expressions en $\alpha, \beta, \beta', \ldots,$ que nous supposons maintenant connues; nous avons donc encore à résoudre un système de μ équations primitives comme précédemment. Il est à remarquer que la dérivée $\beta^{(\mu)}$ est généralement donnée par l'équation proposée même.

Ces résolutions successives sont possibles, bien qu'elles entraînent à des calculs très compliqués, mais on peut toujours les éviter. Pour cela, on peut prendre, dans la plupart des cas, les valeurs initiales pour valeurs moyennes : alors, le premier système d'équations simultanées se réduisant aux expressions provenant de l'équation réduite, les μ constantes sont données par la résolution de simples équations linéaires.

Dans le cas où, pour la suite des calculs, il conviendrait de prendre les valeurs moyennes différentes des valeurs initiales, on peut, pour commencer, confondre ces deux systèmes de valeurs ainsi que nous venons de le faire, et ensuite calculer comme une valeur quelconque les valeurs particulières de γ et de ses dérivées qui sont les véritables valeurs moyennes, puis considérer ces nouvelles quantités à la fois comme nouvelles valeurs initiales et comme valeurs moyennes, de telle sorte que les nouvelles constantes seront encore déterminées par un système d'équations linéaires simultanées. Ainsi, il est toujours possible de déterminer les constantes d'intégration et les valeurs moyennes par la résolution de simples équations du premier degré, et par le calcul ordinaire de quantités inconnues au moyen de la méthode secondaire.

Il faut encore remarquer que, puisqu'il n'y a que le changement des valeurs moyennes qui distingue les deux systèmes d'équations linéaires dont nous venons de parler, il n'y a qu'à substituer les secondes valeurs moyennes dans le premier système d'équations du premier degré pour obtenir le second, de sorte qu'en réalité on n'a qu'un seul système d'équations linéaires à résoudre.

Telle est, dans ses principaux détails, l'exposition de la Méthode secondaire élémentaire, appliquée aux équations différentielles dont l'inconnue ne dépend que d'une seule variable. Quelques exemples éclairciront complètement ce qui précède.

Deuxième exemple. — Soit à déterminer deux fonctions y et z données par les relations

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} dy = -pyz\,dx + m\,dx, \\ dz = -qyz\,dx + n\,dx, \end{cases}$$

où les quantités m, n, p, q sont des constantes.

En éliminant le produit yz on obtient

$$p\,dz - q\,dy = (pn - qm)\,dx.$$

Si pour $x = a$ on a $y = b$, $z = c$, l'intégration de cette équation donne

$$(\beta) \qquad p(z - c) - q(y - b) = (pn - qm)(x - a).$$

Cette relation permet d'éliminer y ou z de l'une des équations proposées (α) et l'on a

$$(\gamma) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = [(qm - pn)(x - a) - q(y - b) - cp]\,y + m, \\[2mm] \dfrac{dz}{dx} = [(pn - qm)(x - a) - p(z - c) - bq]\,z + n. \end{cases}$$

Il suffit d'intégrer la première équation, et l'équation (β) donnera la valeur de la seconde inconnue en fonction de la première.

Formation de l'équation réduite. — Formons l'équation réduite de la première équation (γ); on voit facilement que cette équation peut être résolue par les procédés ordinaires dans plusieurs cas particuliers.

Si les quantités m, q, $(qm-pn)$ ou pn sont nulles ensemble ou séparément, il est possible d'intégrer l'équation proposée et de former, dans chacune de ces circonstances, autant d'équations réduites; examinons ces différents cas :

1° Supposons que le terme en m soit nul dans l'équation réduite, nous pourrons obtenir l'équation transformée de la manière suivante :

$$(\delta)\qquad \frac{dy}{dx}=[(qm-pn)(x-a)-q(y-b)-cp]y+m\omega.$$

Pour $\omega=0$, l'équation donne la valeur fondamentale

$$(\delta)'\qquad w=b\frac{e^{\mathrm{P}}}{bq\int_a^x e^{\mathrm{P}}dx+1},$$

en faisant

$$(\delta)''\qquad \mathrm{P}=\tfrac{1}{2}(qm-pn)(x-a)^2+(bq-cp)(x-a).$$

On peut parvenir à cette intégration, qui est des plus simples, en posant $y=uv$, et l'on détermine les deux fonctions de x, u et v, de telle sorte que l'intégration soit possible. Il en serait de même pour les intégrations suivantes.

2° Transformons l'équation de manière que l'équation réduite ne contienne pas de terme en y^2; en désignant par α et β les valeurs moyennes respectives de x et de y, on peut écrire l'équation transformée

$$(\varepsilon)\qquad \frac{dy}{dx}=\left\{(qm-pn)(x-a)-q\left[\beta\left(\frac{y}{\beta}\right)^{\omega}-b\right]-cp\right\}y+m;$$

pour $\omega=0$, on a

$$(\varepsilon)'\qquad w=e^{\mathrm{P}}\left(b+m\int_a^x e^{-\mathrm{P}}dx\right),$$

en faisant

$$(\varepsilon)''\qquad \mathrm{P}=\tfrac{1}{2}(qm-pn)(x-a)^2+[(b-\beta)q-cp](x-a).$$

3° Faisons en sorte que la variable x n'existe pas dans l'équation réduite; en remplaçant x par sa valeur moyenne α, on a pour équation transformée

$$(\zeta)\qquad \frac{dy}{dx} = \left\{(qm - pn)\left[\alpha\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\omega} - a\right] - q(y-b) - cp\right\}y + m;$$

pour $\omega = 0$, on a

$$(\zeta)'\qquad w = \frac{Q+R}{2q} + \frac{R e^{Rx}}{CR e^{Rx} - q},$$

en faisant

$$(\zeta)''\qquad \begin{cases} Q = bq - cp + (\alpha - a)(qm - pn), \\ R = \pm\sqrt{Q^2 + 4qm}, \\ C = \dfrac{q}{R e^{Ra}}\,\dfrac{2bq - Q - R + 2R e^{Ra}}{2bq - Q - R}. \end{cases}$$

Cette constante est déterminée par les mêmes conditions que plus haut.

4° Si nous voulons ramener l'équation au cas où l'on a $pn = 0$, écrivons l'équation transformée de la manière suivante

$$(\eta)\qquad \frac{dy}{dx} = [(qm - pn\omega)(x-a) - q(y-b) - cp]y + m;$$

pour $\omega = 0$, on obtient

$$(\eta)'\qquad w = m(x-a) + \frac{1}{q}(bq - cp) + \frac{cp}{q}\,\frac{(cp - bq)e^{-P}}{cp\left(1 + \int_a^x e^{-P}dx\right) - bq},$$

en faisant

$$(\eta)''\qquad P = \tfrac{1}{2}qm(x-a)^2 + (bq - cp)(x-a).$$

On voit, par ces diverses manières de former l'équation réduite, que les valeurs fondamentales conduiraient à une expression de l'inconnue y très convergente, dans les cas où les coefficients de l'équation proposée se rapprocheraient suffisamment des suppositions que nous avons faites, parce qu'alors l'équation réduite différerait très peu de l'équation proposée. Cependant les solutions que nous venons d'examiner sont compliquées, et toutes, sauf l'une d'elles, exigent que l'on effectue des quadratures pour obtenir la valeur fondamentale; ces quadratures, que l'on pourrait effectuer par un moyen quelconque, ou par la méthode secondaire même, conduiraient à un calcul assez long.

Il est donc avantageux de ne pas faire usage de ces solutions et de former l'équation réduite avec des coefficients constants ([1]).

Posons donc

$$(\theta)\qquad \begin{cases} \mathrm{H} = (qm - pn)(x - a) - q(y - b) - cp, \\ h = (qm - pn)(\alpha - a) - q(\beta - b) - cp, \end{cases}$$

en désignant toujours par α et β les valeurs moyennes; nous aurons pour équation transformée

$$(\theta)' \qquad \frac{dy}{dx} = h\left(\frac{\mathrm{H}}{h}\right)^{\omega} y + m,$$

ou

$$(\theta)'' \qquad \frac{dy}{dx} = \{h + [(qm - pn)(x - \alpha) - q(y - \beta)]\,\omega\}\,y + m,$$

et pour $\omega = 0$ nous aurons l'équation réduite

$$(\iota) \qquad \frac{dy}{dx} = hy + m;$$

par suite, la valeur fondamentale est

$$(\varkappa) \qquad \varpi = \mathrm{C}\,e^{hx} - \frac{m}{h},$$

C étant la constante d'intégration.

Calcul de l'inconnue. — Or, si nous supposons que les valeurs

---

([1]) Nous ne considérons ici que la forme des équations réduites; mais il y a une considération plus importante basée sur la nature de la solution, c'est-à-dire qu'il faut savoir d'abord si l'on obtient ainsi une intégrale générale ou une intégrale singulière, et ensuite quelle est l'intégrale qui convient. Nous examinerons ceci plus loin, lors du calcul numérique.

moyennes α et β se confondent avec les valeurs initiales a et b, on a

$$h = -cp,$$

et la constante est déterminée par la relation

$$b = \frac{m}{cp} + C e^{-acp},$$

qui donne

$$(\varkappa)' \qquad C = \left(b - \frac{m}{cp}\right) e^{acp};$$

par suite, l'expression de w est

$$(\lambda) \qquad w = \left(b - \frac{m}{cp}\right) e^{cp(a-x)} + \frac{m}{cp}.$$

Maintenant, pour appliquer l'expression (22), dans laquelle $F(y)$ devient y, c'est-à-dire

$$(\mu) \quad \left\{ \begin{aligned} y = w &- \frac{\varphi(w)}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)} \frac{dw}{dx} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{[\varphi(w)]^2}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)^3} \left[\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right) \frac{d^2w}{dx^2} - \left(\frac{d^2\varphi(w)}{dx^2}\right) \frac{dw}{dx} \right] - \dots, \end{aligned} \right.$$

il reste à calculer les dérivées de w, ainsi que celles de $\varphi(w)$.

Nous avons pour les dérivées de w prises sur l'expression $(\varkappa)$

$$(\nu) \qquad \frac{d^\sigma w}{dx^\sigma} = C h^\sigma e^{hx}.$$

Ensuite la fonction $\varphi(w)$ étant

$$\varphi(w) = \frac{dw}{dx} - [(qm - pn)(x-a) - q(w-b) - cp]\, w - m,$$

on obtient, en remplaçant la dérivée de w par sa valeur,

$$(\xi) \qquad \varphi(w) = -[(qm - pn)(x-a) - q(w-b)]\, w;$$

puis les expressions $(23)'$ et $(23)''$ donnent ici

$$(\xi)' \qquad \left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right) = (qm - pn)w,$$

$$(\xi)'' \qquad \left(\frac{d^2\varphi(w)}{dx^2}\right) = 2(qm - pn)\frac{dw}{dx},$$

d'où l'on tire

$$(o) \quad \left\{ \begin{aligned} y &= w + \frac{(qm - pn)(x - a) - q(w - b)}{qm - pn}\frac{dw}{dx} \\ &\quad + \frac{1}{2}\,\frac{[(qm - pn)(x - a) - q(w - b)]^2\left[\left(w\frac{d^2w}{dx^2}\right) - 2\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]}{w(qm - pn)^2}. \end{aligned} \right.$$

Telle est l'expression de l'inconnue; il ne reste plus qu'à remplacer w par sa valeur tirée de (λ).

Transformations relatives à la convergence. — Cette expression, calculée avec les trois premiers termes de (μ), peut ne pas être assez convergente, pour certaines valeurs de x; afin d'obtenir une plus grande approximation de l'inconnue sans calculer un quatrième terme, on peut transformer l'expression (o) au moyen des formules (10) et (11) de la génération neutre ou appliquer la méthode d'exhaustion.

En premier lieu, les formules (11) donnent

$$y = w + \frac{A_1^2\varphi(w)}{A_1 - A_2\varphi(w)};$$

et les formules (10) donnent pour A_1 et A_2,

$$A_1 = -\frac{dw}{d\varphi(w)}$$

$$A_2 = -\frac{d^2\varphi(w)\,dw}{2[d\varphi(w)]^3},$$

ou encore, par suite du changement des différentielles en dérivées,

$$A_1 = -\frac{1}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)}\frac{dw}{dx},$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)^3}\left[\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)\frac{d^2w}{dx^2} - \left(\frac{d^2\varphi(w)}{dx^2}\right)\frac{dw}{dx}\right].$$

D'après les expressions (ξ), $(\xi)'$, $(\xi)''$, on obtient donc

$$A_1 = \frac{-\varpi'}{(qm-pn)\varpi},$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\frac{\varpi\varpi''-2\varpi'^2}{(qm-pn)^2\varpi^3},$$

d'où

$$(\pi)\quad y = \varpi - \frac{\varpi\varpi'^2[(qm-pn)(x-a)-q(\varpi-b)]}{\varpi\varpi'(qm-pn)+\frac{1}{2}(\varpi\varpi''-2\varpi'^2)[(qm-pn)(x-a)-q(\varpi-b)]}.$$

Telle est l'expression de l'inconnue sous sa deuxième forme; il resterait encore à remplacer ϖ par sa valeur (λ).

En second lieu, l'application de la méthode d'exhaustion conduit à l'emploi de l'expression (27) sous la forme suivante

$$(\varpi)\qquad y = \varpi - \frac{\varphi(\varpi,\omega)}{\left(\frac{d\varphi(\varpi,\omega)}{dx}\right)}\frac{d\varpi}{dx}+\cdots.$$

On a calculé les dérivées $\frac{d\varpi}{dx}, \frac{d^2\varpi}{dx^2}, \cdots$; il ne reste qu'à obtenir celles de la fonction $\varphi(\varpi,\omega)$. Mais l'équation transformée a été mise sous deux formes différentes $(\theta)'$ et $(\theta)''$; voyons les résultats auxquels conduisent ces deux formes.

Considérons d'abord la deuxième forme θ''

$$\varphi(y,\omega) = \frac{dy}{dx} - \{h+[(qm-pn)(x-\alpha)-q(y-\beta)]\,\omega\}\,y - m = 0,$$

et ne prenons que les deux premiers termes de l'expression qui précède, ce qui suffit pour montrer l'application de la méthode.

Posons

$$(qm-pn)(x-\alpha)+\beta q = \mathrm{K};$$

la fonction $\varphi(\varpi,\omega)$ devient

$$(\rho)\qquad \varphi(\varpi,\omega) = \varpi(q\varpi-\mathrm{K})\,\omega.$$

La première dérivée est

$$(\rho)'\qquad \left(\frac{d\varphi(\varpi,\omega)}{dx}\right) = (qm-pn)\,\omega.$$

Par suite, la valeur de y devient

$$(\rho)'' \qquad y = \varpi - \frac{\varpi(q\varpi - K)}{qm - pn}\frac{d\varpi}{dx} + \cdots;$$

la quantité ω se trouvant éliminée, la transformation $(\theta)''$ ne permet pas d'appliquer la méthode d'exhaustion; nous verrons la raison de cette élimination dans la méthode secondaire systématique.

Examinons maintenant la transformation $(\theta)'$; nous avons

$$\varphi(\varpi, \omega) = \frac{d\varpi}{dx} - h\left(\frac{H'}{h}\right)^{\omega}\varpi - m,$$

ou

$$(\sigma) \qquad \varphi(\varpi, \omega) = \varpi h\left[1 - \left(\frac{H'}{h}\right)^{\omega}\right].$$

La dérivée première est

$$(\sigma)' \qquad \left(\frac{d\varphi(\varpi, \omega)}{dx}\right) = \omega\left(\frac{H'}{h}\right)^{\omega-1}(qm - pn)\varpi,$$

et la première valeur approchée de y, ϖ_1, est alors

$$(\sigma)'' \qquad \varpi_1 = \varpi - \frac{h\left[1 - \left(\frac{H'}{h}\right)^{\omega}\right]}{\omega\left(\frac{H'}{h}\right)^{\omega-1}(qm - pn)}\frac{d\varpi}{dx}.$$

Pour obtenir une seconde valeur plus approchée ϖ_2 de l'inconnue y, suivant la valeur que l'on donnera à la seconde quantité arbitraire ω, on devra faire encore usage de l'expression (ϖ), dans laquelle on substituera ϖ_1 à ϖ. A cet effet, les dérivées $\frac{d\varpi_1}{dx}$, $\frac{d^2\varpi_1}{dx^2}$, $\cdots$ doivent être calculées au moyen de l'expression $(22)''$, c'est-à-dire

$$\frac{d\varpi_1}{dx} = \frac{d\varpi}{dx} - \frac{\varphi(\varpi_1\omega)}{\left(\frac{d\varphi(\varpi_1\omega)}{dx}\right)}\frac{d^2\varpi}{dx^2} + \cdots,$$

autrement

$$(\sigma)''' \qquad \frac{d\varpi_1}{dx} = \frac{d\varpi}{dx} - \frac{h\left[1 - \left(\frac{H'}{h}\right)^{\omega}\right]}{\omega\left(\frac{H'}{h}\right)^{\omega-1}(qm - pn)}\frac{d^2\varpi}{dx^2} + \cdots,$$

en faisant

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = h\left(\frac{H'}{h}\right)^{\omega} \frac{dw}{dx} + \omega\left(\frac{H'}{h}\right)^{\omega-1}\left(qm - pn - q\frac{dw}{dx}\right) w.$$

Quant aux valeurs de $\varphi(w_1, \omega_1)$ et de ses dérivées, elles se calculent comme plus haut. Supposons $\omega_1 = 1$, pour avoir, à cette seconde approximation, la valeur de l'inconnue y, nous aurons

$$(\sigma)^{\text{IV}} \quad y = w_1 - \frac{\frac{dw_1}{dx} - [(qm - pn)(x - a) - q(w_1 - b) - cp] w_1 - m}{w_1(qm - pn)} \frac{dw_1}{dx},$$

en déterminant w_1 et $\frac{dw_1}{dx}$, d'après $(\sigma)''$ et $(\sigma)'''$.

Troisième exemple. — Prenons encore un exemple d'intégration : soit l'équation du troisième ordre, citée par Wronski dans le Tome I[er] de la *Réforme*,

$$(\alpha) \qquad x\frac{d^3 y}{dx^3} - 3y^2\frac{dy}{dx} + x^3 y^5 \frac{d^2 y}{dx^2}\frac{dy}{dx} = 0.$$

L'équation transformée peut s'écrire, d'après Wronski,

$$(\beta) \qquad \frac{d^3 y}{dx^3} + \left(x^2 y^5 \frac{dy}{dx}\right)^{\omega} \frac{d^2 y}{dx^2} - 3\left(\frac{y^2}{x}\right)^{\omega} \frac{dy}{dx} = 0,$$

et, faisant $\omega = 0$, on obtient l'équation réduite

$$(\gamma) \qquad \frac{d^3 w}{dx^3} + \frac{d^2 w}{dx^2} - 3\frac{dw}{dx} = 0.$$

On peut admettre que les valeurs initiales se confondent avec les valeurs moyennes, et que l'on ait pour

$$(\gamma)' \qquad x = 1, \quad y = 1, \quad \frac{dy}{dx} = 1 \quad \text{et de même} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = 1.$$

L'équation caractéristique

$$(\delta) \qquad b^3 + b^2 - 3b = 0$$

donne une racine nulle, et les autres sont

$$(\delta)' \qquad \beta = -\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{13}\right) \quad \text{et} \quad \mathfrak{b} = -\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{13}\right);$$

par suite, C_1, C_2, C_3 étant les constantes d'intégration, il vient

$$(\varepsilon) \qquad \left\{\begin{aligned} w &= C_1 + C_2 e^{\beta x} + C_3 e^{\mathfrak{b} x},\\ \frac{dw}{dx} &= C_2\beta\, e^{\beta x} + C_3 \mathfrak{b}\, e^{\mathfrak{b} x},\\ \frac{d^2w}{dx^2} &= C_2\beta^2 e^{\beta x} + C_3\mathfrak{b}^2 e^{\mathfrak{b} x},\\ \frac{d^3w}{dx^3} &= C_2\beta^3 e^{\beta x} + C_3\mathfrak{b}^3 e^{\mathfrak{b} x},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

D'après les conditions qui précèdent, on a, pour la détermination des constantes, les équations

$$\begin{aligned} 1 &= C_1 + C_2 e^{\beta} + C_3 e^{\mathfrak{b}},\\ 1 &= C_2\beta e^{\beta} + C_3\mathfrak{b} e^{\mathfrak{b}},\\ 1 &= C_2\beta^2 e^{\beta} + C_3\mathfrak{b}^2 e^{\mathfrak{b}}, \end{aligned}$$

d'où

$$(\varepsilon)' \qquad \left\{\begin{aligned} C_1 &= \frac{(\beta-1)(\mathfrak{b}-1)}{\beta\mathfrak{b}},\\ C_2 &= \frac{\mathfrak{b}-1}{\beta(\mathfrak{b}-\beta)e^{\beta}},\\ C_3 &= \frac{\beta-1}{\mathfrak{b}(\beta-\mathfrak{b})e^{\mathfrak{b}}}. \end{aligned}\right.$$

Formons maintenant les quantités $\varphi(w)$, $\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)$, $\ldots$, l'équation proposée donne

$$\varphi(w) = \frac{d^3w}{dx^3} + x^2w^5\frac{dw}{dx}\frac{d^2w}{dx^2} - 3\frac{w^2}{x}\frac{dw}{dx},$$

et l'équation réduite permet d'éliminer la dérivée troisième de w; on a donc

$$(\zeta) \qquad \varphi(w) = \left(x^2w^5\frac{dw}{dx} - 1\right)\frac{d^2w}{dx^2} - 3\left(\frac{w^2}{x} - 1\right)\frac{dw}{dx}.$$

D'après (23)', on a aussi

$$(\eta)\qquad \left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right) = -\,2xw^5\frac{dw}{dx}\frac{d^2w}{dx^2} - 3\frac{w^2}{x^2}\frac{dw}{dx},$$

d'où

$$(\theta)\qquad y = w + \frac{\left(x^2w^5\dfrac{dw}{dx} - 1\right)\dfrac{d^2w}{dx^2} - 3\left(\dfrac{w^2}{x} - 1\right)\dfrac{dw}{dx}}{2xw^5\dfrac{dw}{dx}\dfrac{d^2w}{dx^2} - 3\dfrac{w^2}{x^2}\dfrac{dw}{dx}} + \cdots,$$

les dérivées de w étant déterminées par (ε).

Introduction d'une fonction arbitraire. — On pourrait maintenant appliquer la méthode d'exhaustion comme nous l'avons fait plus haut, mais ici le calcul serait pénible, à cause de la complication de l'expression précédente; il devient alors utile de recourir à un autre moyen pour rendre cette expression plus convergente. A cet effet, nous pouvons utiliser les fonctions arbitraires; il est visible alors que, si nous prenons pour fonction arbitraire l'exponentielle e^{rx}, introduite comme nous l'avons montré dans l'équation (18), nous aurons pour w une expression de la même forme que plus haut, (ε), avec une exponentielle de plus. Nous pouvons donc disposer de la constante r de telle sorte que la nouvelle valeur fondamentale w soit plus rapprochée de la fonction inconnue y que celle que nous venons d'obtenir (θ).

Nous prendrons ainsi pour équation transformée

$$(\iota)\qquad \frac{d^3y}{dx^3} + \left(x^2y^5\frac{dy}{dx}\right)^{\omega}\frac{d^2y}{dx^2} - \left(3\frac{y^2}{x}\right)^{\omega}\frac{dy}{dx} = (1-\omega)e^{rx},$$

de sorte que l'équation réduite devient

$$(\varkappa)\qquad \frac{d^3w}{dx^3} + \frac{d^2w}{dx^2} - 3\frac{dw}{dx} = e^{rx},$$

et la valeur fondamentale est

$$(\varkappa)'\qquad w = C_1 + C_2e^{\beta x} + C_3e^{\delta x} + Re^{rx},$$

en faisant

$$(\varkappa)'' \qquad R = \frac{1}{r(r-\beta)(r-6)}.$$

On peut donner à r la valeur -6, ce qui conduit à

$$(\varkappa)''' \qquad R = \frac{-1}{26^2(6+\beta)}.$$

Quant aux valeurs des constantes, elles sont, quels que soient r et R,

$$(\lambda) \qquad \left\{ \begin{aligned} C_1 &= \frac{(\beta-1)(6-1)+Rr(\beta+6+r)e^r}{\beta 6}, \\ C_2 &= \frac{6-1+Rr(r-6)e^r}{\beta(6-\beta)e^\beta}, \\ C_3 &= \frac{\beta-1+Rr(r-\beta)e^r}{6(\beta-6)e^6}. \end{aligned} \right.$$

La fonction arbitraire modifie peu le calcul des constantes, car l'équation réduite ne diffère, pour la valeur initiale de l'équation proposée, que par la dérivée d'ordre le plus élevé entrant dans l'équation et par celles des ordres supérieurs.

Les valeurs de la fonction $\varphi(\varpi)$ et de sa première dérivée sont

$$(\mu) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varphi(\varpi) &= \left(x^2\varpi^5\frac{d\varpi}{dx}-1\right)\frac{d^2\varpi}{dx^2} - 3\left(\frac{\varpi^2}{x}-1\right)\frac{d\varpi}{dx} + e^{rx}, \\ \left(\frac{d\varphi(\varpi)}{dx}\right) &= -2x\varpi^5\frac{d\varpi}{dx}\frac{d^2\varpi}{dx^2} - 3\frac{\varpi^2}{x^3}\frac{d\varpi}{dx} + re^{rx}, \end{aligned} \right.$$

d'où

$$(\nu) \qquad y = \varpi + \frac{\left(x^2\varpi^5\frac{d\varpi}{dx}-1\right)\frac{d^2\varpi}{dx^2} - 3\left(\frac{\varpi^2}{x}-1\right)\frac{d\varpi}{dx} + e^{rx}}{2x\varpi^5\frac{d\varpi}{dx}\frac{d^2\varpi}{dx^2} + 3\frac{\varpi^2}{x^2}\frac{d\varpi}{dx} - re^{rx}} + \cdots$$

En comparant cette expression (ν) à la précédente (θ), on voit qu'il est possible de déterminer la quantité r de telle sorte que la nouvelle valeur fondamentale ϖ représente mieux la fonction inconnue y que la première. Pour cela, il suffit d'égaler la quantité Re^{rx} au second terme de l'expression de y donnée par (θ), que nous représenterons, pour abréger, par $f(x)$, et de déterminer la valeur la plus convenable de r satisfaisant à l'équation

$$e^{rx} = r(r-\beta)(r-\text{б})f(x),$$

dans les limites que l'on se sera assignées. On aura, de cette manière, la valeur de $(\varkappa)'$ de w, et l'on calculera ensuite facilement l'expression (ν) de y, puisqu'il suffit d'ajouter un nouveau terme aux termes déjà calculés de w et de ses dérivées.

Dans certains cas, ce moyen assez rapide, permettant d'obtenir des valeurs approchées de l'inconnue, devra être préféré à la méthode d'exhaustion.

L'équation caractéristique (δ) ayant toutes ses racines réelles, il n'est pas nécessaire de faire intervenir les sinus; cependant, comme il peut être utile de reconnaître certaines transformations, nous allons introduire les sinus hyperboliques dans la valeur fondamentale w.

On a généralement

$$\cos x = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$
$$\sin x = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x});$$

on en conclut

$$(\xi) \qquad \left\{ \begin{aligned} w = {} & C_1 + C_2(\cos\beta x + \sin\beta x) \\ & + C_3(\cos\text{б}x + \sin\text{б}x) + R(\cos rx + \sin rx); \end{aligned} \right.$$

de plus, si l'on met les racines β et б sous la forme

$$\beta = -a - b, \quad \text{б} = -a + b,$$

en faisant $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{2}\sqrt{13}$, on a, d'après la valeur $(\varkappa)'''$ choisie pour r:

$$r = a - b,$$

ce qui donne, en développant l'expression (ξ),

$$(\xi)' \qquad \left\{ \begin{aligned} w = C_1 & + (C_2 + C_3 + R)\cos ax \cos bx \\ & - (C_2 - C_3 + R)\cos ax \sin bx \\ & - (C_2 + C_3 - R)\sin ax \cos bx \\ & + (C_2 - C_3 - R)\sin ax \sin bx, \end{aligned} \right.$$

Il est inutile de poursuivre davantage ces calculs : l'équation proposée n'a aucune signification par elle-même; elle a été remise autrefois à Wronski pour défier ce géomètre. L'équation (α) n'offre d'autre intérêt que celui de nous avoir conduit à des transformations importantes qui se reproduisent dans les ordres plus élevés, et qui indiquent alors l'emploi des sinus d'ordres supérieurs, comme nous devrions le montrer maintenant. Mais, pour donner les applications de ces sinus, nous serions obligé d'en faire connaître certaines propriétés, ce qui nous entraînerait à une digression beaucoup trop longue; c'est pourquoi nous laisserons de côté ces applications pour l'instant, d'autant plus qu'elles ne sont pas indispensables dans la méthode dont nous nous occupons; elles le seront, au contraire, quand il s'agira de la méthode systématique.

Nous allons continuer ces intégrations en prenant pour exemple une équation contenant des différences, puis une équation aux dérivées partielles à coefficients variables; nous ferons aussi des applications numériques.