JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. MANNHEIM

Sur la détermination, en un point d'une surface du second ordre, des axes de l'indicatrice et des rayons de courbure principaux

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 8 (1882), p. 167-172.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1882_3_8__167_0>

Sur la détermination, en un point d'une surface du second ordre, des axes de l'indicatrice et des rayons de courbure principaux (1);

PAR M. A. MANNHEIM.

Appelons (E) la surface du second ordre, o son centre et m le point pour lequel nous cherchons les éléments de courbure de cette surface. Nous supposons connus les plans principaux de (E) et son plan tangent en m. Proposons-nous d'abord de construire les axes de l'indicatrice de (E) pour le point m.

Appelons x, y, z les points de rencontre du plan tangent en m avec les trois axes de (E). Prenons x comme sommet d'un cône que nous circonscrivons à (E). Le plan de la courbe de contact de ce cône est parallèle au plan (oy, oz), et la trace de ce plan sur le plan tangent (xyz) est la parallèle à yz menée du point m. Cette parallèle et mx sont alors deux diamètres conjugués de l'indicatrice de la surface (E) en m. Ceci peut se répéter en prenant les cônes circonscrits à (E) qui ont pour sommet y ou z.

Nous trouvons ainsi que les droites mx, my, mz et les parallèles aux côtés du triangle xyz, issues du point m, sont trois couples de dia-

---

(1) *Voir* sur le même sujet un article que M. Laguerre a publié dans ce Journal, 3e série, t. IV, p. 247.

mètres conjugués de l'indicatrice en m et forment alors un faisceau de six droites en involution [1].

L'ensemble de tous les systèmes de diamètres conjugués de l'indicatrice forme deux faisceaux en involution, et comme *dans deux faisceaux en involution il existe toujours un système de deux rayons conjugués rectangulaires, et qu'il n'en existe qu'un* [2], nous n'avons qu'à construire ce système de rayons rectangulaires pour avoir les axes de l'indicatrice en m.

Effectuons cette construction, qui n'est autre que la construction connue à l'aide de laquelle on détermine la direction des axes d'une conique dont on donne en direction deux systèmes de diamètres conjugués.

Sur yz, prenons le segment compris entre le point y et la parallèle à xz menée du point m. Sur ce segment comme diamètre, décrivons une circonférence de cercle. Élevons une perpendiculaire à yz à partir du point où cette droite est rencontrée par xm. Cette perpendiculaire rencontre en deux points la circonférence que nous venons de décrire : les droites qui joignent ces deux points au point m comprennent entre elles des angles dont les bissectrices sont les axes de l'indicatrice en m.

Par les quatre points m, x, y, z, faisons passer une hyperbole équilatère. On sait que cette courbe passe par le point de rencontre des hauteurs du triangle xyz (ce point est le pied p de la perpendiculaire abaissée du centre o sur le plan tangent xyz). Coupons cette hyperbole par la droite à l'infini sur son plan. Joignons, par des droites, le point m aux points où cette droite rencontre l'hyperbole et les côtés du quadrilatère $mxyz$. Nous obtenons ainsi : les parallèles menées du point m aux asymptotes de la courbe, les droites mx, mz et les parallèles menées du point m aux côtés xy, yz. D'après le théorème de Desargues, ces droites forment un faisceau en involution. En rapprochant ce résultat de ce qui précède, nous voyons que :

---

(1) On sait du reste, indépendamment de ce que nous venons de dire, que : *si par un même point on mène des droites aux trois sommets d'un triangle, et des parallèles aux trois côtés, ces six droites forment trois groupes en involution.* (CHASLES, *Traité de Géométrie supérieure,* 2e édition, p. 247.)

(2) *Loc. cit.*, p. 165.

Les axes de l'indicatrice en m sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole équilatère qui passe par les points m, x, y, z (¹).

Dans cette hyperbole, nous avons deux triangles inscrits : ce sont xyz et le triangle formé par la droite de l'infini et les parallèles aux asymptotes menées de m. Les six côtés de ces triangles sont alors tangents à une conique. Cette conique est une parabole, puisqu'elle est tangente à la droite de l'infini. Le point m est un point de la directrice de cette parabole, ainsi que le point p. Nous avons alors ce théorème :

Les axes de l'indicatrice en m sont tangents à la parabole inscrite dans le triangle xyz et dont la directrice est la droite qui joint le point m au pied de la perpendiculaire abaissée du centre o sur le plan tangent (xyz) (²).

Appelons N la normale en m à (E), et N′, N″ les axes de l'indicatrice de (E) en m. Désignons par a, b, c les points de rencontre de N avec les plans principaux de (E) ; de même, pour N′, on a les points a', b', c', et pour N″ les points a'', b'', c''. Nous venons de démontrer que les droites N′, N″, $a'a''$, $b'b''$, $c'c''$ sont tangentes à une même parabole, et, comme nous pouvons appliquer le même théorème aux deux surfaces homofocales (H′), (H″) à (E) qui passe par m, nous voyons que dans chacun des plans (N, N′), (N, N″) nous avons aussi une parabole tangente aux plans principaux de (E) ; l'une est tangente à N et N′, l'autre est tangente à N et N″.

Considérons en particulier la parabole qui, sur le plan (N, N′), est tangente aux droites N, N′, aa', bb', cc'. Les tangentes à cette parabole déterminent sur deux tangentes fixes des segments proportionnels. Prenons comme tangentes fixes N et la tangente qui est infiniment voisine

---

(¹) Il résulte de là ce théorème connu : *Les axes de* (E), *le diamètre om et les parallèles menées du point o aux axes de l'indicatrice en m appartiennent à un même cône du second ordre.*

(²) On peut arriver à ce théorème sans passer par le théorème précédent en appliquant le corrélatif du théorème de Desargues.

de celle-ci. Puisque cette dernière droite est dans le plan d'une section principale de (E) et qu'elle est partagée, comme N, par N′ et les plans principaux, elle est, dans le plan (N, N′), la normale de (E) qui est infiniment voisine de N ([1]). Le point de rencontre μ_1 de ces deux tangentes infiniment voisines, qui est le point où la parabole touche N, est alors le centre de courbure principal de la section faite dans (E) par le plan NN′ ([2]). De même, on a sur N′ le point de contact μ'_1 de cette droite avec la parabole, qui est le centre de courbure principal de la section faite dans (H′) par le plan (N, N′). Ce que nous venons de trouver pour la parabole inscrite dans l'angle (N, N′) peut se répéter pour les deux autres. On voit donc que *ces trois paraboles touchent les droites* N, N′, N″ *aux six centres de courbures principaux des surfaces homofocales* (E), (H′), (H″).

La même propriété des tangentes à une parabole nous donne aussi $\frac{ab}{bc} = \frac{a'b'}{b'c'}$, et comme ce dernier rapport est égal à $\frac{a''b''}{b''c''}$, nous retrouvons ce théorème : *Les normales en m aux trois surfaces homofocales qui passent par ce point sont partagées par les plans principaux en segments proportionnels.*

En appliquant toujours la propriété des tangentes à une parabole de déterminer sur deux tangentes fixes des segments proportionnels, on voit encore que :

Le centre de courbure μ_1, situé sur la normale N *à* (E), *est placé, par rapport aux points a, b, c où cette normale rencontre les plans principaux,*

([1]) Je m'appuie ici sur cette propriété que les normales d'une surface du second ordre sont partagées par cette surface et par ses plans principaux en segments proportionnels, propriété qui permet aussi d'arriver directement à la parabole employée ici.

([2]) On peut donc énoncer pour l'espace un théorème analogue à celui-ci : *La parabole tangente aux axes d'une ellipse ainsi qu'à la tangente et à la normale passant par un point donné touche cette normale au centre de courbure de l'ellipse,* théorème que j'ai donné en 1857, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, p. 328.

comme le point m est placé sur N′, *par rapport aux points* a', b', c', *où cette normale rencontre les plans principaux.*

De même, *l'autre centre de courbure principal* μ_2 *situé sur* N *est placé par rapport aux points a, b, c comme m est placé sur* N″ *par rapport aux points* a'', b'', c''.

D'après cela, on peut construire μ_1 et μ_2 de bien des manières différentes. Voici une des constructions donnant ces points :

Par les points a, a', a'', *on mène des plans respectivement perpendiculaires à* N, N′, N″; *ces plans se coupent en un point* α. *De même, les points* b, b', b'' *conduisent de la même manière à un point* β. *Les projections de la droite* $\alpha\beta$ *sur les plans des sections principales* (N, N′), (N, N″) *de* (E) *rencontrent* N *aux centres de courbure principaux* μ_1, μ_2.

Cette même droite $\alpha\beta$ conduit aussi aux centres de courbure principaux des surfaces (H′), (H″), ainsi qu'aux axes de courbure des lignes de courbure suivant lesquelles les trois surfaces homofocales (E), (H′), (H″) se coupent deux à deux.

Il est, en effet, assez facile, d'après ce qui précède, de démontrer la propriété suivante :

Trois surfaces homofocales du second ordre se coupent en un point m. Les normales à ces surfaces en ce point sont N, N′, N″. *Ces normales rencontrent les plans principaux des surfaces homofocales, la première en* a, b, c, *la deuxième en* a', b', c', *et la troisième en* a'', b'', c''. *On élève respectivement de ces points des plans perpendiculaires à ces normales. Les plans issus des points* a, a', a'' *se coupent en* α. *On obtient de même un point* β *pour* b, b', b'' *et un troisième point* γ *pour* c, c', c''. *Ces trois points* α, β, γ *appartiennent à une même droite* Λ.

Les projections de Λ *sur les plans déterminés par les normales* N, N′, N″, *prises deux à deux, rencontrent ces normales aux centres de courbure principaux des trois surfaces homofocales.*

Ces centres de courbure sont alors aussi les projections sur les normales N, N′, N″ *des points où* Λ *perce les plans déterminés par ces nor-*

males, prises deux à deux. La droite qui joint les projections sur deux de ces normales du point où Λ *perce le plan de ces droites est l'axe de courbure de la ligne d'intersection des surfaces homofocales normales en* m *à ce plan* (1).

(1) Voir une Note que j'ai communiquée à la Société Royale de Londres dans la séance du 16 mars 1882.