JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

APPELL

Sur les fonctions hypergéométriques de deux variables

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 8 (1882), p. 173-216.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1882_3_8__173_0>

Sur les fonctions hypergéométriques de deux variables [1];

PAR M. APPELL.

1. La liaison intime qu'il y a entre les fonctions sphériques et la série hypergéométrique de Gauss est bien connue, et se trouve particulièrement mise en évidence dans le savant Ouvrage que M. Heine a publié sur ces fonctions.

Je me suis proposé de rattacher, de la même façon, les polynômes $\frac{d^{m+n}(1-x^2-y^2)^{m+n}}{dx^m\,dy^n}$ de M. Hermite à des fonctions de deux variables analogues à la série de Gauss. J'ai été ainsi conduit à considérer quatre fonctions nouvelles qui, à divers titres, doivent être regardées comme des généralisations de la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$.

L'étude de ces fonctions, leur définition par des équations différentielles linéaires simultanées, leur représentation par des intégrales définies forment, respectivement, l'objet des trois premiers Chapitres du présent Mémoire.

Le quatrième et dernier Chapitre est consacré à l'étude de fonctions satisfaisant à une équation différentielle linéaire du deuxième ordre aux dérivées partielles, équation qui comprend, comme cas particulier, celle des fonctions Y_n de Laplace, et qui fournit ainsi une extension intéressante des principales propriétés de ces fonctions.

Qu'il me soit permis de remercier ici M. Heine, dont les conseils et

(1) Ce Mémoire a été présenté à l'Académie des Sciences dans la séance du 29 mars 1880; je lui ai fait subir quelques modifications, afin d'y faire rentrer les résultats que j'ai obtenus depuis et qui ont été indiqués dans deux Notes présentées à l'Académie les 26 avril et 16 août 1880.

les encouragements bienveillants m'ont été d'un grand secours dans ce travail ([1]).

CHAPITRE I.

2. Soient k un entier positif, λ une quantité quelconque; je désigne le produit

$$\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k-1)$$

par (λ, k), et je conviens que $(\lambda, 0)=1$. Les séries les plus simples qu'il convient de considérer comme généralisation de la série hypergéométrique de Gauss sont les suivantes :

$$(1)\quad \begin{cases} F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma,x,y) = \sum \dfrac{(\alpha,m+n)(\beta,m)(\beta',n)}{(\gamma,m+n)(1,m)(1,n)}x^m y^n, \\ F_2(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma',x,y) = \sum \dfrac{(\alpha,m+n)(\beta,m)(\beta',n)}{(\gamma,m)(\gamma',n)(1,m)(1,n)}x^m y^n, \\ F_3(\alpha,\alpha',\beta,\beta',\gamma,x,y) = \sum \dfrac{(\alpha,m)(\alpha',n)(\beta,m)(\beta',n)}{(\gamma,m+n)(1,m)(1,n)}x^m y^n, \\ F_4(\alpha,\beta,\gamma,\gamma',x,y) = \sum \dfrac{(\alpha,m+n)(\beta,m+n)}{(\gamma,m)(\gamma',n)(1,m)(1,n)}x^m y^n, \end{cases}$$

la sommation s'étendant aux valeurs entières de m et n de zéro à l'infini. Voici comment on peut former ces fonctions (1). Soit

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(\alpha,m)(\beta,m)}{(\gamma,m)(1,m)}x^m$$

la série de Gauss. Formons le produit $F(\alpha,\beta,\gamma,x).F(\alpha',\beta',\gamma',y)$; le terme général de ce produit est

$$\frac{(\alpha,m)(\alpha',n)(\beta,m)(\beta',n)}{(\gamma,m)(\gamma',n)(1,m)(1,n)}x^m y^n.$$

Remplaçons dans ce terme général certains produits tels que (α,m) (α',n) par $(\alpha,m+n)$ de toutes les manières possibles; nous obtiendrons les

---

([1]) Depuis que ces lignes sont écrites, la mort a enlevé M. Heine à la science; je me fais un devoir de rendre un dernier hommage à sa mémoire termes généraux des séries (1). La combinaison $\frac{(\alpha, m+n)(\beta, m+n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)} x^m y^n$ ne donne pas une série nouvelle; elle donne la série $F(\alpha, \beta, \gamma, x+y)$.

En suivant la même règle, on pourra déduire, des séries hypergéométriques d'une variable de tous les ordres, des séries analogues de deux variables.

Les séries (1) peuvent s'écrire de la façon suivante, où elles sont ordonnées par rapport à x :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) &= \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(\alpha, m)(\beta, m)}{(\gamma, m)(1, m)} F(\alpha+m, \beta', \gamma+m, y) x^m,\\
F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y) &= \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(\alpha, m)(\beta, m)}{(\gamma, m)(1, m)} F(\alpha+m, \beta', \gamma', y) x^m,\\
F_3(\alpha, \alpha' \beta, \beta', \gamma, x, y) &= \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(\alpha, m)(\beta, m)}{(\gamma, m)(1, m)} F(\alpha', \beta', \gamma+m, y) x^m,\\
F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y) &= \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(\alpha, m)(\beta, m)}{(\gamma, m)(1, m)} F(\alpha+m, \beta+m, \gamma', y) x^m.
\end{aligned}\right.$$

On obtient des formes semblables en ordonnant les quatre séries par rapport à y.

On voit immédiatement que les dérivées partielles des séries (1) par rapport à x ou y sont des séries de même espèce. Ainsi,

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F_1(\alpha+1, \beta+1, \beta', \gamma+1, x, y), \quad \ldots.$$

On voit aussi que l'on pourra former un grand nombre de formules analogues à celles que donne Gauss par la série F, comme, par exemple,

$$\begin{aligned}
&F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) - F_1(\alpha+1, \beta, \beta', \gamma, x, y)\\
&\quad = -\frac{\beta x}{\gamma} F_1(\alpha+1, \beta+1, \beta', \gamma+1, x, y)\\
&\qquad -\frac{\beta' y}{\gamma} F_1(\alpha+1, \beta, \beta'+1, \gamma+1, x, y),\\
&F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) - F_1(\alpha, \beta+1, \beta', \gamma, x, y)\\
&\quad = -\frac{\alpha x}{\gamma} F_1(\alpha+1, \beta+1, \beta', \gamma+1, x, y).
\end{aligned}$$

3. Les séries (1) se réduisent à des séries hypergéométriques d'une variable quand on fait $x = 0$ ou $y = 0$. Mais il est d'autres cas où ces séries se réduisent à la série F. Prenons, par exemple, la série F_1 sous la forme (2) et faisons $y = 1$. On a, en supposant

$$\alpha + \beta' - \gamma < 0,$$

$$\begin{aligned} F(\alpha + m, \beta', \gamma + m, 1) &= \frac{\Gamma(\gamma + m)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta')}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta' + m)} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta')}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta')} \frac{(\gamma, m)}{(\gamma - \beta', m)}, \end{aligned}$$

d'où l'on conclut

$$(3) \qquad F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta')}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta')} F(\alpha, \beta, \gamma - \beta', x).$$

On obtient une formule analogue en faisant $x = 1$, et supposant $\alpha + \beta - \gamma < 0$.

La série F_1 se réduit encore à la série F quand $y = x$. Pour le montrer, faisons $y = tx$; on a, en ordonnant par rapport aux puissances de x,

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, tx) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\alpha, n)(\beta, n)}{(\gamma, n)(1, n)} F(\beta', -n, -\beta - n + 1, t) x^n;$$

la fonction F qui figure dans le coefficient de x^n est un polynôme. Si l'on fait $t = 1$, on a

$$F(\beta', -n, -\beta - n + 1, 1) = \frac{(\beta + \beta', n)}{(\beta, n)};$$

donc

$$(4) \qquad F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, x) = F(\alpha, \beta + \beta', \gamma, x).$$

Voici encore un cas de réduction. Partons de la formule

$$(a) \quad F(\alpha, \beta, \gamma, x + y) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(\alpha, m)(\beta, m)}{(\gamma, m)(1, m)} F(\alpha + m, \beta + m, \gamma + m, y) x^m.$$

On a, d'après une formule connue (voir *Gauss Werke*, III. Band,

p. 218, éq. 91),

$$\begin{aligned}&F(\alpha+m, \beta+m, \gamma+m, y)\\ &\quad=(1-y)^{-\alpha-m} F\left(\alpha+m, \gamma-\beta, \gamma+m, -\frac{y}{1-y}\right);\end{aligned}$$

en substituant et se reportant aux formules (2), on voit que

$$(5)\quad F(\alpha, \beta, \gamma, x+y)=(1-y)^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \beta, \gamma-\beta, \gamma, \frac{x}{1-y}, \frac{-y}{1-y}\right),$$

formule qui montre que la série F_1 se ramène à F toutes les fois que $\beta+\beta'=\gamma$.

En partant de la formule (a), et appliquant la relation d'Euler

$$F(\alpha+m, \beta+m, \gamma+m, y)=(1-y)^{\gamma-\alpha-\beta-m} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma+m, y),$$

on obtient la relation

$$(5')\quad F(\alpha, \beta, \gamma, x+y)=(1-y)^{\gamma-\alpha-\beta} F_3\left(\alpha, \gamma-\alpha, \beta, \gamma-\beta, \gamma, \frac{x}{1-y}, y\right),$$

qui montre que la série F_3 se ramène à F toutes les fois que

$$\alpha+\alpha'=\beta+\beta'=\gamma.$$

Enfin on peut montrer que la série F_1 se ramène *toujours* à F_3. Pour cela, prenons la forme (2) de F_1 et appliquons la formule déjà employée précédemment,

$$F(\alpha+m, \beta', \gamma+m, y)=(1-y)^{-\beta'} F\left(\beta', \gamma-\alpha, \gamma+m, -\frac{y}{1-y}\right),$$

nous avons

$$(6)\quad F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)=(1-y)^{-\beta'} F_3\left(\alpha, \beta', \beta, \gamma-\alpha, \gamma, x, \frac{-y}{1-y}\right),$$

et, de même,

$$(6')\quad F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)=(1-x)^{-\beta} F_3\left(\alpha, \beta, \beta', \gamma-\alpha, \gamma, y, \frac{-x}{1-x}\right).$$

En appliquant aux fonctions (2) ou à la fonction (a) les autres formules relatives à la série F qui se trouvent dans le troisième Volume des *Œuvres de Gauss* ou dans le Mémoire de M. Kummer (*Journal de Crelle*, t. 15), on obtiendra d'autres relations analogues aux précédentes, qu'il est inutile d'exposer ici.

4. Voici d'abord quelques remarques sur la convergence des quatre séries.

F_1. — Le terme général de la série F_1 est

$$A_{m,n}x^m y^n = \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)} x^m y^n,$$

et l'on a

$$\lim (m+n)^{\gamma-\alpha} m^{1-\beta} n^{1-\beta'} A_{m,n} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')} \quad (m = n = \infty).$$

Soient

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 i, \quad \beta = \beta_1 + \beta_2 i, \quad \beta' = \beta'_1 + \beta'_2 i, \quad \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 i,$$

i désignant le symbole $\sqrt{-1}$; soit N un nombre plus grand que le module de $\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')}$. Désignons, en outre, par a et b les modules respectifs de x et y. On aura, pour toutes les valeurs de m et n plus grandes que certains nombres déterminés m_1 et n_1,

$$\text{mod.} A_{m,n} x^m y^n < \frac{N}{(m+n)^{\gamma_1-\alpha_1} m^{1-\beta_1} n^{1-\beta'_1}} a^m b^n,$$

d'où l'on conclut immédiatement que la série F_1 est convergente tant que a et b sont moindres que l'unité. On montre de même que, si a ou b est plus grand que l'unité, la série F_1 est divergente.

F_2. — Le terme général de la série F_2 est

$$A_{m,n}x^m y^n = \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} x^m y^n,$$

et l'on a

$$\lim (m+n)^{1-\alpha} m^{\gamma-\beta} n^{\gamma'-\beta'} \frac{1.2\ldots m.1.2\ldots n}{1.2\ldots m+n} A_{m,n} = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(\alpha)}.$$

Soient, comme précédemment, α_1, β_1, β'_1, γ_1, γ'_1 les parties réelles de α, β, β', γ, γ', et N un nombre plus grand que le module de

$$\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(\alpha)}.$$

On a, à partir de valeurs déterminées suffisamment grandes de m et n,

$$\text{mod. } A_{m,n}\, x^m y^n < N \frac{1.2\ldots m+n}{1.2\ldots m.1.2\ldots n}(m+n)^{\alpha_1-1} m^{\beta_1-\gamma_1} n^{\beta'_1-\gamma'_1} a^m b^n.$$

Soit ε un nombre positif plus grand que $\beta_1-\gamma_1$, $\beta'_1-\gamma'_1$; on a

$$m^{\beta_1-\gamma_1} n^{\beta'_1-\gamma'_1} < m^\varepsilon n^\varepsilon \leq \frac{(m+n)^{2\varepsilon}}{4^\varepsilon};$$

la série des modules a donc ses termes respectivement moindres que ceux de la série

$$\frac{N}{4^\varepsilon}\sum_0^\infty \frac{1.2\ldots m+n}{1.2\ldots m.1.2\ldots n}(m+n)^{2\varepsilon+\alpha_1-1} a^m b^n;$$

or cette dernière série peut s'écrire

$$\frac{N}{4^\varepsilon}\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \mu^{2\varepsilon+\alpha_1-1}(a+b)^\mu,$$

et elle est convergente tant que

$$a+b<1.$$

Donc la série F_2 est convergente tant que

$$\text{mod. } x + \text{mod. } y < 1.$$

On démontre, par une méthode analogue à la précédente, qu'elle est divergente si

$$\text{mod. } x + \text{mod. } y > 1.$$

F_3. — Le terme général de la série F_3 est

$$A_{m,n} x^m y^n = \frac{(\alpha, m)(\alpha', n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)} x^m y^n.$$

On a

$$\lim m^{2-\alpha-\beta} n^{2'-\alpha'-\beta}(m+n)^{\gamma-1} \frac{1.2\ldots.m+n}{1.2\ldots m.1.2\ldots n} A_{m,n} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha')\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')};$$

d'où l'on conclut, comme ci-dessus,

$$\text{mod.}\, A_{m,n} x^m y^n < N m^{\alpha_1+\beta_1-2} n^{\alpha'_1+\beta'_1-2}(m+n)^{1-\gamma_1} \frac{1.2\ldots m.1.2\ldots n}{1.2\ldots m+n} a^m b^n,$$

et, comme

$$\frac{1.2\ldots m.1.2\ldots n}{1.2\ldots m+n} < 1,$$

$$\text{mod.}\, A_{m,n} x^m y^n < N.m^{\alpha_1+\beta_1-2} n^{\alpha'_1+\beta'_1-2}(m+n)^{1-\gamma_1} a^m b^n;$$

la série F_3 est donc convergente lorsque a et b sont moindres que l'unité.

Elle est divergente si a ou b est plus grand que l'unité, ainsi que l'on s'en assure facilement.

F_4. — Prenons enfin la série F_4 dont le terme général est

$$A_{m,n} x^m y^n = \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m+n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} x^m y^n;$$

on a, dans ce cas,

$$\lim (m+n)^{2-\alpha-\beta} m^{\gamma-1} n^{\gamma'-1} \left(\frac{1.2\ldots m.1.2\ldots n}{1.2\ldots m+n}\right)^2 A_{m,n} = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}.$$

Soit encore ici N un nombre plus grand que le module de cette limite; à partir de certaines valeurs déterminées de m et n, on aura

$$\text{mod}\, A_{m,n} x^m y^n < N.(m+n)^{\alpha_1+\beta_1-2} m^{1-\gamma_1} n^{1-\gamma'_1} \left(\frac{1.2\ldots m+n}{1.2\ldots m.1.2\ldots n}\right)^2 a^m b^n.$$

Soit ε un nombre positif plus grand que $1-\gamma_1$ et $1-\gamma'_1$; alors

$$m^{1-\gamma_1} n^{1-\gamma'_1} > m^\varepsilon n^\varepsilon \leq \frac{(m+n)^{2\varepsilon}}{4^\varepsilon},$$

d'où

$$\operatorname{mod} A_{m,n} x^m y^n < N \cdot \frac{1}{4^{\epsilon}} \cdot (m+n)^{\alpha_1+\beta_1+2\epsilon-2} \left(\frac{1.2\ldots m+n}{1.2\ldots m.1.2\ldots n}\right)^2 a^m b^n.$$

La série des modules est donc convergente en même temps que la série

$$\sum_{m,n} (m+n)^{\alpha_1+\beta_1+2\epsilon-2} \left(\frac{1.2\ldots m+n}{1.2\ldots m.1.2\ldots n}\right)^2 a^m b^n;$$

dans cette dernière série, groupons les termes pour lesquels $m+n=\mu$; elle devient

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \mu^{\alpha_1+\beta_1+2\epsilon-2} \left[a^\mu + \left(\frac{\mu}{1}\right)^2 a^{\mu-1} b + \left(\frac{\mu.\mu-1}{1.2}\right)^2 a^{\mu-2} b^2 + \ldots + b^\mu\right];$$

on voit immédiatement que le polynôme entre parenthèses est moindre que

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{2\mu} = [(\sqrt{a}+\sqrt{b})^\mu]^2.$$

La série des modules est donc convergente en même temps que la série

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \mu^{\alpha_1+\beta_1+2\epsilon-2} (\sqrt{a}+\sqrt{b})^{2\mu},$$

laquelle est convergente tant que $\sqrt{a}+\sqrt{b}<1$.

Donc, la série F_4 est convergente si

$$\operatorname{mod}\sqrt{x} + \operatorname{mod}\sqrt{y} < 1.$$

CHAPITRE II.

Définition des quatre fonctions par des équations différentielles linéaires simultanées aux dérivées partielles.

5. De même que la fonction hypergéométrique de Gauss satisfait à une équation différentielle linéaire qui permet de définir cette fonction

pour toutes les valeurs de la variable indépendante; de même, nos quatre fonctions F_1, F_2, F_3, F_4 satisfont à des équations différentielles simultanées permettant de les définir pour tous les groupes de valeurs des variables indépendantes x et y.

Ces équations sont les suivantes, ainsi qu'on le vérifie facilement :

$$F_1\begin{cases}(x-x^2)r+y(1-x)s+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]p-\beta yq-\alpha\beta z=0,\\(y-y^2)t+x(1-y)s+[\gamma-(\alpha+\beta'+1)y]q-\beta' xp-\alpha\beta' z=0;\end{cases}$$

$$F_2\begin{cases}(x-x^2)r-xys+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]p-\beta yq-\alpha\beta z=0,\\(y-y^2)t-xys+[\gamma'-(\alpha+\beta'+1)y]q-\beta' xp-\alpha\beta' z=0;\end{cases}$$

$$F_3\begin{cases}(x-x^2)r+ys+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]p-\alpha\beta z=0,\\(y-y^2)t+xs+[\gamma-(\alpha'+\beta'+1)y]q-\alpha'\beta' z=0;\end{cases}$$

$$F_4\begin{cases}(x-x^2)r-y^2t-2xys+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]p-(\alpha+\beta+1)yq-\alpha\beta z=0,\\(y-y^2)t-x^2r-2xys+[\gamma'-(\alpha+\beta+1)y]q-(\alpha+\beta+1)xp-\alpha\beta z=0.\end{cases}$$

Dans ces équations les lettres p, q, r, s, t désignent, comme il est d'usage, les dérivées partielles

$$\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Indiquons d'abord quelques théorèmes généraux sur les équations différentielles linéaires simultanées de la forme précédente.

6. Considérons, d'une manière générale, les équations simultanées

$$(7)\qquad r=a_1s+a_2p+a_3q+a_4z,\quad t=b_1s+b_2p+b_3q+b_4z,$$

les a et les b étant des fonctions de x et y. Supposons que la quantité $1-a_1b_1$ ne soit pas nulle identiquement et que la condition d'intégrabilité $\frac{\partial^2 s}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 s}{\partial y\,\partial x}$ soit remplie identiquement, c'est-à-dire quels que soient x, y, z, p, q, s. Dans ces conditions, on peut démontrer la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Soit x_0, y_0 un système de valeurs des variables x et y*

tel que, pour des valeurs de ces variables voisines de x_0 et y_0, les coefficients des équations (7) *soient holomorphes, et que la quantité* $1 - a_1 b_1$ *ne soit pas nulle pour* $x = x_0$, $y = y_0$; *on pourra satisfaire aux équations* (7) *par une fonction de x et y holomorphe dans le voisinage des valeurs* x_0, y_0, *les valeurs de cette fonction et des trois dérivées* p, q, s *étant arbitraires pour* $x = x_0$, $y = y_0$.

Ce théorème se déduit facilement d'un théorème sur les équations aux différentielles totales, démontré par M. Bouquet (*Bulletin des Sciences mathématiques*, t. III, p. 265). Pour le montrer, différentions la première des équations (7) par rapport à y, la deuxième par rapport à x, et remplaçons $\frac{\partial r}{\partial y}$ par $\frac{\partial s}{\partial x}$, $\frac{\partial t}{\partial x}$ par $\frac{\partial s}{\partial y}$. Nous obtenons ainsi deux équations du premier degré par rapport à $\frac{\partial s}{\partial x}$, $\frac{\partial s}{\partial y}$, d'où l'on pourra tirer ces deux quantités, car le déterminant des inconnues est précisément $1 - a_1 b_1$ que l'on suppose différent de zéro. On a, de cette façon, pour $\frac{\partial s}{\partial x}$, $\frac{\partial s}{\partial y}$, des expressions linéaires en r, s, t, p, q, z que l'on peut ramener à ne contenir que s, p, q, z à l'aide des équations (7)

$$(8)\qquad \frac{\partial s}{\partial x} = \alpha_1 s + \alpha_2 p + \alpha_3 q + \alpha_4 z, \quad \frac{\partial s}{\partial y} = \beta_1 s + \beta_2 p + \beta_3 q + \beta_4 z.$$

Cela posé, considérons le système d'équations aux différentielles totales

$$(9)\qquad \begin{cases} dz = p\,dx + q\,dy, \\ dp = (a_1 s + a_2 p + a_3 q + a_4 z)\,dx + s\,dy, \\ dq = s\,dx + (b_1 s + b_2 p + b_3 q + b_4 z)\,dy, \\ ds = (\alpha_1 s + \alpha_2 p + \alpha_3 q + \alpha_4 z)dx + (\beta_1 s + \beta_2 p + \beta_3 q + \beta_4 z)dy. \end{cases}$$

Les conditions d'intégrabilité de ce système se réduisent à une seule

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 s}{\partial y\,\partial x},$$

ou

$$\frac{\partial(\alpha_1 s + \alpha_2 p + \alpha_3 q + \alpha_4 z)}{\partial y} = \frac{\partial(\beta_1 s + \beta_2 p + \beta_3 q + \beta_4 z)}{\partial x},$$

que nous supposons remplie identiquement. Les coefficients de dx et dy sont, d'après les hypothèses faites, holomorphes dans le voisinage des valeurs $x = x_0$, $y = y_0$, quelles que soient les valeurs de z, p, q, s; on peut donc appliquer le théorème de M. Bouquet, et l'on a le théorème I qu'il fallait démontrer.

Le théorème précédent s'applique aux équations F_2, F_3, F_4, ainsi que ceux qui vont suivre. Il y a exception pour les équations F_1 pour lesquelles la quantité $1 - a_1 b_1$ est nulle identiquement, circonstance que nous examinerons plus loin.

Dans ce qui suit, j'appelle *couple de valeurs singulières* un couple de valeurs $x = \xi$, $y = \eta$ tel que pour ces valeurs $1 - a_1 b_1$ s'annule, ou que les coefficients a et b ne soient pas, dans le voisinage de ces valeurs, développables en séries de la forme

$$\sum_0^\infty A_{m,n}(x-\xi)^m(y-\eta)^n.$$

7. Il est, d'après ce qui précède, aisé de définir ce qu'il faut entendre par une fonction satisfaisant aux équations (7). Donnons à y une valeur constante y_0, qui ne soit pas une valeur singulière pour les coefficients a et b et qui n'annule pas la quantité $1 - a_1 b_1$. Soit T une portion du plan des x limitée par un contour simple, dans laquelle les coefficients a et b soient des fonctions holomorphes de x et la quantité $1 - a_1 b_1$ soit différente de zéro, à l'exception de points *singuliers* isolés les uns des autres. Soient x_0 et x deux points non singuliers de la surface T; joignons-les par une courbe quelconque $x_0 x$ située entièrement dans la surface T et ne passant par aucun des points singuliers; choisissons arbitrairement les valeurs de z et des dérivées p, q, s au point x_0. Au moyen de la continuité, l'on pourra en déduire les valeurs de la fonction z tout le long de la courbe $x_0 x$.

Inversement, on pourra laisser x constant et faire varier y. De sorte que l'on pourra toujours passer de la valeur de la fonction pour $x = x_0$, $y = y_0$ à la valeur de la fonction pour $x = x_1$, $y = y_1$, pourvu que les couples de valeurs (x_0, y_0), (x_1, y_1) ne soient pas des couples de valeurs singulières.

8. Théorème II. — *Si l'on a cinq fonctions* z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 *satisfai-*

sant aux équations (7), *il y a entre ces fonctions une relation linéaire à coefficients constants, telle que*

$$C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 + C_4 z_4 + C_5 z_5 = 0.$$

Pour le démontrer, appelons p_i, q_i, s_i les dérivées de z_i, et faisons

$$\begin{aligned}
Z &= C_1 z_1 + C_2 z_2 + \ldots + C_5 z_5,\\
P &= C_1 p_1 + C_2 p_2 + \ldots + C_5 p_5,\\
Q &= C_1 q_1 + C_2 q_2 + \ldots + C_5 q_5,\\
S &= C_1 s_1 + C_2 s_2 + \ldots + C_5 s_5;
\end{aligned}$$

les multiplicateurs C étant, pour le moment, des fonctions quelconques de x et y. Puisque les cinq fonctions satisfont aux équations (9), on a, comme on le vérifie facilement,

$$(9')\quad \left\{\begin{aligned}
dZ &= P\,dx + Q\,dy + z_1\,dC_1 + z_2\,dC_2 + \ldots + z_5\,dC_5,\\
dP &= (a_1 S + a_2 P + a_3 Q + a_4 Z)\,dx + S\,dy + p_1\,dC_1 + p_2\,dC_2\\
&\qquad + \ldots + p_5\,dC_5,\\
dQ &= S\,dx + (b_1 S + b_2 P + b_3 Q + b_4 Z)\,dy + q_1\,dC_1 + q_2\,dC_2\\
&\qquad + \ldots + q_5\,dC_5,\\
dS &= (\alpha_1 S + \alpha_2 P + \alpha_3 Q + \alpha_4 Z)\,dx + (\beta_1 S + \beta_2 P + \beta_3 Q + \beta_4 Z)\,dy\\
&\qquad + s_1\,dC_1 + s_2\,dC_2 + \ldots + s_5\,dC_5.
\end{aligned}\right.$$

Or, on peut toujours déterminer les fonctions C de façon que les quatre fonctions Z, P, Q, S soient nulles identiquement; et alors les équations (9′) donnent

$$\begin{aligned}
z_1\,dC_1 + z_2\,dC_2 + \ldots + z_5\,dC_5 &= 0,\\
p_1\,dC_1 + p_2\,dC_2 + \ldots + p_5\,dC_5 &= 0,\\
q_1\,dC_1 + q_2\,dC_2 + \ldots + q_5\,dC_5 &= 0,\\
s_1\,dC_1 + s_2\,dC_2 + \ldots + s_5\,dC_5 &= 0,
\end{aligned}$$

qui, comparées aux équations $Z=0$, $P=0$, $Q=0$, $S=0$ montrent que

$$\frac{dC_1}{C_1}=\frac{dC_2}{C_2}=\dots=\frac{dC_5}{C_5}.$$

D'où l'on conclut que les rapports des multiplicateurs C à l'un d'entre eux sont constants, ce qui démontre le théorème.

Corollaire. — Si l'on a quatre fonctions z_1, z_2, z_3, z_4 satisfaisant aux équations (7), et telles que le déterminant

$$D=\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}$$

soit nul identiquement, il existe entre ces quatre fonctions une relation linéaire à coefficients constants, telle que

$$C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 + C_4 z_4 = 0.$$

On voit en effet que l'on peut, parce que D est nul, supposer dans le raisonnement précédent $C_5 = 0$.

9. Théorème III. — *Soient z_1, z_2, z_3, z_4 quatre fonctions satisfaisant aux équations* (7), *le déterminant* D *satisfait à la relation*

$$(10) \qquad d\log D = (a_2+\alpha_1)\,dx + (b_3+\beta_1)\,dy,$$

$$(11) \qquad D = A e^{\int_{x_0}^{x}(a_2+\alpha_1)\,dx+\int_{y_0}^{y}(b_3+\beta_1)_{x_0}\,dy}.$$

En effet, on a

$$(12) \qquad dD=\begin{vmatrix} dz_1 & dz_2 & dz_3 & dz_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} z_i \\ dp_i \\ q_i \\ s_i \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} z_i \\ p_i \\ dq_i \\ s_i \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} z_i \\ p_i \\ q_i \\ ds_i \end{vmatrix},$$

où l'on n'a écrit qu'une colonne dans chacun des trois derniers déterminants; or, d'après les équations (9), le premier déterminant est nul; le deuxième est égal à $a_2 \mathrm{D} dx$, le troisième à $b_3 \mathrm{D} dy$, le dernier à $\alpha_1 \mathrm{D} dx + \beta_1 \mathrm{D} dy$; donc

$$d\mathrm{D} = \mathrm{D}[(a_2 + \alpha_1)dx + (b_3 + \beta_1)dy];$$

d'où résulte immédiatement l'équation (10).

10. Soient z_1, z_2, z_3, z_4 quatre fonctions satisfaisant aux équations (7), et telles que, pour $x = x_0$, $y = y_0$, le déterminant D ne soit pas nul; d'après le théorème III, ce déterminant ne sera nul que pour les couples de valeurs singulières. Nous donnerons à l'ensemble de ces quatre fonctions le nom de *système fondamental d'intégrales*. On voit immédiatement, d'après le théorème II, que *toute solution des équations différentielles peut s'exprimer linéairement au moyen des éléments d'un système fondamental quelconque.*

On peut encore démontrer cette proposition en remarquant que, si l'on pose

$$z = \mathrm{C}_1 z_1 + \mathrm{C}_2 z_2 + \mathrm{C}_3 z_3 + \mathrm{C}_4 z_4,$$

on pourra déterminer les coefficients constants C_i de façon que, pour $x = x_0$, $y = y_0$, z, p, q, s prennent des valeurs données d'avance. On aura, pour cela, à résoudre, quatre équations du premier degré dont le déterminant D est différent de zéro, puisque z_1, z_2, z_3, z_4 forment un système fondamental d'intégrales.

11. Supposons, dans les équations (7), que, lorsqu'on laisse une des variables constantes, $y = \eta$ par exemple, les coefficients soient des fonctions uniformes de x dans une région T du plan des x et n'y présentent qu'un nombre fini de points dont les affixes forment avec η des couples de valeurs singulières. D'après le théorème I, une intégrale quelconque z des équations différentielles sera une fonction de x holomorphe en tous les points situés dans la région T, excepté aux points singuliers en question.

Soit ξ un de ces points singuliers, et soient z_1, z_2, z_3, z_4 les éléments d'un système fondamental d'intégrales. Supposons que, y restant égal à η, la variable x fasse le tour du point ξ en restant sur la surface T, et appelons $(z_1), (z_2), (z_3), (z_4)$ les nouvelles valeurs que prennent les intégrales quand le tour est accompli. Ces nouvelles fonctions sont encore des solutions des équations, et, d'après ce qui précède, elles forment encore un système fondamental. On a donc

$$(13)\qquad (z_i) = \lambda_{i1} z_1 + \lambda_{i2} z_2 + \lambda_{i3} z_3 + \lambda_{i4} z_4 \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

le déterminant des constantes λ_{ik} étant différent de zéro. Les conséquences de ces relations sont analogues à celles qui se présentent, dans la théorie des équations différentielles linéaires à une variable indépendante. (*Voir*, par exemple, les *Annales de l'École Normale*, t. IV, Mémoire de M. Tannery, p. 134 et suiv.).

12. Voici comment on peut déterminer les intégrales générales des équations F_2, F_3, F_4, qui rentrent dans la catégorie des équations que nous venons d'étudier.

Dans les équations F_2, faisons

$$(14)\qquad z = x^\lambda y^\mu z',$$

et cherchons à déterminer les exposants λ et μ de telle façon que les équations en z' aient la même forme que les équations F_2. On trouve pour λ et μ trois groupes de valeurs, et l'on obtient pour l'intégrale générale des équations F_2 l'expression

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} z = {} & \mathrm{A}F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y) \\ & + \mathrm{B}x^{1-\gamma}F_2(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, \beta', 2-\gamma, \gamma', x, y) \\ & + \mathrm{C}y^{1-\gamma'}F_2(\alpha+1-\gamma', \beta, \beta'+1-\gamma', \gamma, 2-\gamma', x, y) \\ & + \mathrm{D}x^{1-\gamma}y^{1-\gamma'} \\ & \times F_2(\alpha+2-\gamma-\gamma', \beta+1-\gamma, \beta'+1-\gamma', 2-\gamma, 2-\gamma', x, y), \end{aligned}\right.$$

A, B, C, D étant des constantes arbitraires. Cette intégrale, dans laquelle on considère y comme une constante, est, dans le voisinage du point singulier $x = 0$, de la forme trouvée pour le cas général

13. Considérons, par exemple, les polynômes que M. Hermite a indiqués comme généralisation des polynômes de Legendre (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LX, p. 370, 432, 461, 512, et *Journal de Crelle*, t. 64) et qui ont été étudiés par Didon (*Annales de l'École Normale*, t. V, année 1868). Si l'on fait

$$\mathrm{U} = \frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n}}{dx^m\,dy^n},$$

ce polynôme satisfait aux équations simultanées

$$\begin{aligned}
&(1-x^2)\frac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial x^2} - xy\frac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial x\,\partial y} + (n-2)x\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial x}\\
&\qquad - (m+1)y\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial y} + (m+n)(m+1)\mathrm{U} = 0,\\
&(1-y^2)\frac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial y^2} - xy\frac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial x\,\partial y} + (m-2)y\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial y}\\
&\qquad - (n+1)x\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial x} + (m+n)(n+1)\mathrm{U} = 0.
\end{aligned}$$

Si, dans ces équations, on fait $x = \sqrt{\xi}$, $y = \sqrt{\eta}$, elles deviennent

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}
&(\xi-\xi^2)\frac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial\xi^2} - \xi\eta\frac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial\xi\,\partial\eta} + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - n + 1\right)\xi\right]\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial\xi}\\
&\qquad - \frac{m+1}{2}\eta\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial\eta} + \frac{1}{4}(m+n)(m+1)\mathrm{U} = 0,\\
&(\eta-\eta^2)\frac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial\eta^2} - \xi\eta\frac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial\xi\,\partial\eta} + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - m + 1\right)\eta\right]\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial\eta}\\
&\qquad - \frac{n+1}{2}\xi\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial\xi} + \frac{1}{4}(m+n)(n+1)\mathrm{U} = 0,
\end{aligned}\right.$$

équations de la forme F_2, dont l'intégrale générale est

$$\begin{aligned}
\mathrm{U} = {}& \mathrm{AF}_2\left(-\frac{m+n}{2}, \frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \xi, \eta\right)\\
&+ \mathrm{B}\sqrt{\xi}\,\mathrm{F}_2\left(\frac{1-m-n}{2}, \frac{m}{2}+1, \frac{n+1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \xi, \eta\right)\\
&+ \mathrm{C}\sqrt{\eta}\,\mathrm{F}_2\left(\frac{1-m-n}{2}, \frac{m+1}{2}, \frac{n}{2}+1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \xi, \eta\right)\\
&+ \mathrm{D}\sqrt{\xi\eta}\,\mathrm{F}_2\left(1-\frac{m+n}{2}, \frac{m}{2}+1, \frac{n}{2}+1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \xi, \eta\right).
\end{aligned}$$

Cette intégrale générale a été déterminée par Didon sous forme d'intégrales définies. Il est à remarquer, comme le remarque Didon, que deux des quatre intégrales particulières sont toujours des polynômes, car, si $(m+n)$ est pair, les coefficients de A et $D\sqrt{\xi\eta}$ sont des polynômes, et si $(m+n)$ est impair, les coefficients de $B\sqrt{\xi}$ et $C\sqrt{\eta}$ sont des polynômes.

On peut de même ramener à la fonction F_2 les polynômes $V_{m,n}$ associés aux précédents, satisfaisant à deux équations différentielles linéaires analogues aux précédentes. (Mémoire de Didon, déjà cité, p. 243, éq. 16 et 17.) Plus généralement, la fonction $\frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n+h}}{dx^m\,dy^n}$ peut s'exprimer à l'aide de F_2, quelle que soit la constante h.

14. Les équations F_3 peuvent, par un changement de variables, se ramener à la forme F_2. Pour le montrer faisons, dans les équations F_3,

$$x=\frac{1}{\xi},\quad y=\frac{1}{\eta};$$

ces équations deviennent

$$\xi^2(\xi-1)\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+\xi^2\eta\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta}+\xi[(2-\gamma)\xi+\alpha+\beta-1]\frac{\partial z}{\partial\xi}-\alpha\beta z=0,$$

$$\eta^2(\eta-1)\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}+\eta^2\xi\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta}+\eta[(2-\gamma)\eta+\alpha'+\beta'-1]\frac{\partial z}{\partial\eta}-\alpha'\beta' z=0.$$

Dans ces équations, faisons $z=\xi^\lambda\eta^\mu z'$; on peut déterminer λ et μ de façon qu'après la substitution le premier membre de la première équation soit divisible par $\xi^{\lambda+1}\eta^\mu$, le premier membre de la deuxième par $\xi^\lambda\eta^{\mu+1}$; il suffit, pour cela, de prendre $\lambda=\alpha$, $\mu=\alpha'$; alors les équations en z' sont

$$(17)\quad\left\{\begin{aligned}&(\xi-\xi^2)\frac{\partial^2 z'}{\partial\xi^2}-\xi\eta\frac{\partial^2 z'}{\partial\xi\,\partial\eta}\\&\qquad+[\alpha-\beta+1-\xi(2\alpha+\alpha'+2-\gamma)]\frac{\partial z'}{\partial\xi}\\&\qquad\qquad-\alpha\eta\frac{\partial z'}{\partial\eta}-\alpha(\alpha+\alpha'-\gamma+1)z'=0,\\&(\eta-\eta^2)\frac{\partial^2 z'}{\partial\eta^2}-\xi\eta\frac{\partial^2 z'}{\partial\xi\,\partial\eta}\\&\qquad+[\alpha'-\beta'+1-\eta(2\alpha'+\alpha+2-\gamma)]\frac{\partial z'}{\partial\eta}\\&\qquad\qquad-\alpha'\xi\frac{\partial z'}{\partial\xi}-\alpha'(\alpha+\alpha'-\gamma+1)z'=0,\end{aligned}\right.$$

équations de la forme F_2. Comme on a l'intégrale générale des équations F_2, il en résulte l'intégrale générale des équations F_3. Cette intégrale est

$$\begin{aligned} z = {} & A x^{-\alpha} y^{-\alpha'} F_2\left(\alpha+\alpha'-\gamma+1, \alpha, \alpha', \alpha-\beta+1, \alpha'-\beta'+1, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) \\ & + B x^{-\beta} y^{-\alpha'} F_2\left(\beta+\alpha'-\gamma+1, \beta, \alpha', \beta-\alpha+1, \alpha'-\beta'+1, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) \\ & + C x^{-\alpha} y^{-\beta'} F_2\left(\alpha+\beta'-\gamma+1, \alpha, \beta', \alpha-\beta+1, \beta'-\alpha'+1, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) \\ & + D x^{-\beta} y^{-\beta'} F_2\left(\beta+\beta'-\gamma+1, \beta, \beta', \beta-\alpha+1, \beta'-\alpha'+1, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right). \end{aligned}$$

15. En faisant, dans les équations F_4, la substitution $z = x^\lambda y^\mu z'$, et déterminant λ et μ de façon à avoir des équations de même forme, on a, pour l'intégrale générale de ces équations,

$$\begin{aligned} z = {} & A F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y) \\ & + B x^{1-\gamma} F_4(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, \gamma', x, y) \\ & + C y^{1-\gamma'} F_4(\alpha+1-\gamma', \beta+1-\gamma', \gamma, 2-\gamma', x, y) \\ & + D x^{1-\gamma} y^{1-\gamma'} F_4(\alpha+2-\gamma-\gamma', \beta+2-\gamma-\gamma', 2-\gamma, 2-\gamma', x, y). \end{aligned}$$

16. *Équations* F_1. — J'arrive maintenant aux équations F_1 auxquelles, comme je l'ai remarqué, les théorèmes précédents (§ **6-12**) ne s'appliquent plus, car $1 - a_1 b_1$ est nul pour ces équations.

Différentions la première des équations F_1 par rapport à y, la deuxième par rapport à x, et remplaçons $\frac{\partial r}{\partial y}$, $\frac{\partial t}{\partial x}$ respectivement par $\frac{\partial s}{\partial x}$, $\frac{\partial s}{\partial y}$; nous aurons deux équations du premier degré par rapport à $\frac{\partial s}{\partial x}$, $\frac{\partial s}{\partial y}$; le déterminant de ces équations est *nul*. On peut donc éliminer $\frac{\partial s}{\partial x}$ et $\frac{\partial s}{\partial y}$, et l'on obtient une équation qui, simplifiée à l'aide des équations F_1, se réduit à

$$(x-y)s - \beta' p + \beta q = 0.$$

La fonction F_1 vérifie donc aussi cette dernière équation, qui est une conséquence des deux autres; et, par suite, elle vérifie les trois équations

$$(18)\begin{cases} (x-y)(x-x^2)r \\ \quad +[\gamma(x-y)-(\alpha+\beta+1)x^2+(\alpha+\beta-\beta'+1)xy+\beta'y]p \\ \qquad -\beta y(1-y)q-\alpha\beta(x-y)z=0, \\ (y-x)(y-y^2)t \\ \quad +[\gamma(y-x)-(\alpha+\beta'+1)y^2+(\alpha-\beta+\beta'+1)xy+\beta x]q \\ \qquad -\beta' x(1-x)p-\alpha\beta'(y-x)z=0, \\ (x-y)s-\beta' p+\beta q=0. \end{cases}$$

On voit, par un calcul facile, que, si l'on calcule à l'aide de ces équations $\frac{\partial r}{\partial y}$ et $\frac{\partial s}{\partial x}$, les deux expressions trouvées sont identiques en x, y, z, p, q; de même pour $\frac{\partial t}{\partial x}$, $\frac{\partial s}{\partial y}$. On a donc un système de trois équations linéaires simultanées de la forme

$$(19)\qquad \begin{cases} r=a_1p+a_2q+a_3z, \\ t=b_1p+b_2q+b_3z, \\ s=c_1p+c_2q+c_3z, \end{cases}$$

les a, b, c étant des fonctions de x et y, et les conditions $\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{\partial s}{\partial x}$, $\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{\partial s}{\partial y}$ étant remplies identiquement. En considérant le système des équations aux différentielles totales

$$(19)'\qquad \begin{cases} dz=p\,dx+q\,dy, \\ dp=(a_1p+a_2q+a_3z)\,dx+(c_1p+c_2q+c_3z)\,dy, \\ dq=(c_1p+c_2q+c_3z)\,dx+(b_1p+b_2q+b_3z)\,dy, \end{cases}$$

on pourra appliquer à ce système le théorème de M. Bouquet déjà cité, et l'on verra que :

Théorème *a*. — *Si pour $x=x_0$, $y=y_0$ les coefficients a, b, c sont holomorphes, on pourra satisfaire aux équations* (19) *par une fonction z de x et y holomorphe pour $x=x_0$, $y=y_0$; les valeurs de cette fonction et des dérivées p et q étant arbitraires pour $x=x_0$, $y=y_0$.*

On démontre, comme nous l'avons fait précédemment, que :

Théorème *b*. — *Si l'on a quatre fonctions z_1, z_2, z_3, z_4 vérifiant les équations* (19), *il existe entre ces fonctions une relation linéaire à coefficients constants*

$$C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 + C_4 z_4 = 0.$$

Corollaire. — Si l'on a trois fonctions z_1, z_2, z_3 vérifiant les équations (19) et telles que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix}$$

soit nul identiquement, il existe entre ces fonctions une relation linéaire à coefficients constants.

Théorème *c*. — *Si l'on a trois fonctions z_1, z_2, z_3 vérifiant les équations* (19), *le déterminant Δ satisfait à la relation*

$$d \log \Delta = (a_1 + c_2)\, dx + (c_1 + b_2)\, dy. \tag{20}$$

Les conclusions qu'on tire de ces théorèmes relativement à l'intégrale générale des équations (19) sont analogues à celles du § **11**.

17. Dans le cas particulier des équations (18), on a

$$a_1 + c_2 = -\frac{\gamma(x-y) - (\alpha+\beta+1)x^2 + (\alpha+\beta-\beta'+1)xy + \beta' y}{(x-y)\,x(1-x)} - \frac{\beta}{x-y}$$
$$= \frac{\beta'-\gamma}{x} + \frac{\alpha+\beta+1-\gamma}{1-x} - \frac{\beta+\beta'}{x-y},$$

et

$$c_1 + b_2 = \frac{\beta-\gamma}{y} + \frac{\alpha+\beta'+1-\gamma}{1-y} + \frac{\beta+\beta'}{x-y},$$

d'où, d'après (20),

$$\Delta = A x^{\beta'-\gamma} y^{\beta-\gamma} (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1} (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'-1} (x-y)^{-(\beta+\beta')}.$$

On peut encore remarquer, en changeant dans les équations (18)

x en $1-x$ et y en $1-y$, qu'elles admettent la solution

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \alpha+\beta+\beta'+1-\gamma, 1-x, 1-y).$$

18. Pour étudier les intégrales des équations différentielles simultanées des formes (7) et (19), on pourrait encore employer la méthode suivante.

Nous avons ramené les équations (7) à la forme (9). Dans ces dernières équations, faisons $y=$ const., $dy=0$; ces équations deviennent

$$\frac{dz}{dx}=p, \quad \frac{dp}{dx}=a_1 s+a_2 p+a_3 q+a_4 z,$$
$$\frac{dq}{dx}=s, \quad \frac{ds}{dx}=\alpha_1 s+\alpha_2 p+\alpha_3 q+\alpha_4 z;$$

l'élimination des fonctions s, p, q conduit à une équation différentielle du quatrième ordre à laquelle satisfait z considéré comme fonction de la seule variable x, et l'on pourra appliquer à cette équation les méthodes de M. Fuchs. De même, la fonction z considérée comme fonction de y seul, ($x=$ const.) satisfait à une équation différentielle linéaire du quatrième ordre.

Par exemple, la fonction F_3 considérée comme fonction de x seul satisfait à l'équation

$$\begin{aligned}
&x^2(xy-x-y)(1-x)\frac{d^4z}{dx^4}\\
&\quad+x\Big\{[\gamma+2-(\alpha+\beta+5)x](xy-x-y)\\
&\qquad\quad+[(\alpha'+\beta'-\gamma-1)y-(\alpha+\beta+3)(1-y)x](1-x)\Big\}\frac{d^3z}{dx^3}\\
&\quad+\Big\{[\gamma+1-(\alpha+\beta+3)x]\\
&\qquad\times[(\alpha'+\beta'-\gamma-1)y-(\alpha+\beta+3)(1-y)x]\\
&\qquad-x(xy-x-y)(2\alpha\beta+3\alpha+3\beta+5)-(\alpha+1)(\beta+1)x-\alpha'\beta'y\Big\}\frac{d^2z}{dx^2}\\
&\quad-(\alpha+1)(\beta+1)\\
&\quad\times\Big\{(\alpha'+\beta'-\gamma-1)y-(\alpha+\beta+3)(1-y)x\\
&\qquad\qquad+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x](1-y)\Big\}\frac{dz}{dx}\\
&\qquad\qquad\qquad+\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)(1-y)z=0.
\end{aligned}$$

Cette équation montre que z est une fonction holomorphe de x dans tout le plan, excepté dans le voisinage des points

$$x = 0, \quad x = 1, \quad x = \frac{y}{y-1}, \quad x = \infty.$$

Au point singulier $x = 0$, par exemple, l'équation fondamentale déterminante est

$$\begin{aligned} r(r-1)(r-2)(r-3) + r(r-1)(r-2)(2\gamma - \alpha' - \beta' + 3) \\ - r(r-1)[(\gamma+1)(\alpha' + \beta' - \gamma - 1) - \alpha'\beta'] = 0, \end{aligned}$$

dont les racines sont

$$0, \quad 1, \quad \alpha' - \gamma + 1, \quad \beta' - \gamma + 1.$$

Si l'on prend de même les équations de la forme (19), on les ramène à la forme (19'); puis, supposant $y = \text{const.}$, $dy = 0$, on a trois équations simultanées

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dp}{dx} = a_1 p + a_2 q + a_3 z, \quad \frac{dq}{dx} = c_1 p + c_2 q + c_3 z,$$

entre lesquelles on peut éliminer p et q. On obtient ainsi une équation différentielle linéaire du troisième ordre, à laquelle satisfait z considéré comme fonction de x seul.

Ainsi, par exemple, la fonction F_1 considérée comme une fonction de x seul satisfait à une équation différentielle linéaire du troisième ordre, qui a été formée par M. Picard (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XC, p. 1267). M. Picard a montré en même temps que F_1 considéré comme fonction de x seul ou de y seul est une des fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur étudiées par M. Pochhammer (*Journal de Crelle*, t. 71).

CHAPITRE III.

Expression des fonctions F à l'aide d'intégrales définies; relations entre ces fonctions.

19. On vérifie facilement les formules suivantes, en développant les intégrales suivant les puissances croissantes de x et y,

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned}&\int\int u^{\alpha-1}v^{\alpha'-1}(1-ux)^{-\beta}(1-vy)^{-\beta'}(1-u-v)^{\gamma-\alpha-\alpha'-1}\,du\,dv\\ &\quad=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha')\Gamma(\gamma-\alpha-\alpha')}{\Gamma(\gamma)}F_3(\alpha,\alpha',\beta,\beta',\gamma,x,y),\end{aligned}\right.$$

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned}&\int\int u^{\beta-1}v^{\beta'-1}(1-u-v)^{\gamma-\beta-\beta'-1}(1-ux-vy)^{-\alpha}\,du\,dv\\ &\quad=\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(\gamma-\beta-\beta')}{\Gamma(\gamma)}F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma,x,y),\end{aligned}\right.$$

les deux intégrales précédentes étant étendues aux valeurs réelles de u et v telles que

$$u\geq 0,\quad v\geq 0,\quad 1-u-v\geq 0;$$

puis

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_0^1\int_0^1 u^{\beta-1}v^{\beta'-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-v)^{\gamma'-\beta'-1}(1-ux-vy)^{-\alpha}\,du\,dv\\ &\quad=\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\gamma'-\beta')}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')}F_2(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma',x,y).\end{aligned}\right.$$

La fonction F_1 peut aussi s'exprimer par une intégrale simple, comme l'a montré M. Picard dans la Note citée plus haut; on a, en effet,

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'}\,du\\ &\quad=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma,x,y).\end{aligned}\right.$$

Les expressions précédentes des fonctions F_1, F_2, F_3 donnent, par des changements de variables sous les signes $\int$, différentes formules importantes.

Ainsi, en changeant dans la formule (24) u en $1-u$, on obtient immédiatement la relation

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} &F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma,x,y)\\ &\quad=(1-x)^{-\beta}(1-y)^{-\beta'}F_1\left(\gamma-\alpha,\beta,\beta',\gamma,\frac{x}{x-1},\frac{y}{y-1}\right).\end{aligned}\right.$$

De même, en changeant dans (23) successivement u en $1-u$, puis v en $1-v$, on a les relations

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} &F_2(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma',x,y)\\ &\quad=(1-x)^{-\alpha}F_2\left(\alpha,\gamma-\beta,\beta',\gamma,\gamma',\frac{x}{x-1},\frac{y}{1-x}\right)\\ &\quad=(1-y)^{-\alpha}F_2\left(\alpha,\beta,\gamma'-\beta',\gamma,\gamma',\frac{x}{1-y},\frac{y}{y-1}\right)\\ &\quad=(1-x-y)^{-\alpha}F_2\left(\alpha,\gamma-\beta,\gamma'-\beta',\gamma,\gamma',\frac{x}{x+y-1},\frac{y}{x+y-1}\right).\end{aligned}\right.$$

Enfin, si dans la formule (22) on fait

$$u=1-u'-v',\quad v=v',\quad 1-u-v=u',$$

on trouve, après quelques réductions faciles, la formule

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} &F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma,x,y)\\ &\quad=(1-x)^{-\alpha}F_1\left(\alpha,\gamma-\beta-\beta',\beta',\gamma,\frac{x}{x-1},\frac{x-y}{x-1}\right),\end{aligned}\right.$$

d'où, par raison de symétrie,

$$(27')\quad \left\{\begin{aligned} &F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma,x,y)\\ &\quad=(1-y)^{-\alpha}F_1\left(\alpha,\beta,\gamma-\beta-\beta',\gamma,\frac{y-x}{y-1},\frac{y}{y-1}\right).\end{aligned}\right.$$

20. L'expression de F_3 par une intégrale définie permet de démontrer pour cette fonction une proposition intéressante par son analogie avec la question du développement d'une fonction d'une variable en fraction continue.

Supposons, en effet, dans cette formule

$$\beta = \beta' = 1;$$

remplaçons x et y par $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$, puis posons, pour simplifier,

$$f(u, v) = u^{\alpha-1} v^{\alpha'-1} (1 - u - v)^{\gamma-\alpha-\alpha'-1};$$

nous avons

$$\begin{aligned}\iint & \frac{f(u,v)}{\left(1-\frac{u}{x}\right)\left(1-\frac{v}{y}\right)} du\, dv \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha')\Gamma(\gamma-\alpha-\alpha')}{\Gamma(\gamma)} F_3\left(\alpha, \alpha', 1, 1, \gamma, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right).\end{aligned}$$

L'intégrale double du premier membre de cette relation est de la forme de celles qui ont été étudiées par Didon (*Annales de l'École Normale*, 1re série, t. VII, p. 265). Nous allons appliquer à cette intégrale la méthode indiquée par Didon, avec quelques modifications faciles à apercevoir.

Proposons-nous, par analogie avec la question qui se présente dans le développement d'une fonction d'une variable en fraction continue, de former un polynôme $Q(x,y)$ de degré $m+n$, tel que le produit

$$(28) \qquad Q(x,y) F_3\left(\alpha, \alpha', 1, 1, \gamma, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right),$$

ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x et y, ne contienne aucun terme en $\frac{1}{x^h y^k}$, où h et k sont des entiers positifs ou nuls vérifiant les relations

$$(29) \quad h+k < m+n, \quad \text{ou bien} \quad h+k = m+n, \; h \gtrless m, \; k \lessgtr n.$$

Ce polynôme $Q(x,y)$ est déterminé, à un facteur constant près, par ces conditions; je vais montrer que l'on a

$$(30) \qquad Q(x,y) = \frac{1}{f(x,y)} \frac{\partial^{m+n}[x^m y^n (1-x-y)^{m+n} f(x,y)]}{\partial x^m \partial y^n};$$

ce qui constitue une proposition analogue à celle démontrée par Jacobi (*Journal de Crelle*, t. LVI, p. 149) au sujet de la fonction

$$F\left(\alpha, 1, \gamma, \frac{1}{x}\right).$$

Pour démontrer que le polynôme $Q(x,y)$ défini par la formule (30) est bien celui que nous cherchons, remarquons d'abord que l'intégration par parties donne immédiatement, en supposant $\alpha, \alpha', \gamma-\alpha-\alpha'$ positifs,

$$\int\int f(u,v)\,Q(u,v)\,u^h v^k\,du\,dv = 0, \tag{31}$$

les entiers positifs ou nuls h et k vérifiant les conditions (29). Puis considérons l'identité suivante indiquée par Didon (*loc. cit.*, p. 267) :

$$\begin{aligned}Q(x,y)\int\int\frac{f(u,v)\,du\,dv}{\left(1-\frac{u}{x}\right)\left(1-\frac{v}{y}\right)} &= \int\int\frac{Q(x,v)-Q(u,v)}{\left(1-\frac{u}{x}\right)\left(1-\frac{v}{y}\right)}f(u,v)\,du\,dv + \int\int\frac{Q(u,y)-Q(u,v)}{\left(1-\frac{u}{x}\right)\left(1-\frac{v}{y}\right)}f(u,v)\,du\,dv\\ &+ \int\int\frac{Q(u,v)\,f(u,v)}{\left(1-\frac{u}{x}\right)\left(1-\frac{v}{y}\right)}\,du\,dv + xy\int\int\Phi(x,y,u,v)\,f(u,v)\,du\,dv,\end{aligned}$$

où $\Phi(x,y,u,v)$ désigne une fonction entière de x, y, u, v.

Dans le développement du second membre de cette identité suivant les puissances décroissantes de x et y, les termes de la forme $\frac{A_{hk}}{x^h y^k}$, h et k étant des entiers positifs ou nuls, proviennent de la troisième intégrale seulement; en effet, la première est une fonction entière de x contenant x en facteur, la deuxième une fonction entière de y contenant y en facteur, et la quatrième une fonction entière de x et y contenant xy en facteur. Mais, dans le développement de la troisième intégrale, le coefficient A_{hk} de $\frac{1}{x^h y^k}$ est

$$A_{hk} = \int\int f(u,v)\,Q(u,v)\,u^h v^k\,du\,dv,$$

coefficient qui, d'après (31), est nul dès que h et k vérifient les conditions (29). La proposition est donc démontrée, et quoique la démonstration emploie des intégrales multiples qui peuvent cesser d'avoir un sens pour certaines valeurs de α, α', γ, il est évident que la proposition est vraie, quels que soient α, α', γ.

Il est à remarquer que le polynôme (30) $Q(x,y)$ s'exprime de la façon suivante au moyen de la fonction F_2,

$$\begin{aligned} Q(x,y) &= (\alpha, m)(\alpha', n)(1 - x - y)^{m+n} \\ &\times F_2\left(\alpha + \alpha' - \gamma - m - n + 1, -m, -n, \alpha, \alpha', \frac{x}{x+y-1}, \frac{y}{x+y-1}\right), \end{aligned}$$

ainsi qu'on le montre plus loin (§ **27**).

21. On a vu précédemment (§ **14**) que les équations différentielles F_3 se ramènent à la forme F_2 par les substitutions

$$x = \frac{1}{\xi}, \quad y = \frac{1}{\eta}, \quad z = \xi^{\alpha}\eta^{\alpha'} z'.$$

On a donc, en se reportant à l'expression donnée précédemment de l'intégrale générale des équations F_2,

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} &F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y) \\ &\quad = A x^{-\alpha} y^{-\alpha'} F_2\left(\alpha+\alpha'-\gamma+1, \alpha, \alpha', \alpha-\beta+1, \alpha'-\beta'+1, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) \\ &\quad + B x^{-\beta} y^{-\beta'} F_2\left(\beta+\beta'-\gamma+1, \beta, \beta', \beta-\alpha+1, \beta'-\alpha'+1, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) \\ &\quad + C x^{-\alpha} y^{-\beta'} F_2\left(\alpha+\beta'-\gamma+1, \alpha, \beta', \alpha-\beta+1, \beta'-\alpha'+1, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) \\ &\quad + D x^{-\beta} y^{-\alpha'} F_2\left(\beta+\alpha'-\gamma+1, \beta, \alpha', \beta-\alpha+1, \alpha'-\beta'+1, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right), \end{aligned}\right.$$

où A, B, C, D sont des constantes dont voici les valeurs. Posons

$$f(\lambda, \mu, \nu, \rho) = (-1)^{-\lambda}(-1)^{-\mu} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\nu-\lambda)\Gamma(\rho-\mu)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\rho)\Gamma(\gamma-\lambda-\mu)};$$

on a

$$A = f(\alpha, \alpha', \beta, \beta'), \quad B = f(\beta, \beta', \alpha, \alpha'),$$
$$C = f(\alpha, \beta', \beta, \alpha'), \quad D = f(\beta, \alpha', \alpha, \beta').$$

Cette formule (32) est analogue à celle que donne Gauss (*Werke*, III Band, p. 220, éq. 93). On peut obtenir la formule (32) en appliquant la formule de Gauss que je viens de citer à la fonction

$$F(\alpha', \beta', \gamma + m, y),$$

qui entre comme coefficient de x^m dans l'expression de F_2 sous la forme (2), puis ordonnant la fonction obtenue suivant les puissances de $\frac{1}{y}$, et appliquant encore une fois cette formule de Gauss.

L'on obtient par le même procédé la relation

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} &F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y) \\ &\quad = \frac{\Gamma(\gamma')\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma'-\alpha)}(-y)^{-\alpha} F_4\left(\alpha, \alpha+1-\gamma', \gamma, \alpha+1-\beta, \frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right) \\ &\quad + \frac{\Gamma(\gamma')\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma'-\beta)}(-y)^{-\beta} F_4\left(\beta, \beta+1-\gamma', \gamma, \beta+1-\alpha, \frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right), \end{aligned}\right.$$

d'où l'on déduit une relation analogue en permutant x avec y et γ avec γ'.

CHAPITRE IV.

22. Dans ce Chapitre, je m'occupe des propriétés des fonctions définies par l'équation différentielle unique

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} &(x - x^2)r - 2xys + (y - y^2)t \\ &\quad + [\gamma - (\alpha + \delta + 1)x]p + [\gamma' - (\alpha + \delta + 1)y]q - \alpha\delta z = 0, \end{aligned}\right.$$

obtenue en ajoutant membre à membre les équations F_2 et faisant $\beta + \beta' = \delta$. Il suit de là que l'on a une infinité de solutions de cette équation en prenant

$$z = F_2(\alpha, \delta + h, -h, \gamma, \gamma', x, y),$$

h étant une constante arbitraire. On peut remarquer aussi qu'en ajoutant membre à membre les équations F_4, et faisant $x = \frac{x'}{2}$, $y = \frac{y'}{2}$, on obtient une équation différentielle qui est de la forme (34); de sorte que l'on a encore une solution de l'équation (34) en prenant

$$z = F_4\left(\alpha, \delta, \gamma, \gamma', \frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right).$$

D'une manière générale, cherchons à satisfaire à l'équation (34) par une fonction entière

$$z = \sum A_{m,n} x^m y^n.$$

En substituant et égalant à zéro le coefficient de $x^m y^n$, on a

$$\begin{aligned}(m+1)(m+\gamma)A_{m+1,n} + (n+1)(n+\gamma')A_{m,n+1}\\ = (m+n+\alpha)(m+n+\delta)A_{m,n}.\end{aligned}$$

Faisons

$$(35) \qquad A_{m,n} = \frac{(\alpha, m+n)(\delta, m+n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} B_{m,n},$$

on a

$$(36) \qquad B_{m+1,n} + B_{m,n+1} = B_{m,n},$$

équation aux différences finies que l'on peut intégrer par la méthode de Lagrange (*Œuvres*, t. IV, p. 165). On trouve pour l'expression la plus générale de $B_{m,n}$

$$(37) \qquad \left\{\begin{aligned} B_{m,n} = f(m) - \frac{n}{1} f(m+1) + \frac{n(n-1)}{1.2} f(m+2) + \cdots\\ + (-1)^n f(m+n),\end{aligned}\right.$$

ou bien

$$(37') \qquad \left\{\begin{aligned} B_{m,n} = \varphi(n) - \frac{m}{1}\varphi(n+1) + \frac{m(m-1)}{1.2}\varphi(n+2) + \cdots\\ + (-1)^m \varphi(m+n).\end{aligned}\right.$$

les fonctions f et φ étant *arbitraires*. Les deux expressions de $B_{m,n}$ ainsi trouvées ne sont pas distinctes; la première conviendra si l'on donne les coefficients $B_{m,0}$, car elle donne, en faisant $n=0$, $f(m)=B_{m,0}$; la deuxième conviendra si l'on donne les coefficients $B_{0,n}$, car elle donne $\varphi(n)=B_{0,n}$.

En portant l'expression générale de $B_{m,n}$ dans (35), on a l'expression générale de $A_{m,n}$; d'où résulte l'expression suivante de la solution entière la plus générale de l'équation (34) :

$$(38)\quad \Phi(\alpha,\delta,\gamma,\gamma',x,y)=\sum_{m=0,\ n=0}^{m=\infty,\ n=\infty}\frac{(\alpha,m+n)(\delta,m+n)}{(\gamma,m)(\gamma',n)(1,m)(1,n)}B_{m,n}x^m y^n.$$

On voit, en particulier, que la condition nécessaire et suffisante pour que $\Phi(\alpha,\delta,\gamma,\gamma',x,y)$ soit un polynôme est que α ou δ soit égal à un *entier négatif*. Si cette condition est remplie, $\alpha=-N$ par exemple, l'expression (38) donne une *infinité* de polynômes satisfaisant à l'équation (34).

23. Dans l'équation (34) faisons

$$z=x^\lambda y^\mu(1-x-y)^\nu z',$$

et désignons par p', q', r', s', t' les dérivées partielles de z'. L'équation devient, après quelques réductions faciles,

$$\begin{aligned}&(x-x^2)r'-2xys'+(y-y^2)t'\\&\quad+[\gamma+2\lambda-(\alpha+\delta+2\lambda+2\mu+2\nu+1)x]p'\\&\quad+[\gamma'+2\mu-(\alpha+\delta+2\lambda+2\mu+2\nu+1)y]q'\\&\quad-(\alpha+\lambda+\mu+\nu)(\delta+\lambda+\mu+\nu)z'\\&\quad+\frac{\lambda(\lambda+\gamma-1)}{x}z'+\frac{\mu(\mu+\gamma'-1)}{y}z'+\frac{\nu(\alpha+\delta-\gamma-\gamma'+\nu)}{1-x-y}z'=0.\end{aligned}$$

Si l'on donne à λ, μ, ν des valeurs annulant les trois derniers termes :

$$(39)\qquad \left\{\begin{aligned}\lambda(\lambda+\gamma-1)&=0,\\ \mu(\mu+\gamma'-1)&=0,\\ \nu(\alpha+\delta-\gamma-\gamma'+\nu)&=0,\end{aligned}\right.$$

l'équation prend la forme (34) où l'on aurait remplacé α, δ, γ, γ' par $\alpha+\lambda+\mu+\nu$, $\delta+\lambda+\mu+\nu$, $\gamma+2\lambda$, $\gamma'+2\mu$; par suite, elle admet, pour z', la solution

$$z'=\Phi(\alpha+\lambda+\mu+\nu,\ \delta+\lambda+\mu+\nu,\ \gamma+2\lambda,\ \gamma'+2\mu,\ x,y),$$

d'où, pour z,

$$z=x^\lambda y^\mu(1-x-y)^\mu z'.$$

Or, les équations (39) donnent pour λ, μ, ν huit groupes de valeurs; on a ainsi huit solutions de l'équation (34) dont voici le tableau :

λ.	μ.	ν.	
0,	0,	0,	$z_1=\Phi(\alpha,\delta,\gamma,\gamma')$,
$1-\gamma$,	0,	0,	$z_2=x^{1-\gamma}\Phi(\alpha+1-\gamma,\ \delta+1-\gamma,\ 2-\gamma,\ \gamma')$,
0,	$1-\gamma'$,	0,	$z_3=y^{1-\gamma'}\Phi(\alpha+1-\gamma',\ \delta+1-\gamma',\ \gamma,\ 2-\gamma')$,
$1-\gamma$,	$1-\gamma'$,	0,	$z_4=x^{1-\gamma}y^{1-\gamma'}\Phi(\alpha+2-\gamma-\gamma',\ \delta+2-\gamma-\gamma',\ 2-\gamma,\ 2-\gamma')$,
0,	0,	$\gamma+\gamma'-\alpha-\delta$,	$z_5=(1-x-y)^{\gamma+\gamma'-\alpha-\delta}\Phi(\gamma+\gamma'-\delta,\ \gamma+\gamma'-\alpha,\ \gamma,\ \gamma')$.
$1-\gamma$,	0,	$\gamma+\gamma'-\alpha-\delta$,	$z_6=x^{1-\gamma}(1-x-y)^{\gamma+\gamma'-\alpha-\delta}\Phi(\gamma'-\delta+1,\ \gamma'-\alpha+1,\ 2-\gamma,\gamma')$,
0,	$1-\gamma'$,	$\gamma+\gamma'-\alpha-\delta$,	$z_7=y^{1-\gamma'}(1-x-y)^{\gamma+\gamma'-\alpha-\delta}\Phi(\gamma-\delta+1,\ \gamma-\alpha+1,\ \gamma,\ 2-\gamma')$,
$1-\gamma$,	$1-\gamma'$,	$\gamma+\gamma'-\alpha-\delta$,	$z_8=x^{1-\gamma}y^{1-\gamma'}(1-x-y)^{\gamma+\gamma'-\alpha-\delta}\Phi(2-\delta,\ 2-\alpha,\ 2-\gamma,\ 2-\gamma')$.

Dans les fonctions Φ qui figurent dans ce tableau, on a laissé de côté les variables x et y, qui sont les mêmes dans les huit fonctions.

24. Parmi les fonctions qui satisfont à l'équation (34), je considère maintenant celles qui restent finies pour les valeurs réelles de x et y satisfaisant aux conditions

$$(40)\qquad x\geq 0,\quad y\geq 0,\quad 1-x-y\geq 0.$$

Ces fonctions possèdent des propriétés intéressantes que l'on trouve de la façon suivante.

Soit z une fonction satisfaisant à l'équation (34), et z_1 une fonction satisfaisant à l'équation

$$(34')\quad \left\{\begin{aligned}&(x-x^2)r_1-2xys_1+(y-y^2)t_1+[\gamma-(\alpha+\delta+1)x]p_1\\&\qquad+[\gamma'-(\alpha+\delta+1)y]q_1-(\alpha-\lambda)(\delta+\lambda)z_1=0,\end{aligned}\right.$$

obtenue en changeant, dans (34), α en $\alpha-\lambda$ et δ en $\delta+\lambda$ (λ désignant une indéterminée). Multiplions l'équation (34) par z_1, l'équation (34') par $-z$; et ajoutons. Nous avons

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} &(x-x^2)(rz_1-zr_1)-2xy(sz_1-zs_1)+(y-y^2)(tz_1-zt_1)\\ &\quad+[\gamma-(\alpha+\delta+1)x](pz_1-zp_1)\\ &\quad+[\gamma'-(\alpha+\delta+1)y](qz_1-zq_1)-\lambda(\delta-\alpha+\lambda)zz_1=0.\end{aligned}\right.$$

Posons

$$pz_1-zp_1=P,\quad qz_1-zq_1=Q,$$

et remarquons que

$$2(sz_1-zs_1)=\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

L'équation précédente devient

$$\begin{aligned}&(x-x^2)\frac{\partial P}{\partial x}-xy\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}\right)+(y-y^2)\frac{\partial Q}{\partial y}\\ &\quad+[\gamma-(\alpha+\delta+1)x]\,P+[\gamma'-(\alpha+\delta+1)y]\,Q=\lambda(\delta-\alpha+\lambda)zz_1,\end{aligned}$$

ce que l'on peut écrire

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}[x^{\gamma}y^{\gamma'-1}(1-x-y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'}(P-Px-Qy)]\\ &\quad+\frac{\partial}{\partial y}[x^{\gamma-1}y^{\gamma'}(1-x-y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'}(Q-Px-Qy)]\\ &\quad=\lambda(\delta-\alpha+\lambda)x^{\gamma-1}y^{\gamma'-1}(1-x-y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'}zz_1.\end{aligned}$$

Remplaçons dans le premier membre

$$P-Px-Qy\quad\text{par}\quad P(1-x-y)+y(P-Q)$$

et

$$Q-Px-Qy\quad\text{par}\quad Q(1-x-y)-x(P-Q),$$

l'équation devient

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}[x^{\gamma}y^{\gamma'-1}(1-x-y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'+1}P]\\ &\quad+\frac{\partial}{\partial y}[x^{\gamma-1}y^{\gamma'}(1-x-y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'+1}Q]+\frac{\partial H}{\partial x}-\frac{\partial H}{\partial y}\\ &\quad=\lambda(\delta-\alpha+\lambda)x^{\gamma-1}y^{\gamma'-1}(1-x-y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'}zz_1,\end{aligned}\right.$$

où

$$\mathrm{H} = x^{\gamma} y^{\gamma'} (1 - x - y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'} (\mathrm{P} - \mathrm{Q}).$$

Cela posé, supposons que les fonctions z, z_1 restent finies pour les valeurs réelles de x et y satisfaisant aux inégalités (40), et que les fonctions Q, P, P — Q soient, aux limites, finies ou infinies d'ordre moindre que $\frac{1}{x^{\gamma}}, \frac{1}{y^{\gamma'}}, \frac{1}{(1-x-y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'+1}}$.

Multiplions les deux membres de l'équation (42) par $dx\,dy$, et prenons l'intégrale double étendue aux valeurs de x et y satisfaisant aux inégalités (40), en supposant, en outre,

$$(43) \qquad \gamma > 0, \quad \gamma' > 0, \quad \alpha + \delta - \gamma - \gamma' + 1 > 0.$$

On voit immédiatement que les intégrales provenant des deux premiers termes du premier membre sont nulles. Je vais montrer que l'intégrale

$$\iint \left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y} \right) dx\,dy$$

est nulle. Pour évaluer cette intégrale, faisons un changement de variables et posons

$$x = t + u, \quad y = t - u,$$

d'où

$$\mathrm{H} = (t+u)^{\gamma} (t-u)^{\gamma'} (1 - 2t)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'} (\mathrm{P} - \mathrm{Q}).$$

On voit que

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u},$$

et l'on a

$$\iint \left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y} \right) dx\,dy = 2 \iint \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u}\, du\,dt.$$

Dans la nouvelle intégrale, on peut intégrer par rapport à u; l'intégrale indéfinie est H; elle doit être prise entre les limites $u = -t$, $u = +t$; or, H s'annule aux deux limites, car γ et γ' sont positifs. L'intégrale est donc nulle, et l'on a

$$\lambda(\delta - \alpha + \quad) \iint x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} (1 - x - y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'} z z_1\, dx\,dy = 0.$$

On conclut de là que l'intégrale double

$$(44) \qquad I = \int\int x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} (1 - x - y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'} z z_1 \, dx \, dy$$

est nulle tant que

$$(44') \qquad \lambda(\delta - \alpha + \lambda) \gtrless 0.$$

25. Comme nous l'avons dit, ce théorème s'applique à deux fonctions z et z_1, solutions respectives des équations (34) et (34′), ces fonctions restant finies pour les valeurs (40) auxquelles s'étend l'intégration, et les trois fonctions Q, P, (P — Q) devenant aux limites infinies d'ordre moindre que $\frac{1}{x^\gamma}$, $\frac{1}{y^{\gamma'}}$, $\frac{1}{(1 - x - y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'+1}}$.

Ces conditions sont évidemment remplies dans le cas particulier où les deux fonctions z et z_1 sont des polynômes; et alors la condition (44′) exprime que les deux polynômes sont de degrés différents, car nous avons vu précédemment que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (34) admette comme solution un polynôme de degré k est

$$(\alpha + k)(\delta + k) = 0.$$

On peut encore démontrer que cette condition est nécessaire, en remarquant que, si l'équation (34) est vérifiée par un polynôme z de degré k, l'équation différentielle qui donne la fonction

$$U = \frac{d^{m+n} z}{dx^m \, dy^n}, \quad (m + n = k)$$

doit être vérifiée par U = const. Or, on forme facilement cette équation en différentiant le premier membre de l'équation (34) m fois par rapport à x et n fois par rapport à y; le coefficient de U dans l'équation obtenue est $(\alpha + k)(\delta + k)$; comme il doit être nul, on en conclut la condition indiquée.

26. Je vais appliquer la théorie générale précédente à certains polynômes particuliers qui présentent la plus grande analogie avec les polynômes de Jacobi.

Soit

$$U_{m,n} = x^{1-\gamma} y^{1-\gamma'} \frac{\partial^{m+n}[x^{m+\gamma-1} y^{n+\gamma'-1}(1-x-y)^{m+n}]}{\partial x^m \, \partial y^n}.$$

On voit facilement, en employant une méthode analogue à celle indiquée par Didon (*Annales de l'École Normale*, t. V, p. 235), que ce polynôme satisfait aux équations

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned} &(x-x^2)r - xys + [\gamma-(1+\gamma-n)x]p \\ &\qquad -(m+\gamma)yq + (m+n)(m+\gamma)z = 0, \\ &(y-y^2)t - xys + [\gamma'-(1+\gamma'-m)y]q \\ &\qquad -(n+\gamma')xp + (m+n)(n+\gamma')z = 0. \end{aligned}\right.$$

Comme, en outre, ce polynôme se réduit à $(\gamma, m)(\gamma', n)$ pour $x = y = 0$, on a

$$U_{m,n} = (\gamma, m)(\gamma', n) F_2[-(m+n), m+\gamma, n+\gamma', \gamma, \gamma', x, y].$$

En ajoutant membre à membre les équations (45), on obtient l'équation

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned} &(x-x^2)r - 2xys + (y-y^2)t \\ &\quad + [\gamma-(1+\gamma+\gamma')x]p \\ &\quad + [\gamma'-(1+\gamma+\gamma')y]q + (m+n)(m+n+\gamma+\gamma')z = 0, \end{aligned}\right.$$

qui rentre dans le type (34), en faisant

$$\alpha = -(m+n), \quad \delta = m+n+\gamma+\gamma'.$$

Donc, en supposant $\gamma > 0$, $\gamma' > 0$ et appliquant la formule générale, on trouve que l'intégrale

$$(47)\qquad I_{m,n}^{\mu,\nu} = \iint x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} U_{m,n} U_{\mu,\nu}\, dx\, dy = 0,$$

tant que $m + n \gtrless \mu + \nu$; l'intégrale étant étendue, comme précédemment, aux valeurs de x et y, telles que

$$(40)\qquad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 1 - x - y \geq 0.$$

La formule (47) pourrait ici se démontrer directement de la façon suivante. Soit Z un polynôme quelconque, et considérons l'intégrale double

$$\mathrm{J} = \iint x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} \mathrm{U}_{m,n} \mathrm{Z}\, dx\, dy$$
$$= \iint \frac{\partial^{m+n}[x^{m+\gamma-1} y^{n+\gamma'-1}(1-x-y)^{m+n}]}{\partial x^m\, \partial y^n} \mathrm{Z}\, dx\, dy.$$

En intégrant par parties m fois par rapport à x et n fois par rapport à y, on trouve

$$\mathrm{J} = (-1)^{m+n} \iint x^{m+\gamma-1} y^{n+\gamma'-1}(1-x-y)^{m+n} \frac{\partial^{m+n}\mathrm{Z}}{\partial x^m\, \partial y^n}\, dx\, dy.$$

On voit immédiatement que J est nul si Z est un polynôme de degré moindre que $m+n$, ou un polynôme de degré $m+n$ ne contenant pas de terme en $x^m y^n$. Faisons en particulier, dans J, $\mathrm{Z} = \mathrm{U}_{\mu,\nu}$ avec $m+n = \mu+\nu$; alors la formule précédente donne

$$\mathrm{I}_{m,n}^{\mu,\nu} = (-1)^{m+n} \iint x^{m+\gamma-1} y^{n+\gamma'-1}(1-x-y)^{m+n} \frac{\partial^{m+n}\mathrm{U}_{\mu,\nu}}{\partial x^m\, \partial y^n}\, dx\, dy.$$

Mais $\dfrac{\partial^{m+n}\mathrm{U}_{\mu,\nu}}{\partial x^m\, \partial y^n}$ est une constante qu'il est facile de calculer d'après l'expression de $\mathrm{U}_{\mu,\nu}$ au moyen de F_2; on a ainsi

$$\frac{\partial^{m+n}\mathrm{U}_{\mu,\nu}}{\partial x^m\, \partial y^n} = (-1)^{m+n} \frac{(\gamma,\mu)(\gamma',\nu)(\gamma+\mu,m)(\gamma'+\nu,n)(1,m+n)}{(\gamma,m)(\gamma',n)};$$

comme, d'autre part, l'intégrale $\iint x^{m+\gamma-1} y^{n+\gamma'-1}(1-x-y)^{m+n}\, dx\, dy$ est égale à

$$\frac{\Gamma(m+\gamma)\,\Gamma(n+\gamma')\,\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(2m+2n+\gamma+\gamma'+1)},$$

on a donc

$$(48)\qquad {}_{m,n}^{\mu,\nu} = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma')\,\Gamma^2(m+n+1)}{\Gamma(2m+2n+\gamma+\gamma'+1)}(\gamma,\mu+m)(\gamma',\nu+n), \quad (\mu+\nu = m+n).$$

Ces formules (47) et (48) *suffisent* pour calculer les coefficients du développement d'une fonction de deux variables en série de polynômes $U_{m,n}$. En effet, soit à développer $F(x,y)$ en série de la forme

$$F(x,y) = \Sigma A_{m,n} U_{m,n}. \tag{49}$$

Voici comment on peut calculer les coefficients des polynômes $U_{m,n}$ de degré donné k, $m+n=k$. Multiplions les deux membres de l'équation (49) par $x^{\gamma-1}y^{\gamma'-1}U_{\mu,\nu}\,dx\,dy$, en supposant $\mu+\nu=k$, et intégrons entre les limites déjà indiquées. Dans le deuxième membre, toutes les intégrales sont nulles, sauf celles qui répondent aux polynômes de degré k, et l'on a

$$(50)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int\int F(x,y)x^{\gamma-1}y^{\gamma'-1}U_{\mu,\nu}\,dx\,dy \\ &\quad = A_{k,0}I^{\mu,\nu}_{k,0} + A_{k-1,1}I^{\mu,\nu}_{k-1,1} + \ldots + A_{k-i,i}I^{\mu,\nu}_{k-i,i} + \ldots + A_{0,k}I^{\mu,\nu}_{0,k}. \end{aligned} \right.$$

Les entiers μ et ν étant assujettis à la seule condition $\mu+\nu=k$, on pourra leur donner $(k+1)$ systèmes de valeurs qui fourniront $k+1$ équations telles que (50). De ces $(k+1)$ équations, on tirera les $k+1$ coefficients

$$A_{k,0},\ A_{k-1,1},\ \ldots,\ A_{k-i,i},\ \ldots,\ A_{0,k}.$$

La méthode précédente de détermination des coefficients pourra s'appliquer à tous les développements en série de fonctions possédant des propriétés analogues à celles exprimées par les équations (47) et (48). La résolution des équations du premier degré, telles que (50), conduira à former un polynôme $V_{m,n}$ tel que l'intégrale

$$\int\int x^{\gamma-1}y^{\gamma'-1}U_{m,n}V_{\mu,\nu}\,dx\,dy$$

soit nulle tant que l'on n'a pas $m=\mu$, $n=\nu$. Mais, dans le cas actuel, il est une façon plus simple d'obtenir ce polynôme de la façon suivante. Posons, en effet,

$$V_{m,n} = F_2(m+n+\gamma+\gamma',\ -m,\ -n,\ \gamma,\ \gamma',\ x,\ y).$$

On voit que $V_{m,n}$ est un polynôme de degré $m+n$, renfermant un seul terme de degré $m+n$, le terme en $x^m y^n$. Ce polynôme $V_{m,n}$ satisfait à l'équation (46), à laquelle satisfait déjà le polynôme $U_{m,n}$, ainsi qu'il est facile de le voir d'après la théorie générale. Par suite on a, d'après la formule (44), en faisant

$$K_{m,n}^{\mu,\nu} = \int\int x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} U_{m,n} V_{\mu,\nu}\, dx\, dy,$$

$K_{m,n}^{\mu,\nu} = 0$ tant que $m+n \gtrless \mu+\nu$. Supposons maintenant $m+n=\mu+\nu$. Alors, d'après un calcul déjà fait,

$$K_{m,n}^{\mu,\nu} = (-1)^{m+n} \int\int x^{m+\gamma-1} y^{n+\gamma'-1} (1-x-y)^{m+n} \frac{\partial^{m+n} V_{\mu,\nu}}{\partial x^m \partial y^n}\, dx\, dy.$$

Mais, comme $V_{\mu,\nu}$ contient un *seul terme* de degré $m+n$, à savoir le terme $x^\mu y^\nu$, on voit que $K_{m,n}^{\mu,\nu}$ est nul tant que l'on n'a pas $\mu = m$, $\nu = n$. Si l'on remarque en outre que

$$\frac{\partial^{m+n} V_{m,n}}{\partial x^m \partial y^n} = (-1)^{m+n} \frac{(m+n+\gamma+\gamma',\, m+n)}{(\gamma,\, m)(\gamma',\, n)} (1, m)(1, n),$$

on voit que

$$K_{m,n}^{m,n} = \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)\Gamma(m+n+1)\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')}{\Gamma(m+n+\gamma+\gamma')(2m+2n+\gamma+\gamma')}.$$

Si alors on veut trouver les coefficients du développement (49), on voit immédiatement, en multipliant les deux membres par

$$x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} V_{m,n}\, dx\, dy$$

et intégrant, que

$$A_{m,n} = \frac{1}{K_{m,n}^{m,n}} \int\int x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} V_{m,n} F(x, y)\, dx\, dy.$$

27. Les polynômes

$$W_{m,n} = x^{1-\gamma} y^{1-\gamma'} (1-x-y)^{\gamma+\gamma'-\delta+m+n} \frac{\partial^{m+n}[x^{m+\gamma-1} y^{n+\gamma'-1} (1-x-y)^{\delta-\gamma-\gamma'}]}{\partial x^m \partial y^n}$$

possèdent des propriétés analogues. On voit facilement que ces polynômes satisfont à l'équation différentielle (34), dans laquelle

$$\alpha = -(m+n).$$

On a, en outre ([1]),

$$W_{m,n} = (\gamma, m)(\gamma', n)(1-x-y)^{m+n} F_2\left(\gamma+\gamma'-\delta, -m, -n, \gamma, \gamma', \frac{x}{x+y-1}, \frac{y}{x+y-1}\right).$$

28. Faisons dans l'équation différentielle (34) la substitution $x = \xi^2$, $y = \eta^2$; elle devient

$$(51)\quad \begin{cases} (1-\xi^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - 2\eta\xi\dfrac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta} \\ \quad + (1-\eta^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} + \left[(2\gamma-1)\dfrac{1}{\xi} - (2\alpha+2\delta+1)\xi\right]\dfrac{\partial z}{\partial\xi} \\ \quad\quad + \left[(2\gamma'-1)\dfrac{1}{\eta} - (2\alpha+2\delta+1)\eta\right]\dfrac{\partial z}{\partial\eta} - 4\alpha\delta z = 0. \end{cases}$$

Supposons, en particulier,

$$\gamma = \gamma' = \tfrac{1}{2},$$

l'équation devient

$$(52)\quad \begin{cases} (1-\xi^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial\xi^2} - 2\eta\xi\dfrac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta} \\ \quad + (1-\eta^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} - (2\alpha+2\delta+1)\left(\xi\dfrac{\partial z}{\partial\xi} + \eta\dfrac{\partial z}{\partial\eta}\right) - 4\alpha\delta z = 0, \end{cases}$$

équation qui possède la propriété de ne pas changer quand on y fait la substitution

$$\xi = \xi'\cos\theta - \eta'\sin\theta, \quad \eta = \xi'\sin\theta + \eta'\cos\theta.$$

Pour les fonctions satisfaisant à cette équation (52) la formule (44) devient

$$\iint x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} (1-x-y)^{\alpha+\delta-1} z z_1\, dx\, dy = 0,$$

à condition que

$$\lambda(\delta - \alpha + \lambda) \gtrless 0;$$

([1]) Voir *Archiv der Mathematik und Physik* de Grünert, 1881, t. LXVI, p. 238.

et, en remplaçant les variables x et y par ξ^2, η^2,

$$(53) \qquad \iint (1-\xi^2-\eta^2)^{\alpha+\delta-1} z z_1 \, d\xi \, d\eta = 0,$$

l'intégration étant étendue aux valeurs de ξ, η telles que $1-\xi^2-\eta^2 \geq 0$.

Parmi les fonctions particulières précédentes se trouvent :

1° Les polynômes de M. Hermite $U'_{m,n} = \dfrac{\partial^{m+n}(\xi^2+\eta^2-1)^{m+n}}{\partial\xi^m \, \partial\eta^n}$ et les polynômes adjoints $V'_{m,n}$ (Mémoire de Didon, *Annales de l'École Normale*, t. V, p. 237 et 243). Pour ces fonctions, $\alpha = -\dfrac{m+n}{2}$, $\delta = \dfrac{m+n}{2}+1$.

2° Les fonctions plus générales considérées par Didon

$$P_{m,n} = \frac{\partial^{m+n}(\xi^2+\eta^2-1)^{m+n+h}}{\partial\xi^m \, \partial\eta^n}$$

(*loc. cit.*, p. 272). Pour ces fonctions, $\alpha = -\dfrac{m+n}{2}+h$, $\delta = \dfrac{m+n}{2}+1$, par suite $\alpha+\delta = h+1$. En particulier, on a les fonctions répondant à $h=\frac{1}{2}$, $h=-\frac{1}{2}$ (*loc. cit.*, p. 275). (Toutes ces fonctions peuvent d'ailleurs s'exprimer à l'aide de la fonction F_2).

3° Les fonctions sphériques. Prenons en effet l'équation différentielle de la fonction Y_n,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2} + \cot\theta \frac{\partial z}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2} + n(n+1)z = 0,$$

et faisons

$$\sin\theta\cos\varphi = \xi, \quad \sin\theta\sin\varphi = \eta.$$

L'équation devient

$$(1-\xi^2)\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2} - 2\xi\eta\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta} + (1-\eta^2)\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} - 2\eta\frac{\partial z}{\partial\eta} - 2\xi\frac{\partial z}{\partial\xi} + n(n+1)z = 0,$$

équation qui devient identique à l'équation (52) lorsqu'on donne, dans cette dernière, à α et δ les valeurs

$$\alpha = -\frac{n}{2}, \quad \delta = \frac{n+1}{2}.$$

La formule (53) donne alors la formule bien connue qui sert à trouver les coefficients du développement d'une fonction de deux variables en série de fonctions sphériques.

29. *Sur quelques cas limites des fonctions précédentes.* — Les polynômes à une variable dont s'occupe M. Hermite (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LVIII, p. 93-266) peuvent être considérés comme limites de certains polynômes de Jacobi. En effet, les polynômes de Jacobi (*Journal de Crelle*, t. 56, p. 149) satisfont à l'identité

$$(54)\quad F(\alpha+n, -n, \gamma, x) = \frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} \frac{d^n[x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma}]}{dx^n}.$$

Supposons que l'on ait

$$\gamma - 1 = \alpha - \gamma,$$

d'où

$$\gamma = \frac{\alpha+1}{2}, \quad \gamma - 1 = \frac{\alpha-1}{2}, \quad \alpha - \gamma = \frac{\alpha-1}{2},$$

et faisons

$$x = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}\right),$$

ξ étant une nouvelle variable. L'équation (42) devient

$$(55)\quad \left\{ \begin{aligned} & F\left[\alpha+n, -n, \frac{\alpha+1}{2}, \frac{1}{2}\left(1+\frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}\right)\right] \\ & \quad = \frac{\left(1-\frac{\xi^2}{\alpha}\right)^{-\frac{\alpha-1}{2}}}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} \alpha^{\frac{n}{2}} \frac{d^n\left(1-\frac{\xi^2}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha-1}{2}+n}}{d\xi^n}, \end{aligned} \right.$$

d'où enfin

$$\begin{aligned} & \left(1-\frac{\xi^2}{\alpha}\right)^{-\frac{\alpha-1}{2}} \frac{d^n\left(1-\frac{\xi^2}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha-1}{2}+n}}{d\xi^n} \\ & \quad = \frac{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}{\alpha^{\frac{n}{2}}} F\left[\alpha+n, -n, \frac{\alpha+1}{2}, \frac{1}{2}\left(1+\frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}\right)\right]. \end{aligned}$$

Faisons croître α indéfiniment par valeurs positives, cette identité devient

$$e^{+\frac{\xi^2}{2}} \frac{d^n e^{-\frac{\xi^2}{2}}}{d\xi^n} = \lim \frac{\left(\frac{\alpha+1}{2}, n\right)}{\alpha^{\frac{n}{2}}} \mathrm{F}\left[\alpha+n, -n, \frac{\alpha+1}{2}, \frac{1}{2}\left(1+\frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}\right)\right],$$

où le premier membre est un polynôme de M. Hermite.

Les polynômes de deux variables analogues aux précédents considérés par M. Hermite se rattachent d'une façon semblable aux fonctions précédentes satisfaisant à l'équation (44). Pour le montrer, je rappelle que le polynôme

$$\mathrm{U}_{m,n}^{n} = (-1)^{m+n} e^{\frac{1}{2}(ax^2+2bxy+cy^2)} \frac{\partial^{m+n} e^{-\frac{1}{2}(ax^2+2bxy+cy^2)}}{\partial x^m \, \partial y^n}$$

de M. Hermite satisfait à l'équation différentielle

$$(56) \qquad \left\{ \begin{array}{l} c\dfrac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x^2} + a\dfrac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial y^2} - 2b\dfrac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x \, \partial y} \\ \quad -(ac-b^2)\left[x\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + y\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} - (m+n)\mathrm{U}\right] = 0, \end{array} \right.$$

ainsi qu'il résulte des équations simultanées indiquées par M. Hermite (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LVIII, p. 93-266). Dans l'équation (56), faisons

$$(57) \qquad x = \frac{1}{\sqrt{a}}x' - \frac{b}{\sqrt{a\Delta}}y', \quad y = \sqrt{\frac{a}{\Delta}}\,y', \quad \Delta = ac - b^2;$$

elle devient

$$(58) \qquad \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial y'^2} - \left(x'\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x'} + y'\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y'}\right) + (m+n)\mathrm{U} = 0.$$

Cela posé, dans l'équation générale (52), faisons

$$\delta = -\frac{m+n}{2}, \quad \alpha = \frac{m+n}{2} + t, \quad \xi = \frac{x'}{\sqrt{2t}}, \quad \eta = \frac{y'}{\sqrt{2t}};$$

cette équation prend la forme

$$(2t - x'^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2} - 2x'y'\frac{\partial^2 z}{\partial x'\,\partial y'} + (2t - y'^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y'^2}$$
$$-(2t+1)\left(x'\frac{\partial z}{\partial x'} + y'\frac{\partial z}{\partial y'}\right) + (m+n)(2t+m+n)z = 0.$$

Si l'on fait croître t indéfiniment, après avoir divisé tous les termes par t, cette équation tend vers une équation limite qui n'est autre que l'équation (58), à laquelle satisfait le polynôme $U''_{m,n}$.

L'équation (53) donne, comme on le voit immédiatement, la propriété fondamentale des polynômes $U''_{m,n}$. En effet, faisons-y d'abord

$$\xi = \frac{x'}{\sqrt{2t}}, \quad \eta = \frac{y'}{\sqrt{2t}},$$

et faisons croître t indéfiniment; elle donne

$$\iint e^{-\frac{1}{2}(x'^2+y'^2)} z z_1 \, dx'\, dy' = 0,$$

l'intégrale étant étendue à toutes les valeurs des variables. Puis, d'après (57), faisons

$$y' = y\sqrt{\frac{\Delta}{a}}, \quad x' = x\sqrt{a} + \frac{b}{\sqrt{a}}y,$$

nous avons

$$\iint e^{-\frac{1}{2}(ax^2+2bxy+cy^2)} z z_1 \, dx\, dy = 0,$$

ce qui est la propriété bien connue de ces polynômes $U''_{m,n}$.