JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

É. WEST

Exposé des méthodes en Mathématiques, d'après Wronski

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 8 (1882), p. 125-166.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1882_3_8__125_0>

Exposé des méthodes en Mathématiques, d'après Wronski

(TROISIÈME NOTE);

PAR M. É. WEST.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

(SUITE.)

Résumé de la méthode d'intégration. — Pour résumer ce que nous avons dit de l'intégration des équations différentielles qui ne contiennent qu'une variable indépendante x, nous rappellerons qu'en désignant par y la fonction inconnue, nous avons représenté l'équation différentielle proposée par

$$(a) \qquad \varphi(y) = 0;$$

de plus, F étant une fonction explicite de y, nous avons trouvé pour l'expression de cette fonction

$$\begin{aligned} F(y) = F(w) &- \frac{\varphi(w)}{d\varphi(w)} dF(w) \\ &+ \frac{1}{2}[\varphi(w)]^2 \frac{d\varphi(w)\, d^2F(w) - d^2\varphi(w)\, dF(w)}{(d\varphi(w)^3)} - \dots, \end{aligned}$$

ou, en introduisant les dérivées par rapport à x pour l'exécution des calculs,

$$(b) \left\{ \begin{aligned} F(y) = F(w) &- \frac{\varphi(w)}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)} \left(\frac{dF(w)}{dx}\right) \\ &+ \frac{1}{2}[\varphi(w)]^2 \frac{1}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)^3} \left[\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)\left(\frac{d^2F(w)}{dx^2}\right) - \left(\frac{d^2\varphi(w)}{dx^2}\right)\left(\frac{dF(w)}{dx}\right)\right] - \dots \end{aligned} \right.$$

$\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)$ désigne spécialement la dérivée par rapport à x de la fonction $\varphi(w)$ considérée seulement comme fonction de w.

L'intégration de l'équation proposée est donnée au moyen d'une fonction w complètement arbitraire en principe; mais dans les applications, pour que le développement soit convergent, il faut que cette fonction w soit aussi rapprochée que possible de la fonction inconnue y. S'il existe plusieurs solutions, l'expression précédente les donnera en général, pourvu que la fonction w soit convenablement choisie. Or, on pourra toujours déterminer cette fonction, ou valeur fondamentale, w, en réduisant l'équation proposée à une équation linéaire à coefficients constants toujours intégrable par les moyens ordinaires; à cet effet, on remplacera, dans les coefficients, les quantités variables par des valeurs moyennes se rapportant aux limites entre lesquelles on doit prendre les quantités x, et par suite y; l'équation ainsi formée, appelée *équation réduite*, conduit ordinairement, par sa valeur fondamentale w, à l'intégrale générale de l'équation proposée, parce que l'on introduit de cette façon autant de constantes arbitraires que l'intégration complète en comporte. Quant aux intégrales singulières, elles sont déterminées par un choix convenable de l'équation réduite.

Si le développement obtenu pour y, ou Fy, n'est pas assez convergent, on aura recours à des moyens auxiliaires donnant une convergence plus rapide :

1° On peut transformer le développement (b) au moyen des formules (10) et (11) de la *génération neutre*. Cette opération consiste, ainsi que nous l'avons dit, à remplacer le développement par une fraction continue équivalente, suivant le procédé indiqué par Wronski, et à en calculer les réduites successives. Cette fraction continue donnant toujours lieu à un développement convergent, les réduites, ou *progrès* successifs de la génération neutre, formeront une suite d'expressions approchant de plus en plus de la fonction cherchée. Il est facile de reconnaître, par cette transformation, que l'indétermination qui se présente, lorsque les coefficients de l'équation proposée sont des fonctions de y seulement, peut toujours être levée.

2° On peut appliquer la méthode d'exhaustion; on obtient ainsi une valeur plus approchée que celle que l'on obtiendrait directement, en faisant varier convenablement la quantité auxiliaire ω qui sert à former l'équation transformée et d'où l'on tire l'équation réduite.

3° En introduisant une fonction arbitraire dans l'équation réduite, on peut obtenir une valeur fondamentale ϖ, assez rapprochée de l'inconnue y pour que le développement soit plus convergent que sans cette fonction arbitraire. Pour faciliter les calculs, il y a avantage à employer la fonction se^{rx}, où s et r sont des constantes, parce que la solution de l'équation réduite conserve la même forme que si la fonction arbitraire n'existait pas.

4° Enfin, on peut encore remplacer les valeurs moyennes par d'autres valeurs moyennes calculées au moyen des premières, et arriver ainsi, de proche en proche, à des valeurs aussi éloignées que l'on voudra des valeurs initiales.

En opérant par les moyens que nous venons d'énumérer, on parviendra généralement à obtenir telles valeurs que l'on voudra de la fonction inconnue, et un usage régulier des quantités arbitraires ϖ, ω, se^{rx} permettra, dans bien des cas, d'arriver rapidement au résultat cherché; mais la détermination la plus convenable de ces quantités arbitraires demande une certaine habileté, un certain *art* : c'est pour cette raison que Wronski donne le nom de *technie* à l'ensemble des méthodes du genre de celles que nous exposons.

Nous allons montrer par quelques exemples numériques comment les calculs doivent être conduits; ces exemples achèveront de faire comprendre ce que nous avons dit.

Quatrième exemple. Calculs numériques. — Reprenons l'équation que nous avons traitée dans le deuxième exemple, en adoptant pour les coefficients les valeurs numériques suivantes :

$$a = 0, \quad p = q = 0,0015,$$
$$b = 40, \quad m = 0,$$
$$c = 10, \quad n = 0,6.$$

La première équation (γ) du deuxième exemple devient

$$(c) \qquad \frac{dy}{dx} + p(nx + y - b + c) = 0,$$

et son équation réduite (ι) est

$$(d) \qquad \frac{dw}{dx} + cpw = 0,$$

d'où la valeur fondamentale

$$(d)' \qquad w = be^{-cpx};$$

par suite, l'inconnue donnée par l'expression précédente ou par celle du deuxième exemple (o) se trouve être, en faisant usage de la notation des dérivées,

$$(e) \qquad y = w + \frac{nx + w - b}{n} w' + \frac{1}{2}\left(\frac{nx + w - b}{n}\right)^2 \left(w'' - 2\frac{w'^2}{w}\right).$$

Calculons la valeur de l'inconnue pour la valeur $x = 5$, on a

$$(f) \qquad w = 37,1097, \quad w' = -0,55664, \quad w'' = 0,00602;$$

cette dernière valeur est donnée par l'équation (c) différentiée, savoir

$$w'' = -p[(nx + 2w - b + c)w' + nw];$$

puis la valeur de l'inconnue est

$$(e)' \qquad y = 37,1096 - 0,1016 - 0,0002 = 37,0079.$$

1° Le développement est ici assez convergent, aussi le calcul au moyen de la formule (π) de la génération neutre ne donne-t-il pas plus d'approximation. On a, en effet,

$$(g) \qquad y = w - \frac{nx + w - b}{w'n + \frac{1}{2}\left(w'' - 2\frac{w'^2}{w}\right)(nx + w - b)} w'^2,$$

ce qui donne, pour $x = 5$,

$$(g)' \qquad y = 37,1097 - 0,1018 = 37,0078.$$

On peut vérifier ici que, pour $n = 0$, l'expression (e) est essentiellement divergente, puisque les termes deviennent infinis, tandis que, pour la même valeur de n, la seconde expression est parfaitement déterminée.

2° Pour appliquer la méthode d'exhaustion, on doit partir des valeurs fondamentales données par l'équation réduite; mais si l'on veut calculer la dérivée seconde et les dérivées supérieures autrement que par cette équation réduite, il faut les tirer de l'équation transformée

$$(h) \qquad y' + cp\left(\frac{nx+y-b+c}{c}\right)^{\omega} y = 0,$$

d'où

$$y'' + cp\left[\left(\frac{nx+y-b+c}{c}\right)^{\omega} y' + \omega\left(\frac{nx+y-b+c}{c}\right)^{\omega-1} \frac{n+y'}{c} y\right],$$

et ainsi de suite pour les autres dérivées. Ce moyen, plus compliqué, quoique plus exact, est inutile, parce que les valeurs de ces dérivées sont rectifiées par la suite du calcul; ici d'ailleurs, à cause de la convergence de l'expression (e), les valeurs de ces dérivées, calculées d'une manière ou d'une autre, différeraient assez peu; nous adopterons donc les valeurs déjà trouvées (f).

Maintenant nous avons pour une valeur quelconque w_q correspondant à ω_q,

$$(i) \left\{ \begin{aligned} w_q &= w_{q-1} \\ &+ \frac{w'_{q-1}(nx + w_{q-1} - b + c)^{1-\omega_q} + pc^{1-\omega_q}(nx + w_{q-1} - b + c) w_{q-1}}{\omega_q pn w_{q-1}} w'_{q-1} + \ldots, \\ w'_q &= w'_{q-1} \\ &+ \frac{w'_{q-1}(nx + w_{q-1} - b + c)^{1-\omega_q} + pc^{1-\omega_q}(nx + w_{q-1} - b + c) w_{q-1}}{\omega_q pn w_{p-1}} w''_{q-1} + \ldots, \end{aligned} \right.$$

et ainsi de suite pour les autres dérivées.

Pour $q = 1$, ces expressions se simplifient, elles deviennent

$$(i)' \left\{ \begin{aligned} w_1 &= w - [c^{\omega_1}(nx + w - b + c)^{1-\omega_1} - (nx + w - b + c)] \frac{w'}{\omega_1 n} + \ldots, \\ w'_1 &= w' - [c^{\omega_1}(nx + w - b + c)^{1-\omega_1} - (nx + w - b + c)] \frac{w''}{\omega_1 n} + \ldots, \end{aligned} \right.$$

et ainsi de suite. Pour $\omega_q = 1$, on a

$$w_q = y.$$

En appliquant ces formules, nous obtenons pour :

I. $\omega_1 = \frac{1}{3}$,

$$(j) \quad \begin{cases} w_1 = 37,10972 - 0,10214 = 37,00758, \\ w'_1 = -0,55664 + 0,00110 = -0,55554, \end{cases}$$

et nous conserverons pour w''_1 la valeur précédente de w''.

II. $\omega_2 = \frac{2}{3}$.

$$(j)' \quad \begin{cases} w_2 = 37,00758 + 0,00004 = 37,00762, \\ w'_2 = -0,55554 - 0,0000005 = -0,55554. \end{cases}$$

On voit, pour cette seconde valeur de ω, que la correction ne porte pas sur la première dérivée.

III. $\omega_3 = 1$.

$$(j)'' \qquad y = 37,00762 + 0,00011 = 37,00773.$$

Nous trouvons ainsi, pour l'inconnue, à peu près le résultat précédent, bien que nous n'ayons pris que deux termes du développement.

3° Pour exécuter le calcul avec la fonction arbitraire se^{rx}, nous avons l'équation transformée

$$(k) \qquad y' + cp\left(\frac{nx + y - b + c}{c}\right)^{\omega} y + s(1 - \omega)e^{rx} = 0.$$

En faisant $\omega = 0$, l'intégration donne

$$(k)' \quad \begin{cases} w = \left(b + \dfrac{s}{r + cp}\right)e^{-cpx} - \dfrac{s}{r + cp}e^{rx}, \\ w' = -cp\left(b + \dfrac{s}{r + cp}\right)e^{-cpx} - \dfrac{sr}{r + cp}e^{rx}, \end{cases}$$

et, si l'on représente par u le second terme de l'expression de w, il vient

$$(l)\quad \begin{cases} y = w + \dfrac{p(nx+w-b)w-(r+cp)u}{pnw}w' \\ \quad + \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{p(nx+w-b)w-(r+cp)u}{pnw}\right]^2\left(w''-2\dfrac{w'^2}{w}\right). \end{cases}$$

Pour appliquer cette formule avec deux termes seulement, nous ferons

$$(m)\qquad s=1,\quad r=-20,$$

et nous prendrons $r+cp=-20$, au lieu de $19,985$; à cause de la très faible valeur de e^{rx}, les termes qui contiennent u en facteur sont nuls très sensiblement. Nous avons donc

$$w=\left(40-\frac{1}{20}\right)e^{-0,015.x};$$

pour $x=5$, il vient

$$w=37,0633,$$
$$w'=-0,55595;$$

par suite, l'expression précédente donne, avec deux termes,

$$(l)'\qquad y=37,0633-0,05865=37,0047.$$

Ce calcul suffit pour montrer comment on doit faire usage d'une fonction arbitraire pour abréger les calculs; l'emploi de cette fonction suppose que l'on ait une idée de l'approximation donnée par la valeur fondamentale, approximation que l'on peut évaluer par un ou deux rapides tâtonnements.

4° Enfin on peut effectuer les calculs au moyen d'un changement de constantes arbitraires. Calculons d'abord la valeur de y pour $x=2,5$; la formule (c), telle que nous l'avons déjà employée, donne avec deux termes

$$w=38,5276,$$
$$w'=-0,57791,$$

d'où

$$(n) \qquad y = 38,5276 - 0,02658 = 38,50118.$$

Avec cette valeur, déterminons la nouvelle équation réduite ; les valeurs moyennes sont maintenant

$$(p) \qquad \alpha = 2,5, \quad \beta = 38,50118;$$

nous les prendrons pour nouvelles valeurs initiales, et l'équation réduite devient

$$w' + p(n\alpha + \beta - b + c)w = 0,$$

ou

$$(q) \qquad w' + 0,015002.w = 0,$$

ce qui donne, en intégrant,

$$w = \text{const.}\, e^{-0,015002.x}.$$

La constante est déterminée par la condition

$$\beta = \text{const.}\, e^{-0,015002\,\alpha},$$

d'où

$$\text{const.} = 39,9727.$$

Maintenant, pour $x = 5$, on a

$$w = 39,9727.e^{-0,015002.5} = 37,0840,$$

$$w' = -0,015002.37,0840 = -0,55633,$$

et la formule (e) donne, avec deux termes,

$$(r) \qquad y = 37,0840 - 0,0778 = 37,0062.$$

Tels sont les divers moyens dont on peut faire usage, ensemble ou séparément, pour faciliter l'application de la méthode secondaire. En général, il conviendra de ne pas les employer indifféremment, parce que l'on ne rencontrera pas toujours une convergence aussi rapide que dans l'exemple précédent; le choix de ces moyens sera facile à déterminer : en tous cas, par le changement des constantes arbitraires, on parviendra toujours à obtenir des valeurs de l'inconnue aussi éloignées que l'on voudra des valeurs initiales.

Rappelons encore que la méthode présente pourra se trouver en défaut dans certains cas, ainsi que Wronski l'a fait voir par un exemple; on devra recourir à une autre méthode. Néanmoins, celle-ci pourra rendre de grands services et être presque toujours utilisée.

Nous venons de traiter l'exemple précédent au moyen d'une équation réduite linéaire à coefficients constants; l'intégrale trouvée est ainsi l'intégrale générale, puisqu'elle comporte une constante arbitraire. Mais, dans le second exemple, nous avons indiqué plusieurs manières de former l'équation réduite; il est donc permis de supposer que les résultats que l'on obtiendrait avec ces différentes équations ne seront pas identiques; voyons ce qu'il en est. Pour cela, reprenons l'équation proposée et examinons le caractère qu'elle présente.

L'équation (c)

$$y' + p(nx - b + c)y + py^2 = 0,$$

intégrée par les moyens ordinaires, donne

$$(s) \qquad y = b \frac{e^{-\frac{1}{2}pnx^2 + p(b-c)x}}{1 + bp\int_0^x e^{-\frac{1}{2}pnx^2 + p(b-c)x}\,dx}.$$

Cette intégration s'obtient en posant, *a priori*,

$$y = \frac{u}{v},$$

u et v étant deux fonctions auxiliaires qui, déterminées d'après l'équation proposée, donnent la solution précédente, ainsi que la solution $y = 0$. De même, si l'on avait l'équation

$$(t) \qquad y' - P'y + py^2 = 0,$$

P′ et p étant deux fonctions quelconques de x, on trouverait pour équation primitive

$$(u)\qquad y\int pe^{\mathrm{P}}\,dx - e^{\mathrm{P}} = 0.$$

Ce résultat est identique au précédent en faisant

$$(v)\qquad \mathrm{P}' = -p(nx - b + c).$$

L'intégrale (s) contient une constante arbitraire, la quantité b qui se trouve en dehors des exposants. Cette relation semble ainsi donner l'intégrale générale ; cependant la constante ne peut être éliminée entre l'équation (s) et la même différentiée, ou entre (u) et celle-ci

$$(u)'\qquad y'\int pe^{\mathrm{P}}\,dx + ype^{\mathrm{P}} - \mathrm{P}'e^{\mathrm{P}} = 0,$$

sans que l'exponentielle disparaisse également; cette exponentielle a donc le caractère d'une fonction singulière : par suite, l'intégrale trouvée (s) ou (u) n'est qu'une intégrale singulière. Ce fait est vérifié par les valeurs de l'inconnue calculées au moyen des formules de Wronski et au moyen de l'expression (s), valeurs qui diffèrent complètement. Il en résulte que les formules de Wronski contenant une constante arbitraire donnent l'intégrale générale, tandis que l'expression (s) ne donne qu'une intégrale singulière de l'équation différentielle proposée.

Les intégrales singulières exigent que le problème que l'on traite présente par lui-même des conditions telles que les relations qui ont lieu entre l'équation primitive et ses dérivées, d'après l'équation proposée, puissent se traduire par l'élimination de fonctions singulières; autrement, sans cette condition préalable, les relations entre l'équation primitive et ses dérivées ne peuvent être exprimées que par suite de l'élimination de constantes, ce qui peut toujours avoir lieu. D'une autre manière, nous disons qu'il faut distinguer les conditions relatives au problème dont on s'occupe des conditions algorithmiques relatives à l'équation différentielle du problème. Ces deux espèces de conditions sont indépendantes en elles-mêmes; mais, quand on attache à l'équation différentielle le sens que lui donne le problème que l'on traite, les conditions devant concorder, il en résulte certaines solutions, tandis que toutes les autres sont éliminées. Ainsi, les problèmes n'admettent généralement pas par eux-mêmes de solutions singulières : celles-ci n'existent qu'exceptionnellement, et, dans ce cas exceptionnel, on est toujours averti qu'il existe une solution singulière par le problème proposé lui-même ; au contraire, les équations différentielles admettent le plus souvent des solutions singulières (1).

---

(1) Les ouvrages classiques contiennent peu de détails concernant les solutions singulières ; pour cette raison, nous croyons devoir insister sur ce point important sans craindre de nous répéter.

Il faut se rappeler ce que nous avons déjà dit de la formation des équations différentielles. Nous ne considérons expressément que les équations pouvant représenter les énoncés de problèmes tels qu'ils se présentent dans la réalité ; il est donc nécessaire de distinguer le problème en lui-même de l'équation qui en représente l'énoncé. Ces deux choses, bien distinctes en elles-mêmes, n'en font qu'une seule au point de vue des applications, et c'est là le cas que nous envisageons exclusivement. Le problème est la chose donnée, le *fond* de la question, tandis que l'expression algorithmique n'en est que la *forme*. Une même forme peut appartenir à la fois à plusieurs problèmes différents, c'est-à-dire que l'interprétation d'une équation différentielle prise isolément offre une certaine indétermination.

Les équations contiennent ordinairement deux espèces de solutions : les solutions ordinaires peuvent satisfaire à un problème, tandis que les solutions spéciales ou singulières satisferont à un autre, et ce sont les conditions propres au problème qui font accepter ou rejeter une solution. En particulier, les conditions algorithmiques spéciales qui conduisent aux intégrales singulières doivent être la traduction de certaines conditions propres au problème dont il s'agit ; si ces conditions n'existent pas, les solutions singulières de l'équation, en tant qu'équation purement algorithmique, n'ont aucune interprétation, et l'intégrale générale existe seule, puisqu'elle n'exige aucune condition algorithmique spéciale.

Dans les équations différentielles, il n'y a qu'une seule intégrale générale, celle qui correspond aux seules constantes arbitraires ; toutes les autres, exigeant une ou plusieurs conditions algorithmiques spéciales, sont comprises sous le nom d'*intégrales singulières*. Ces conditions n'excluent pas ordinairement les constantes arbitraires des relations algorithmiques qui les expriment, bien que l'on ait énoncé quelquefois le contraire ; l'exemple que nous traitons montre que, si l'on considère l'équation primitive (s), on ne peut éliminer la constante arbitraire entre cette équation et sa dérivée, sans éliminer en même temps une fonction ; cette fonction se trouve être ainsi une fonction singulière.

En un mot, il ne faut donner à une équation différentielle que la signification

Si l'on considère les équations primitives singulières comme ne devant pas contenir de constantes arbitraires, on fait une restriction qui ne doit pas avoir lieu ordinairement, ou une confusion entre l'équation primitive générale et les équations primitives singulières, car l'existence de celles-ci ne dépend que de la possibilité de l'élimination de certaines fonctions qui sont quelconques, si l'on considère les équations différentielles en général; ces fonctions quelconques contiennent évidemment des constantes qui peuvent, de cette manière, se retrouver dans les équations primitives singulières. L'équation (c) en est un exemple.

Dans le problème que nous examinons, puisqu'il n'existe aucune condition spéciale, la solution qui convient est celle que nous avons obtenue par la méthode de Wronski.

La méthode ordinaire, qui consiste à déduire les intégrales singulières de l'intégrale générale, pourrait conduire à la relation qui donne la solution singulière; mais, ici, nous ne connaissons l'intégrale générale que sous la forme résolue $y=f(x)$, et $f(x)$ est un développement qui se prête difficilement à une comparaison avec l'intégrale singulière trouvée.

Remarquons encore que l'intégration ordinaire d'une équation différentielle conduit à une équation primitive qu'il faut ensuite résoudre : ce sont là deux problèmes dont on ne peut pas toujours obtenir la solution. La méthode de Wronski a cela d'avantageux qu'elle donne l'équation primitive toute résolue, et, comme elle donne aussi l'expression d'une fonction quelconque $F(y)$ de l'inconnue, on voit que l'on peut mettre encore l'équation primitive sous un nombre indéfini de formes différentes.

Profitons de la solution singulière (s) pour appliquer les formules que nous avons données dans la digression sur les séries, de (ι) à $(\varkappa)$ et $(\alpha\alpha)$, $(\alpha\beta)$.

---

propre au problème qu'elle représente; cette signification est *nécessaire* et les autres interprétations qu'on pourrait en donner sont *contingentes;* cette distinction, tout évidente, justifie ce que nous venons de dire. Il en résulte que les interprétations géométriques des intégrales, telles qu'on les produit ordinairement, ont un simple caractère de contingence, à moins que les problèmes traités ne se rattachent spécialement à des questions de Géométrie.

Commençons par calculer l'intégrale singulière par la formule de Maclaurin : nous avons

$$(aa)\quad\left\{\begin{aligned} y' &= -p(nx+y-b+c)y,\\ y'' &= -p[(nx+2y-b+c)y'+ny],\\ y''' &= -p[(nx+2y-b+c)y''+2ny'+2y'^2],\\ y^{\text{iv}} &= -p[(nx+2y-b+c)y'''+3ny''+6y'y''],\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

puis, en faisant $x=0$, $y=b$ et mettant pour les coefficients leurs valeurs numériques, il vient

$$\begin{aligned} y'_0 &= -0,6,\\ y''_2 &= +0,009,\\ y'''_0 &= -0,000675,\\ y^{\text{iv}}_0 &= +0,000074925. \end{aligned}$$

La formule de Maclaurin donne alors

$$(ab)\quad\left\{\begin{aligned} y = 40 - x.0,6 + x^2.0,0045 - x^3.0,0001125&\\ + x^4.0,000003121875 - \ldots.& \end{aligned}\right.$$

et pour $x=5$ la valeur de y est

$$(ac)\quad\left\{\begin{array}{lr} y = & 40\\ & -\ 3\\ \hline & 37,0000\\ & +\ 0,1125\\ \hline & 37,1125000\\ & -\ 0,0140625\\ \hline & 37,0984375\\ & +\ 0,0019511\\ \hline & 37,1003886 \end{array}\right.$$

Transformons la série (ab) par les formules (ι) à $(\varkappa)$; cette série, identifiée avec la série (ι), pour $a = 0$, savoir

$$(ad) \qquad y = \mathfrak{A}_0 + x\mathfrak{A}_1 + x^2\mathfrak{A}_2 + x^3\mathfrak{A}_3 + \ldots,$$

sera transformée en une autre série équivalente de la forme $(\iota)'$,

$$(ad') \quad y = A_0 + A_1 \frac{x}{n+x} + A_2\left(\frac{x}{n+x}\right)^2 + A_3\left(\frac{x}{n+x}\right)^3 + \ldots,$$

dans laquelle n est une quantité arbitraire, et, d'après $(\varkappa)$, on a les relations

$$(ad)'' \qquad \begin{cases} A_1 = n\mathfrak{A}_1, \\ A_2 = n\mathfrak{A}_1 + n^2\mathfrak{A}_2, \\ A_3 = n\mathfrak{A}_1 + 2n^2\mathfrak{A}_2 + n^3\mathfrak{A}_3, \\ A_4 = n\mathfrak{A}_1 + 3n^2\mathfrak{A}_2 + 3n^3\mathfrak{A}_3 + \mathfrak{A}_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Il reste à déterminer une valeur de n telle que la série, transformée ainsi, soit plus convergente que la série proposée (ab).

Il est facile de voir que la valeur de n la plus convenable est comprise entre 10 et 100, et le maximum de convergence a lieu à peu près pour $n = 60$. On a en effet, d'après $(ad)''$, pour $n = 60$

$$\begin{aligned} A_1 &= -36 = -36, \\ A_2 &= -36 + 16,20 = -19,80, \\ A_3 &= -36 + 32,40 - 24,30 = 27,90, \\ A_4 &= -36 + 48,60 - 72,90 + 40,46 = -19,84. \end{aligned}$$

Pour $x = 5$, $\frac{x}{n+x} = \frac{1}{13}$, la série transformée est ainsi

$$(ab)' \qquad y = 40 - \frac{36}{13} - \frac{19,80}{169} - \frac{27,90}{2197} - \frac{19,84}{28561},$$

ce qui donne

$$(ac)' \qquad \left\{\begin{array}{r} y = \;\; 40,00000 \\ -\;\; 2,76923 \\ \hline 37,23077 \\ -\;\; 0,11716 \\ \hline 37,11361 \\ -\;\; 0,01270 \\ \hline 37,10091 \\ -\;\; 0,00069 \\ \hline 37,10022 \end{array}\right.$$

Pratiquement, il vaudrait mieux prendre $n = 50$ pour simplifier les calculs; on aurait

$$y = 37,10029.$$

On voit, d'après cela, que le développement de Maclaurin (ab), dans le cas actuel, n'est pas éloigné du maximum de convergence.

Calculons maintenant l'expression (s) qui contient une intégrale définie,

$$(ae) \qquad \int_0^x e^{-\frac{1}{2}pnx^2+p(b-c)x}\,dx.$$

En désignant l'exposant par P, la formule de Maclaurin donne, pour $x = 5$,

$$\int_0^5 e^P dx = 5 + \frac{5^2}{1.2}\,0,045 + \frac{5^3}{1.2.3}\,0,001125 - \frac{5^4}{1.2.3.4}\,0,000030375$$
$$- \frac{x^5}{1.2.3.4.5}\,0,0000044043\,7 + \ldots$$

$$(af) \quad \int_0^5 e^P dx = 5 + 0,5625 + 0,0234375 - 0,0007910 - 0,0001147$$
$$= 5,5850318.$$

La formule de Bernoulli,

$$\int f(x)\,dx = \text{const} + \frac{x}{1}f(x) - \frac{x^2}{1.2}f'(x) + \ldots,$$

est ici plus convergente; elle donne, avec six décimales exactes,

$$(af)' \qquad \int_0^5 e^{\mathrm{P}} dx = 5,585009,$$

par suite,

$$1 + 0,06 \int_0^5 e^{\mathrm{P}} dx = 1,3351 0057,$$

et l'expression (s) devient

$$(ag) \qquad y = 40 \frac{1,23831}{1,335100} = 37,1000;$$

telle est la valeur de l'inconnue avec quatre décimales exactes.

Effectuons maintenant le même calcul au moyen des formules ($\alpha\alpha$) et ($\alpha\beta$) de la méthode primordiale, savoir :

$$(ah) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{F}(x) &= \mathrm{F}(a) + \mathrm{F}'(a)\left[1 + (x-a)\frac{\mathrm{F}''(x)}{2\mathrm{F}'(x)}\right](x-a) \\ &\quad + \Xi_3\left(\frac{x-a}{n+x}\right)^3 + \Xi_4\left(\frac{x-a}{n+x}\right)^4 + \ldots; \end{aligned} \right.$$

les coefficients Ξ, calculés d'après ($\alpha\beta$), sont

$$(ah)' \left\{ \begin{aligned} \Xi_3 &= (n+a)^3\left[\frac{1}{2}\frac{[\mathrm{F}''(a)]^2}{\mathrm{F}'(a)} - \frac{1}{3}\mathrm{F}'''(a)\right], \\ \Xi_4 &= (n+a)^4\left[-\frac{1}{2}\frac{[\mathrm{F}''(a)]^3}{[\mathrm{F}'(a)]^2} + \frac{3}{4}\frac{\mathrm{F}''(a)\,\mathrm{F}'''(a)}{\mathrm{F}'(a)} - \frac{5}{24}\mathrm{F}^{\mathrm{IV}}(a)\right] + 3\Xi_3, \\ \Xi_5 &= (n+a)^5\left[\frac{1}{2}\frac{[\mathrm{F}''(a)]^4}{[\mathrm{F}'(a)]^3} - \left[\frac{\mathrm{F}''(a)}{\mathrm{F}'(a)}\right]^2\mathrm{F}'''(a) + \frac{1}{4}\frac{[\mathrm{F}'''(a)]^2}{\mathrm{F}'(a)}\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3}\frac{\mathrm{F}''(a)\mathrm{F}^{\mathrm{IV}}(a)}{\mathrm{F}'(a)} - \frac{3}{40}\mathrm{F}^{\mathrm{V}}(a)\right] + 4\Xi_4 - 6\Xi_3. \end{aligned} \right.$$

Faisons

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^x e^{\mathrm{P}} dx,$$

avec $x = 5$ et $a = 0$, il vient

$$(ai) \left\{ \begin{aligned} \int_0^5 e^{\mathrm{P}} dx &= 5,50625 + 0,0006375 n^3 \left(\frac{5}{n+5}\right)^3 \\ &\quad + (0,0019125 n^3 - 0,000001266 n^4)\left(\frac{5}{n+5}\right)^4 \\ &\quad + (-0,0038250 n^3 - 0,0000005064 n^4 - 0,0000000367 n^5)\left(\frac{5}{n+5}\right)^5 + \ldots \end{aligned} \right.$$

Il reste à déterminer la valeur de n la plus convenable; et l'on aperçoit aisément que n doit être compris entre 100 et 1000. Il est même indifférent de prendre l'un ou l'autre nombre, car la variation de la convergence est très faible, dans cet intervalle, pour les autres valeurs de n.

En fait, ces deux valeurs conduisent au même résultat à $\frac{4}{100\,000}$ près.

$$(ai)' \quad \left\{ \begin{array}{rr@{\qquad}rr}
 & \text{Pour } n = 100. & & \text{Pour } n = 1000. \\
\displaystyle\int_0^5 e^{\mathrm{P}}\,dx = & 5{,}506250 & \displaystyle\int_0^5 e^{\mathrm{P}}\,dx = & 5{,}506250 \\
 & +\ 0{,}068837 & & +\ 0{,}078503 \\ \cline{2-2}\cline{4-4}
 & 5{,}575087 & & 5{,}584753 \\
 & +\ 0{,}009183 & & +\ 0{,}000396 \\ \cline{2-2}\cline{4-4}
 & 5{,}584270 & & 5{,}585149 \\
 & +\ 0{,}000723 & & -\ 0{,}000115 \\ \cline{2-2}\cline{4-4}
 & 5{,}584993 & & 5{,}585034
\end{array} \right.$$

Nous obtenons ainsi la même approximation qu'avec la formule de Maclaurin, bien que celle-ci contienne un terme de plus. Cependant la formule de Wronski a exigé un calcul plus compliqué; il ressort de là que son emploi n'est réellement avantageux que lorsque l'on peut négliger la série complémentaire. Dans ce cas, le calcul devient très rapide ([1]).

Supposons que l'on connaisse la valeur de l'intégrale pour $x = 4{,}5$, sachant que

$$\left(\frac{de^{\mathrm{P}}}{dx}\right)_5 = 0{,}0405\,(e^{\mathrm{P}})_5,$$

([1]) On remarquerait même que souvent la série complémentaire est d'autant moins convergente que le *progrès*, donnant la génération de la fonction, représente mieux cette fonction; aussi Wronski indique-t-il comme avantageux l'emploi de la génération neutre. Il dit (*Réforme*, t. I, p. lxxiij) : « Avec les quantités A_1, A_2, A_3, ... (quantités qui sont les coefficients du développement de la fonction et qui comprennent à la fois les premiers termes et ceux de la série complémentaire), les ordres supérieurs de la génération neutre donneront, pour la fonction problématique $F(x)$, ..., une détermination très générale, et, comme telle, de beaucoup supérieure à celle.... que nous avons obtenue par l'application immédiate de la méthode primordiale. »

on en déduit la suivante, pour $x = 5$,

$$(aj)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^5 e^p dx = \int_0^{4,5} e^p dx + (e^p)_{4,5}(1 + 0,25.0,0405)0,5 \\ \qquad = 4,97212 + 1,21333.1,010125.0,5 = 5,584931, \end{cases}$$

valeur exacte à $\frac{1}{10000}$ près.

La formule de Taylor conduit à un calcul plus long; on a

$$\left(\frac{de^p}{dx}\right)_{4,5} = 0,042975\ (e^p)_{4,5},$$

$$\left(\frac{d^2e^p}{dx^2}\right)_{4,5} = 0,001756\ (e^p)_{4,5},$$

$$(ak)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^5 e^p dx = \int_0^{4,5} e^p dx + (e^p)^{4,5}\left(0,5 + \frac{0,25}{2}0,042975 + \frac{0,125}{6}0,001756\right) \\ \qquad = 4,97212 + 1,21333.0,5054084 = 5,585350, \end{cases}$$

valeur exacte à $\frac{7}{10000}$ près.

Nous venons d'indiquer l'usage du premier *progrès* de la méthode primordiale; on pourrait de la même manière faire l'application du second et du troisième progrès, qui ont été donnés dans le Tome I de la *Réforme*, et le *Supplément à l'Épître à l'Empereur de Russie*, ou dans le troisième Volume de l'*Encyclopédie mathématique* de Montferrier; les expressions sont alors de plus en plus compliquées, mais on peut trouver avantage, dans certains cas, à les utiliser; de même, par une certaine combinaison du premier et du second progrès, on pourrait intégrer l'équation différentielle qui nous a servi d'exemple (*voir* la *Réforme*, t. I, p. 352).

Néanmoins, le premier progrès, à cause de la simplicité de son expression, sera souvent d'une application avantageuse. Wronski donne, au moyen de cette formule, un exemple de calcul de logarithmes à 10 décimales; il a d'ailleurs construit, ainsi, des Tables disposées sous forme de *canons* (¹).

(¹) Les canons à 7 décimales contiennent environ 1000 nombres; le premier

Mais là ne se borne pas l'application du premier progrès de la méthode primordiale : nous pensons qu'il devra servir encore utilement au calcul des Tables de sinus du second et du troisième ordre; ces Tables seront nécessaires le jour où l'on voudra appliquer les méthodes d'intégration de Wronski, et principalement la méthode secondaire systématique. Si l'on songe à la complication et à l'étendue des Tables à double entrée des fonctions elliptiques, ou autres fonctions analogues, on se convaincra facilement que les Tables des sinus devront être exécutées avec beaucoup plus de rapidité; elles seront très pratiques et d'un usage général, tandis que les premières ne seront que d'un usage restreint.

Nous avons préparé des Tables de sinus de telle sorte que les calculs puissent être exécutés immédiatement quand il sera nécessaire. Ajoutons que nous avons été précédé dans ce travail par M. Yvon Villarceau. Ce géomètre, au moyen de formules qui lui sont propres, a calculé, avec 12 décimales exactes, une suite de sinus du deuxième et du troisième ordre, formant ainsi un cadre pour des Tables plus étendues.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES FINIES NE CONTENANT QU'UNE VARIABLE INDÉPENDANTE.

Observation. — Avant de continuer l'exposition des méthodes d'intégration, nous devons indiquer l'ordre que nous allons suivre.

On sait, d'après ce qui précède, que l'intégration des équations linéaires à coefficients constants joue un rôle important dans les méthodes de Wronski. L'intégration des équations différentielles de cette

---

logarithme est celui de 100000, et les suivants ceux de 100125, 100205, etc., nombres qui s'obtiennent alors avec la plus grande facilité.

Dans le système de logarithmes à 7 décimales dont la base est 2, le canon a les dimensions de 305^{cm} sur 225^{cm}; il est formé de deux Tableaux correspondant aux deux parties dont est composée la portion décimale d'un logarithme. Ce canon a une étendue triple de celle des Tables ordinaires, et l'addition des deux parties du logarithme demande moins de temps que celui que l'on met à feuilleter la Table. Un canon de logarithmes vulgaires contient une partie de plus.

espèce, dans le cas d'une seule variable indépendante, est assez connue pour que n'ayons eu besoin que d'en rappeler les formules; mais pour les autres équations, les solutions, quoique données depuis longtemps, ne se trouvant pas dans les Ouvrages classiques, nous serons obligé de les traiter d'une façon particulière et même plus complète qu'on ne l'a fait jusqu'ici. D'un autre côté, nous ne pourrions, sans perdre de vue la méthode de Wronski, donner de suite tout ce qui concerne l'intégration des équations linéaires à coefficients constants, c'est pourquoi nous ne présenterons ici que ce qui est absolument nécessaire à la méthode, en indiquant toutefois comment on pourrait vérifier ou démontrer certaines formules dont il sera fait usage.

Désirant pousser les calculs jusqu'au point où il ne reste plus qu'à effectuer des opérations indiquées bien explicitement, nous entrerons de suite dans le détail des transformations relatives aux racines des équations caractéristiques. Nous avons reconnu que, en général, la transformation doit être faite au moyen de fonctions symétriques, et que les transformations faites au moyen de sinus d'ordre quelconque, ou même par d'autres procédés, ne sont que des transformations particulières; nous avons étudié le système complet de ces transformations et nous donnons ici, outre les formules d'intégration par les fonctions symétriques, la formule d'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients constants, au moyen de sinus d'ordres supérieurs. Quant aux fonctions symétriques, nous n'avons fait que compléter et étendre le moyen indiqué par Wronski dans sa *Critique des fonctions génératrices*, ce géomètre s'étant lui-même visiblement inspiré des travaux de Laplace. Néanmoins, nous sommes convaincu que Wronski avait achevé les calculs que nous avons dû rétablir nous-même.

Nous réservons pour une Note spéciale, qui paraîtra dès que le sujet présent sera achevé, les questions que nous ne pouvons à présent traiter d'une manière suffisante. Cette Note comprendra des notions sur les agrégats et sur leur emploi; ces sommes seront pour nous d'un usage aussi fréquent que celui des déterminants. Nous donnerons les formules de différentiation de fonctions de plusieurs variables, puis nous reviendrons sur l'intégration des équations linéaires à coefficients constants, et nous reprendrons, pour ce qu'il nous importe de connaître, la théorie des fonctions symétriques pour en faire l'application aux sinus des ordres supérieurs.

L'étude de ces questions découle tout naturellement de la loi suprême de Wronski; d'après cela, nous aurions dû commencer par son exposition, mais les sujets que nous traiterons auparavant formeront une introduction très utile pour l'intelligence complète de cette loi remarquable. Nous pouvons dire qu'elle a été l'objet de notre première étude; c'est ce qui nous a permis d'entreprendre avec fruit le rétablissement des diverses méthodes d'intégration sur lesquelles Wronski ne nous a laissé que de simples indications.

Équations aux différences finies. — Considérons une équation qui contient une fonction inconnue y d'une variable indépendante x, ainsi que les différences des quantités x et y ne dépassant pas l'ordre μ; soit

$$\varphi(y) = 0$$

cette équation. Pour effectuer l'intégration, il faut trouver une expression de la fonction inconnue y qui rende identique l'équation proposée.

Nous avons vu que l'expression (22) (¹) remplit cette condition, et qu'il est même nécessaire de lui substituer l'expression plus générale (22), savoir :

$$\mathrm{F}(y) = \mathrm{F}(w) - \varphi(w)\frac{\left(\dfrac{d\mathrm{F}(w)}{dx}\right)}{\left(\dfrac{d\varphi(w)}{dx}\right)} + \frac{1}{2}[\varphi(w)]^2\frac{\left(\dfrac{d\varphi(w)}{dx}\right)\left(\dfrac{d^2\mathrm{F}(w)}{dx^2}\right) - \left(\dfrac{d^2\varphi(w)}{dx^2}\right)\left(\dfrac{d\mathrm{F}(w)}{dx}\right)}{\left(\dfrac{d\varphi(w)}{dx}\right)^3} - \cdots$$

w est ici une fonction arbitraire, qui néanmoins doit se rapprocher le plus possible de la fonction inconnue y, et $\mathrm{F}(y)$ est une fonction quelconque mais donnée de y; cette fonction peut être une différence ou une dérivée de la quantité cherchée.

(¹) *Voir* le nº de janvier 1882.

Sans reprendre les considérations que nous avons présentées à propos des équations différentielles, considérations qui se reproduisent ici, nous rappellerons que l'on doit former au moyen de l'équation donnée, en y introduisant une quantité arbitraire ω, une équation transformée

$$\varphi(y, \omega) = 0;$$

de la sorte, pour $\omega = 1$, on reproduit l'équation proposée, qui se trouve ainsi écrite :

$$\varphi(y, 1) = 0,$$

et pour $\omega = 0$, on obtient l'équation réduite

$$\varphi(y, 0) = 0.$$

Cette équation donne une première valeur de l'inconnue que nous avons désignée sous le nom de *valeur fondamentale* et que nous avons dénotée par ϖ.

L'équation réduite peut toujours être une équation aux différences finies à coefficients constants intégrable par des moyens connus : la valeur fondamentale ainsi obtenue conduit à l'intégrale générale de l'équation proposée ; il est clair que l'on peut former autrement l'équation réduite.

Calcul de l'inconnue. — Il reste maintenant à donner le détail des calculs que nous venons d'indiquer. Pour cela, mettons l'équation proposée, par hypothèse d'ordre μ, sous la forme

$$(28)\qquad \Delta^{\mu} y \mathrm{H}_{\mu} + \Delta^{\mu-1} y \mathrm{H}_{\mu-1} + \ldots + \Delta y \mathrm{H}_1 + y \mathrm{H}_0 = \psi(x);$$

$\psi(x)$ est une fonction donnée de x, et les coefficients $\mathrm{H}_0, \mathrm{H}_1, \ldots, \mathrm{H}_{\mu}$ peuvent être des fonctions de x de l'inconnue y et de leurs différences de divers ordres, jusqu'à l'ordre μ inclusivement. Il est évident que l'équation proposée peut toujours être mise sous cette forme et même être écrite de la manière suivante,

$$(28)' \qquad \Sigma_\mu \Delta^\sigma y \,\mathrm{H}_\sigma - \psi(x) = 0 \quad \text{([1])},$$

en convenant de faire varier l'indice σ de zéro à μ.

Considérons les variations de l'inconnue y, ou même de $\mathrm{F}(y)$, correspondant à des valeurs de la variable x, comprises entre deux limites quelconques déterminées p et q; soit α la valeur de x correspondant à une valeur moyenne β de y dans les limites considérées (nous avons déjà précisé le sens que Wronski attache à cette expression de valeurs moyennes), et supposons ces deux valeurs α et β provisoirement connues. Si nous remplaçons dans le coefficient général H_σ les quantités x, y et leurs différences par leurs valeurs moyennes, nous obtiendrons une quantité h_σ qui sera le coefficient général de l'équation réduite; nous pouvons alors introduire la quantité arbitraire ω de manière à obtenir l'équation transformée

$$(29) \qquad \Sigma_\mu \Delta^\sigma y h_\sigma \left(\frac{\mathrm{H}_\sigma}{h_\sigma}\right)^\omega - \psi(x) = 0.$$

Pour $\omega = 1$, cette équation donne l'équation proposée (28)$'$, et pour $\omega = 0$ elle donne l'équation réduite

$$(30) \qquad \Sigma_\mu \Delta^\sigma w h_\sigma - \psi(x) = 0,$$

en changeant y en w d'après les notations adoptées. Maintenant, si nous désignons par $m_1, m_2, \ldots, m_\mu$ les μ racines de l'équation caractéristique

$$(31) \qquad h_\mu m^\mu + h_{\mu-1} m^{\mu-1} + \ldots + h_0 = 0,$$

comme on le sait, on a pour la valeur fondamentale, en dénotant par u

---

(1) Nous avons fait plus haut usage d'une notation différente pour indiquer la manière dont les termes varient dans la somme Σ; à l'avenir, nous nous conformerons à la notation de Wronski; l'indice joint à la lettre Σ indique la limite supérieure de l'indice variable σ.

la différence Δx,

$$(32)\qquad w = \Sigma_\mu (1+m_\sigma)^{\frac{x}{u}}\left[M_\sigma + N_\sigma \Sigma\, \psi(x)\left(\frac{1}{1+m_\sigma}\right)^{\frac{x}{u}}\right];$$

N_σ a pour valeur

$$(32)'\ N_\sigma = \frac{1}{h_\mu(1+m_\sigma)(m_\sigma-m_1)(m_\sigma-m_2)\ldots(m_\sigma-m_{\sigma-1})(m_\sigma-m_{\sigma+1})\ldots(m_\sigma-m_\mu)}.$$

M_σ est l'une des μ constantes arbitraires, et la somme entre crochets est une somme indéfinie prise par rapport à l'accroissement u, tandis que la somme Σ_μ se compose de μ termes en faisant varier l'indice σ de 1 à μ.

On peut, dans certains cas, trouver utile d'introduire une fonction arbitraire dans l'équation transformée, ainsi que nous l'avons déjà fait dans le cas des équations différentielles ; la plus simple de ces fonctions est

$$s(1+r)^{\frac{u}{x}},$$

s et r étant deux constantes à déterminer, de sorte que l'équation transformée sera

$$(33)\qquad \sum_\mu \Delta^\sigma y h_\sigma \left(\frac{H_\sigma}{h_\sigma}\right)^\omega - \psi(x) - (1-\omega)s(1+r)^{\frac{x}{u}} = 0,$$

et l'équation réduite devient

$$(34)\qquad \sum_\mu \Delta^\sigma w h_\sigma - \psi(x) - s(1+r)^{\frac{x}{u}} = 0.$$

De cette manière, en supposant nulle la fonction $\psi(x)$ et en négligeant les constantes, on a

$$(35)\ w = \sum_\mu s(1+m_\sigma)^{\frac{x}{u}} N_\sigma \sum\left(\frac{1+r}{1+m_\sigma}\right)^u = s(1+r)^{\frac{x}{u}}\sum_\mu N_\sigma \frac{1+m_\sigma}{m_\sigma - r}.$$

Afin de pouvoir appliquer maintenant la formule (22), il reste à calculer les différences et les dérivées de l'expression (32); on aura

$$(36)\qquad \Delta^{\varpi} w = \sum_{\mu} (1 + m_\sigma)^{\frac{x}{u}} \left[m_\sigma^{\varpi} \mathrm{M}_\sigma + \mathrm{N}_\sigma \sum \Delta^{\varpi} \psi(x) \left(\frac{1}{1 + m_\sigma} \right)^{\frac{x}{u}} \right],$$

puis

$$(36)'\quad \frac{d^\nu w}{dx^\nu} = \sum_{\mu} (1 + m_\sigma)^{\frac{x}{u}} \left[\frac{\mathrm{L}^\nu(1 + m_\sigma)}{u^\nu} \mathrm{M}_\sigma + \mathrm{N}_\sigma \sum \frac{d^\nu \psi(x)}{dx^\nu} \left(\frac{1}{1 + m_\sigma} \right)^{\frac{x}{u}} \right];$$

et enfin

$$(36)''\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^\nu \Delta^{\varpi} w}{dx^\nu} &= \sum_{\mu} (1 + m_\sigma)^{\frac{x}{u}} \\ &\times \left[\frac{\mathrm{L}^\nu(1 + m_\sigma)}{u^\nu} m_\sigma^{\varpi} \mathrm{M}_\sigma + \mathrm{N}_\sigma \sum \frac{d^\nu \Delta^{\varpi} \psi(x)}{dx^\nu} \left(\frac{1}{1 + m_\sigma} \right)^{\frac{x}{u}} \right]. \end{aligned} \right.$$

Ces formules ne peuvent être utilisées que si toutes les racines de l'équation caractéristique sont réelles, car autrement, s'il existe des racines imaginaires, il se trouvera dans les expressions précédentes des parties imaginaires qu'il faudra grouper convenablement afin d'obtenir des valeurs réelles de w. Ces transformations, bien connues dans le cas d'équations différentielles, le sont moins quand il s'agit d'équations contenant des différences : aussi nous allons les reprendre rapidement.

Transformations relatives aux quantités imaginaires. — Le principe qui va nous servir de point de départ consiste à substituer dans l'expression fondamentale (32), aux racines de l'équation caractéristique, des fonctions symétriques de ces racines; cette manière d'opérer aura l'avantage d'éviter la résolution d'une équation algébrique.

Posons

$$(37)\qquad n = 1 + m \quad \text{et} \quad \frac{x}{u} = \zeta,$$

l'équation caractéristique sera remplacée par l'équation suivante, dont les racines sont m_1, m_2, ..., augmentées de l'unité,

$$(38)\qquad k_\mu n^\mu + k_{\mu-1} n^{\mu-1} + \ldots + k_0 = 0,$$

en faisant

$$(38)' \quad \begin{cases} h_0 - h_1 + h_2 - h_3 + \ldots + (-1)^\mu h_\mu = k_0, \\ \quad h_1 - 2h_2 + 3h_3 - \ldots + (-1)^{\mu-1} \frac{\mu}{1} h_\mu = k_1, \\ \quad\quad h_2 - 3h_3 + \ldots + (-1)^{\mu-2} \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} h_\mu = k_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad h_\mu = k_\mu. \end{cases}$$

Cette équation caractéristique (38) correspond à l'équation

$$(39) \quad k_\mu f(x + \mu u) + k_{\mu-1} f[x + (\mu - 1)u] + \ldots + k_0 f(x) = \psi(x),$$

si l'on pose

$$f(x) = w.$$

Wronski, dans sa *Critique des fonctions génératrices*, part de cette équation pour effectuer l'intégration de toutes les équations linéaires à coefficients constants; l'équation (39) donne, si l'on appelle w_1 la solution sans constantes arbitraires,

$$(40) \qquad w_1 = \frac{(-1)^{\mu-1}}{N k_\mu} \sum_\mu (-1)^{\nu-1} N'_\sigma n_\sigma^\zeta \sum \psi(x) \left(\frac{1}{n_\sigma}\right)^\zeta,$$

en faisant

$$(40)'. \qquad N = \text{ⓢ}(n_1^1 n_2^2 \ldots n_\mu^\mu) = (-1)^{\frac{\mu(\mu-1)}{3}} \Pi(n_\sigma) \Pi(n_\sigma - n_\nu);$$

Π indique le produit des quantités entre parenthèses, et l'ordre des indices ν est l'ordre numérique, comme nous l'avons déjà indiqué pour (32)'; de plus, N'_σ est un des déterminants mineurs de N ordonné par rapport aux puissances μ des racines, ce qui donne

$$(40)'' \qquad \frac{N'_\sigma}{N} = \frac{(-1)^{\mu-1}}{n_\sigma} \frac{(-1)^{\sigma-1}}{\Pi(n_\sigma - n_\nu)}.$$

Si $\psi(x)$ est nul, la somme indéfinie pour une valeur particulière de σ

se réduit à une constante arbitraire; en ajoutant cette dernière solution à la solution (40), on retrouverait la solution (32).

L'expression (40) s'établit directement; on peut aussi vérifier facilement qu'elle satisfait à l'équation (39). Cette expression développée donne

$$w_1 = \frac{(-1)^{\mu-1}}{k_\mu}\sum \psi(x+\sigma u)\left[\frac{N'_1}{N} n_1^{-\sigma} + \frac{N'_2}{N} n_2^{-\sigma} + \ldots + (-1)^{\mu-1}\frac{N'_\mu}{N} n_\mu^{-\sigma}\right],$$

et comme, d'après un théorème que nous avons énoncé (14 janvier 1881) on a, pour p positif ou négatif,

$$(41) \qquad \aleph(p) = \frac{\mathfrak{D}(n_1^1 n_2^2 \ldots n_{\mu-1}^{\mu-1} n_\mu^{\mu+p})}{N},$$

il vient, en faisant $-\varsigma = +\mu - p$ et prenant ς et p négatifs,

$$(42) \qquad w_1 = \frac{1}{k_\mu}\sum \psi(x+\sigma u)\,\aleph(-\varsigma);$$

Σ est une somme indéfinie dans laquelle ς varie de zéro à $+\infty$, et les fonctions $\aleph$ sont ici des fonctions aleph négatives.

Il reste à tenir compte des constantes arbitraires, c'est-à-dire de l'expression

$$(43) \qquad w_2 = M_1 n_1^\zeta + M_2 n_2^\zeta + \ldots + M_\mu n_\mu^\zeta,$$

qui est aussi comprise dans l'expression (32). D'après l'origine des constantes, ainsi que nous venons de le dire et d'après leurs valeurs arbitraires, nous devons écrire le second membre de (43) sous la forme

$$(44) \qquad \frac{N_1^{(\lambda)}}{N} n_1^\zeta + \frac{N_2^{(\lambda)}}{N} n_2^\zeta + \ldots + \frac{N_\mu^{(\lambda)}}{N} n_\mu^\zeta,$$

en désignant par N le déterminant de (40)', et par $N_1^{(\lambda)}$, $N_2^{(\lambda)}$, ... des fonctions de n_1, n_2, ..., n_μ telle que l'expression totale soit une fonction symétrique de ces quantités; de la sorte, si l'on représente par Z_λ l'expression (44) et par P_λ une nouvelle constante arbitraire,

$P_\lambda Z_\lambda$ est une valeur particulière de (43); par suite, $P_1, P_2, \ldots, P_\mu, Z_1, Z_2, \ldots, Z_\mu$ étant μ constantes et μ fonctions analogues à (44), on peut écrire (43) de la manière suivante :

$$(43)' \qquad w_2 = P_1 Z_1 + P_2 Z_2 + \ldots + P_\mu Z_\mu.$$

Il est évident que, si l'on pose

$$(45) \qquad n^\zeta = Z_1 + nZ_2 + n^2 Z_3 + \ldots + n^{\mu-1} Z_\mu,$$

en donnant à n successivement les μ valeurs qui satisfont à l'équation (38), on obtient μ équations linéaires, lesquelles, par leur résolution, donnent pour l'une des fonctions Z_λ,

$$(46) \qquad Z_\lambda = \frac{\mathfrak{D}(n_1^1 n_2^2 \ldots n_\lambda^{\zeta+1} \ldots n_\mu^\mu)}{N}.$$

Le second membre développé par rapport à $n_1^\zeta, n_2^\zeta, \ldots$ est bien de la forme (44), et les quantités Z sont, de cette manière, des fonctions symétriques des racines de (38). D'après un théorème sur les fonctions aleph, que nous démontrerons plus tard [le théorème (41) n'en est qu'un cas particulier], on a

$$(46)' \left\{ \begin{aligned} \frac{\mathfrak{D}(n_1^1 n_2^2 \ldots n_\lambda^{\zeta+1} \ldots n_\mu^\mu)}{N} k_\mu &= \aleph(\zeta - \mu + 1) k_\lambda \\ &+ \aleph(\zeta - \mu + 2) k_{\lambda+1} + \ldots + \aleph(\zeta - \lambda + 1) k_\mu. \end{aligned} \right.$$

N ayant toujours la valeur (40)'

Donc, d'après (46) et (46)', on peut écrire (43)'

$$\begin{aligned} w_2 k_\mu = {} & (P_1 k_1 + P_2 k_2 + \ldots + P_\mu k_\mu) \aleph(\zeta - \mu + 1) \\ & + (P_1 k_2 + P_2 k_3 + \ldots + P_{\mu-1} k_\mu) \aleph(\zeta - \mu + 2) + \ldots + P_1 k_\mu \aleph(\zeta), \end{aligned}$$

ou, en représentant par $Q_1, Q_2, \ldots$ les nouvelles constantes, on a

$$(47) \quad w_2 k_\mu = Q_1 \aleph(\zeta - \mu + 1) + Q_2 \aleph(\zeta - \mu + 2) + \ldots + Q_\mu \aleph(\zeta);$$

par suite, la solution complète de l'équation linéaire à coefficients constants (30) peut s'écrire, en réunissant les deux quantités w_1 et w_2, (42) et (47),

$$(48)\qquad w = \frac{1}{k_\mu}\sum_\mu Q_\sigma \aleph\left(\frac{x}{u} - \mu + \sigma\right) + \frac{1}{k_\mu}\sum \psi(x + \sigma u)\aleph(-\varsigma).$$

La première somme se compose de μ termes, la seconde est une somme indéfinie, et l'expression entière ne contient que des fonctions symétriques des racines de l'équation (38), et par conséquent de l'équation caractéristique (31).

Nous sommes obligé de passer rapidement sur ce qui précède : une exposition complète exigerait des développements que nous réservons pour une Note spéciale. Nous ajouterons cependant quelques remarques.

Les transformations précédentes supposent essentiellement que les racines de l'équation caractéristique soient toutes différentes; il faudrait modifier ces transformations dans le cas des racines égales.

Les propositions (41) et (46) peuvent se démontrer de plusieurs manières; la première peut être considérée comme un corollaire de la relation $(de)''$ que Wronski donne dans l'*Introduction à la philosophie des Mathématiques*, p. 144; (46) peut aussi s'en déduire. Quant au calcul des fonctions $\aleph$, Wronski donne le moyen de les calculer dans le Tome III de la *Réforme*, p. 28 à 31 ; nous indiquerons les diverses formes que l'on peut donner aux expressions de ces fonctions. Pour l'instant, il suffit d'indiquer les suivantes; on a la relation générale des fonctions $\aleph$ positives ou négatives, c'est-à-dire quel que soit le nombre entier p, en considérant les racines d'une équation algébrique; (31) par exemple, est

$$(49)\quad h_\mu \aleph(p) + h_{\mu-1}\aleph(p-1) + h_{\mu-2}\aleph(p-2) + \ldots + h_0\aleph(p-\mu) = 0;$$

de plus, en se reportant à la relation (41), on trouve les valeurs particulières

$$(49)'\quad \aleph(0) = 1,\quad \aleph(-1) = 0,\quad \aleph(-2) = 0,\quad \ldots,\quad \aleph(-\mu+1) = 0;$$

la relation (49) permet donc de calculer une fonction quelconque $\aleph(p)$ ou $\aleph(-p)$, en tenant compte des valeurs particulières (49)'.

Les transformations que nous venons de donner s'appliquent directement aux équations aux différences ou aux dérivées partielles linéaires et à coefficients constants, comme nous le montrerons; on pourrait aussi les appliquer aux équations différentielles ordinaires, au lieu d'employer des sinus pour faire disparaître les imaginaires, selon l'usage.

Il est inutile de donner ici ces formules : on ne trouverait aucun intérêt à les employer, car, les transformations par les fonctions symétriques devant nécessairement conduire à des fonctions transcendantes, on ne pourrait obtenir que des expressions sans forme indéfinie, tandis que les sinus dont on possède des tables peuvent toujours être utilisés et facilitent considérablement les calculs.

Dans le cas d'équations qui contiennent des différences, équations linéaires à coefficients constants, on pourrait encore grouper deux à deux les racines imaginaires de l'équation caractéristique, au lieu de faire usage de l'expression (48); mais ici l'avantage que nous venons de signaler pour les sinus n'existe plus; néanmoins, suivant les cas, il faudra choisir entre le groupement des racines et la transformation précédente.

Au reste, le groupement des racines imaginaires deux à deux n'est qu'un groupement particulier; M. Yvon Villarceau a montré, dans le cas d'équations différentielles, comment devaient intervenir les sinus des ordres supérieurs dans le groupement d'un nombre quelconque de racines. Depuis la publication du Mémoire de ce géomètre, bien que des travaux aient été faits sur la question, nous n'avons pas connaissance que l'on ait donné la solution générale de ce problème; pour cette raison, nous croyons pouvoir l'indiquer ici. A cet effet, les racines de l'équation caractéristique (17) doivent être mises sous la forme

$$(50) \qquad m = a_0 + a_1\rho + a_1\rho^2 + \ldots + a_{\mu-1}\rho^{\mu-1},$$

ρ étant l'une des racines $\mu^{\text{ièmes}}$ de l'unité positive, et $a_0, a_1, \ldots, a_{\mu-1}$, μ quantités qui sont les mêmes pour les μ racines de la caractéristique. On sait former ces quantités a pour l'équation du troisième degré, et Wronski a donné leur formation pour les degrés supérieurs; ces quantités sont toutes réelles, quand les μ racines sont imaginaires. Pour transformer l'expression (17)$'$, il suffit maintenant d'introduire les expressions de chacune des racines sous la forme (50) dans les déterminants, $N, N_1, N_2, \ldots$. Sans tenir compte des constantes arbitraires, (17)$'$ est

$$(51) \qquad \varpi_1 = \frac{(-1)^{\mu-1}}{h_\mu N} \sum_\mu (-1)^{\sigma-1} N_\sigma e^{m_\sigma x} \int \psi(x) e^{-m_\sigma x} dx.$$

Cette somme est composée de μ termes; elle s'obtient en faisant varier l'indice σ de 1 à μ. Les déterminants $N, N_1, N_2, \ldots$ sont formés comme ceux de (40)$'$ et (40)$''$, au produit près des racines.

En effectuant les calculs, on trouve

$$(52) \quad \left\{ \begin{aligned} \varpi_1 = {} & \frac{(-1)^{\mu-1} e^{a_0 x}}{h_\mu \text{Ⓓ}\left[B_1^{(1)} B_2^{(2)} \ldots B_{\mu-1}^{(\mu-1)}\right]} \\ & \times \sum_\mu \Big\{ (-1)^\sigma \text{Ⓓ}\left[B_{\sigma_1}^{(1)} \ldots B_{\sigma(\mu-2)}^{(\mu-2)}\right] \\ & \qquad \times \sum_\tau \left[(-1)^t A_\tau \int \psi(x)\, e^{-a_0 x} A'_{\tau'} dx \right] \Big\}. \end{aligned} \right.$$

Σ_σ est la somme de tous les termes qui diffèrent par la valeur de σ, σ variant de 1 à $\mu - 1$, et Σ_τ est la somme de tous ceux qui diffèrent par la valeur de τ, τ variant de zéro à $\mu - 1$; les indices τ et τ' sont liés par la condition

$$(52)' \qquad \tau + \tau' = t\mu - \sigma,$$

équation indéterminée qu'il faut résoudre en nombres entiers positifs. De plus, on a

$$(53) \qquad A_\tau = A_{gr}\left[(-1)^{q\mu} S_p\, a_1 x S_{p_2} a_2 x \ldots S_{p(\mu-1)} a_{\mu-1} x\right],,$$

avec la condition

$$(53)' \qquad 1 p_1 + 2 p_2 + \ldots + (\mu - 1) p_{\mu-1} = q\mu + \tau;$$

q est un nombre entier, et les indices $p_1, p_2, \ldots$ peuvent être ensemble ou séparément 0, 1, 2, ..., $(\mu - 1)$; S_p est le $p^{\text{ième}}$ sinus d'ordre

$(\mu - 1)$ (¹); d'après cette notation, S_0 ou S_μ représente le cosinus, et dans le cas présent les sinus sont du genre elliptique quand l'indice de a, dont ils sont fonctions, est impair, et du genre hyperbolique quand cet indice est pair. Les quantités A′ sont les mêmes que les quantités A, sauf qu'il faut y changer le signe de x. Nous avons déjà indiqué la formation des agrégats; nous ne nous y arrêtons pas. Enfin on a encore

$$\text{(54)} \qquad \mathrm{B}_\sigma^{(\lambda)} = 1^{\lambda|1} \mathrm{A}_{gr} \left[(-1)^{\mu} \frac{a_0^{p_0} . a_1^{p_1} . a_2^{p_2} \dots a_{\mu-1}^{p_{\mu-1}}}{1^{p_0|1} 1^{p_1|1} 1^{p_2|1} \dots 1^{p_{\mu-1}|1}} \right],$$

les indices p devant satisfaire en nombres entiers positifs aux conditions

$$\text{(54)}' \qquad \begin{cases} p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_{\mu-1} = \lambda, \\ 1 p_1 + 2 p_2 + \dots + (\mu - 1) p_{\mu-1} = q\mu + \sigma. \end{cases}$$

Si la fonction $\psi(v)$ est nulle, l'expression (52) devient

$$\text{(55)} \qquad \varpi_2 = \Sigma_\mu (\mathrm{A}_\tau \mathrm{M}_\tau),$$

M_τ étant une des μ constantes arbitraires, et τ variant de 1 à μ.

Ces expressions ne sont, en réalité, que l'indication des calculs à effectuer; on peut facilement le vérifier sur l'équation du troisième degré. Soit ainsi $\mu = 3$; on a

$$\textcircled{\scriptsize D}[\mathrm{B}_1^{(1)} \mathrm{B}_2^{(2)}] = a_1 (a_1^2 + 2 a_0 a_2) - a_2 (-a_2^2 + 2 a_0 a_1);$$

pour $\sigma = 1$,

$$\textcircled{\scriptsize D}[\mathrm{B}_2^{(1)}] = a_2;$$

pour $\sigma = 2$,

$$\textcircled{\scriptsize D}[\mathrm{B}_1^{(1)}] = a_1$$

(¹) Nous aurions voulu conserver la notation des sinus adoptée par M. Yvon Villarceau, mais Wronski ayant en partie fait usage de la même notation pour représenter d'autres fonctions, nous avons cru devoir désigner les sinus par la lettre majuscule S, avec un indice convenable. Nous représentons ensuite les sinus du genre elliptique par la lettre de ronde $\mathcal{S}$, et les sinus du genre hyperbolique par la lettre gothique $\mathfrak{S}$. Les cosinus sont alors S_0, $\mathcal{S}_0$, $\mathfrak{S}_0$ ou S_μ, $\mathcal{S}_\mu$, $\mathfrak{S}_\mu$, ou encore C, $\mathcal{C}$, $\mathfrak{C}$, quand il devient nécessaire de les distinguer des sinus.

La relation (52)′ donne

$$1^{\circ} \qquad \sigma = 1 \left\{ \begin{array}{lll} \tau = 0, & \tau' = 1, & t = 0, \\ \tau = 1, & \tau' = 0, & t = 0, \\ \tau = 2, & \tau' = 2, & t = 1; \end{array} \right.$$

$$2^{\circ} \qquad \sigma = 2 \left\{ \begin{array}{lll} \tau = 0, & \tau' = 2, & t = 0, \\ \tau = 1, & \tau' = 1, & t = 0, \\ \tau = 2, & \tau' = 0, & t = 0. \end{array} \right.$$

Enfin, pour les divers indices τ, (53) donne

$$\begin{aligned} A_0 &= \S_0 a_1 x \mathfrak{S}_0 a_2 x + \S_1 a_1 x \mathfrak{S}_1 a_2 x + \S_2 a_1 x \mathfrak{S}_2 a_2 x, \\ A_1 &= \S_0 a_1 x \mathfrak{S}_2 a_2 x + \S_1 a_1 x \mathfrak{S}_0 a_2 x + \S_2 a_1 x \mathfrak{S}_1 a_2 x, \\ A_2 &= \S_0 a_1 x \mathfrak{S}_1 a_2 x + \S_1 a_1 x \mathfrak{S}_2 a_2 x + \S_2 a_1 x \mathfrak{S}_0 a_2 x; \end{aligned}$$

pour l'indice τ', il faut changer x en $-x$; d'après la remarque que nous avons faite, le premier sinus dans chaque terme est du genre elliptique et le second est du genre hyperbolique. Le reste du calcul s'achèverait sans difficulté.

Les calculs à effectuer directement comme vérification, dans le cas de l'équation du troisième degré, sont identiques à ceux qui conduisent à l'expression (52); pour cette raison, il est inutile d'insister davantage : ils se réduisent en définitive à des transformations de déterminants. Disons cependant que ces calculs portent en partie sur des fonctions symétriques des racines de l'unité, de la forme

$$\sum \rho_1^{\alpha} \rho_2^{\beta} \rho_3^{\gamma} \cdots$$

Ces fonctions se rencontrent constamment quand on veut établir la théorie des sinus d'un ordre μ : aussi avons-nous déterminé l'expression générale de ces fonctions; néanmoins elle n'est pas indispensable ici. Cette expression, insérée dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, n° 22, du 30 mai 1881, peut être obtenue de plusieurs manières; nous sommes même parvenu à l'expression de la fonction symétrique plus générale dans laquelle $\rho_1, \rho_2, \ldots$ représentent les racines d'une équation algébrique quelconque. On n'ignore pas que les géomètres, depuis plus d'un siècle, ont inutilement cherché la solution de ce problème, et qu'ils ont dû alors se borner à calculer des tables de coefficients. Nous pourrons donner plus tard cette solution à titre de curiosité, car l'énoncé du problème dont il s'agit n'est pas conforme au véritable objet de la théorie des fonctions symétriques; par cette solution, on aura une fois de plus la preuve que les principes de Wronski permettent de résoudre les questions réputées les plus difficiles.

Pour en revenir à l'expression (48), il nous reste à calculer ses différences et ses dérivées par rapport à la variable x. Il suffit, dans les termes qui dépendent de $\psi(x)$, de remplacer cette fonction par la différence $\Delta^\nu \psi(x)$ que l'on considère; il en serait de même de la dérivée. Dans les termes indépendants de $\psi(x)$, comme on a

$$\Delta n^\zeta = n^\zeta(n-1),$$

on voit que chaque terme donne lieu à deux nouveaux termes; pour la seconde différence on aurait trois termes, et ainsi de suite, tous ces termes provenant du développement des puissances de $n-1$. Enfin, pour les dérivées, comme on rencontre le logarithme de n, on aurait une suite illimitée de termes de même espèce que les précédents. Il convient donc d'après cela, pour avoir une certaine uniformité dans les expressions que nous voulons obtenir, de transformer les fonctions $\aleph$, qui sont formées avec les coefficients k de l'équation (38), en fonctions $\aleph$ formées avec les coefficients h de l'équation (31).

On a, en remplaçant n par $1+m$,

$$\begin{aligned}\frac{\mathfrak{D}(n_1^1 \ldots n_\mu^{-\sigma})}{N} &= \frac{\mathfrak{D}(m_1^1 \ldots m_\mu^{-\sigma})}{N'} - \frac{\sigma}{1}\frac{\mathfrak{D}(m_1^1 \ldots m_\mu^{-\sigma-1})}{N'} \\ &\quad + \frac{\sigma(\sigma+1)}{1.2}\frac{\mathfrak{D}(m_1^1 \ldots m_\mu^{-\sigma-2})}{N'} - \ldots \\ &= \sum(-1)^\nu \frac{\sigma^{\nu|1}}{1^{\nu|1}}\frac{\mathfrak{D}(m_1^1 \ldots m_\mu^{-\sigma-\nu})}{N'}.\end{aligned}$$

Cette somme indéfinie a ses termes formés au moyen de l'indice ν, qui varie de zéro à $+\infty$, et N' est le déterminant N dans lequel n est remplacé par m.

L'expression (42) donne ainsi, en faisant $-\varsigma = -\mu - \sigma$,

$$w_1 = \frac{1}{h_\mu}\sum\nolimits_\mu \left[\psi(x+\sigma u)\sum(-1)^\nu \frac{\sigma^{\nu|1}}{1^{\nu|1}}\aleph(-\varsigma-\nu)\right]. \tag{56}$$

Passons à la seconde expression; on a, pour la fonction Z_λ ou son équivalent, en vertu de (46),

$$\begin{aligned}\frac{\mathfrak{D}(n_1^1\ldots n_\lambda^{\zeta+1}\ldots n_\mu^\mu)}{\mathrm{N}} &= \frac{\zeta^{\lambda-1|-1}}{1^{\lambda-1|1}} + \frac{\zeta^{\mu|-1}}{1^{\mu|1}}\,\frac{\mathfrak{D}(m_1^1\ldots m_\lambda^{\mu+1}\ldots m_\mu^\mu)}{\mathrm{N}'} + \frac{\zeta^{\mu+1|-1}}{1^{\mu+1|1}}\\ &\quad\times\frac{\mathfrak{D}(m_1^1\ldots m_\lambda^{\mu+2}\ldots m_\mu^\mu)}{\mathrm{N}'}+\ldots+\frac{\mathfrak{D}(m_1^1\ldots m_\lambda^{\zeta+1}\ldots m_\mu^\mu)}{\mathrm{N}'}.\end{aligned}$$

Maintenant, en formant les quantités P_1Z_1, P_2Z_2, ... et faisant leur somme, puis remplaçant les rapports de déterminants par les fonctions $\aleph$, d'après (46)' (en tenant compte toutefois de ce que les coefficients k doivent être remplacés par les coefficients h, puisque l'on substitue les racines m aux racines n), on trouve

$$\begin{aligned}&\left(P_1 + P_2\frac{\zeta}{1} + P_3\frac{\zeta(\zeta-1)}{1.2} + \ldots + P_\mu\frac{\zeta^{\mu-1|-1}}{1^{\mu-1|1}}\right)\aleph(0)\\ &\quad+\frac{\zeta^{\mu|-1}}{1^{\mu|1}}(P_1h_1 + P_2h_2+\ldots+P_\mu h_\mu)\aleph(1)\\ &\quad+\left[\frac{\zeta^{\mu|-1}}{1^{\mu|1}}(P_1h_2+P_2h_3+\ldots+P_{\mu-1}h_\mu)+\frac{\zeta^{\mu+1|-1}}{1^{\mu+1|1}}P_1h_1+\ldots+P_\mu h_\mu)\right]\aleph(2)+\ldots\\ &\quad+\left[\frac{\zeta^{\mu|-1}}{1^{\mu|1}}P_1h_\mu+\frac{\zeta^{\mu+1|-1}}{1^{\mu+1|1}}(P_1h_{\mu-1}+P_2h_\mu)+\cdots+\frac{\zeta^{2\mu-1|-1}}{1^{2\mu-1|1}}(P_1h_1+\cdots+P_\mu h_\mu)\right]\aleph(\mu)+\cdots\\ &\quad+\frac{\zeta^{\zeta|-1}}{1^{\zeta|1}}P_1h_\mu\aleph(\zeta).\end{aligned}$$

Faisons, pour abréger,

$$\left\{\begin{aligned}Q_1 &= P_1h_1+P_2h_2+\ldots+P_\mu h_\mu,\\ Q_2 &= P_1h_2+P_2h_3+\ldots+P_{\mu-1}h_\mu,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ Q_\mu &= P_1h_\mu,\end{aligned}\right. \tag{57}$$

l'expression précédente devient

$$\left(P_1 + \ldots + P_\mu \frac{\zeta^{\mu-1|-1}}{1^{\mu-1|1}}\right)\aleph(0) + \frac{\zeta^{\mu|-1}}{1^{\mu|1}} Q_1 \aleph(1)$$
$$+ \left(\frac{\zeta^{\mu|-1}}{1^{\mu|1}} Q_2 + \frac{\zeta^{\mu+1|-1}}{1^{\mu+1|1}} Q_1\right)\aleph(2) + \ldots + \frac{\zeta^{\zeta|-1}}{1^{\zeta|1}} Q_\mu \aleph(\zeta).$$

Faisons encore, pour abréger,

$$(58)\qquad \begin{cases} R_\sigma = \dfrac{\zeta^{\mu|-1}}{1^{\mu|1}} Q_\sigma + \dfrac{\zeta^{\mu+1|-1}}{1^{\mu+1|1}} Q_{\sigma-1} + \ldots + \dfrac{\zeta^{\mu+\sigma-1|-1}}{1^{\mu+\sigma-1|1}} Q_1, \\ R_0 = P_1 + P_2 \dfrac{\zeta}{1} + P_3 \dfrac{\zeta^{2|-1}}{1^{2|1}} + \ldots + P_\mu \dfrac{\zeta^{\mu-1|-1}}{1^{\mu-1|1}}; \end{cases}$$

on a définitivement

$$(59)\qquad \varpi_2 = \frac{1}{h_\mu} \Sigma_\zeta R_\sigma \aleph(\sigma).$$

Σ est ici une intégrale définie dont les limites sont zéro et ζ.

L'expression (59) est générale, car si l'indice de Q, dans (58), est plus grand que μ, ce coefficient est nul d'après (57); quant à la factorielle $\zeta^{p|-1}$, elle est nulle si $p > \zeta$, car elle contient le facteur $(\zeta - \zeta)$, c'est-à-dire zéro. Si $\zeta < \mu$, la valeur de ϖ_2 se réduit à R_0, à cause des factorielles qui sont nulles; si ζ est négatif, l'intégrale est évidemment indéfinie, puisque le développement de $(1 + m)^\zeta$, qui était limité pour ζ positif, devient indéfini pour ζ négatif.

D'après ce qui précède, on passe facilement aux différences de ϖ_2. En effet, la différence de n^ζ est $m.n^\zeta$; par suite, l'expression de ΔZ_λ est

$$\frac{\Phi\left[n_1^1 \ldots n_{\lambda-1}^{\lambda-1}(m_\lambda n_\lambda^{\zeta+1})\, n_{\lambda+1}^{\lambda+1} \ldots n_\mu^\mu\right]}{N}$$
$$= \frac{\zeta^{\lambda-2|-1}}{1^{\lambda-2|1}} + \frac{\zeta^{\mu-1|-1}}{1^{\mu-1|1}} \frac{\Phi(m_1^1 \ldots m_\lambda^{\mu+1} \ldots m_\mu^\mu)}{N'} + \ldots + \frac{\Phi(m_1^1 \ldots m_\lambda^{\zeta+2} \ldots m_\mu^\mu)}{N'}.$$

En achevant le calcul comme plus haut, on trouverait

$$R'_\sigma = \frac{\zeta^{\mu-1|-1}}{1^{\mu-1|1}} Q_\sigma + \ldots + \frac{\zeta^{\mu+\sigma-2|-1}}{1^{\mu+\sigma-2|1}} Q_1,$$
$$R'_0 = P_2 + P_3 \frac{\zeta}{1} + \ldots + P_\mu \frac{\zeta^{\mu-2|-1}}{1^{\mu-2|1}},$$

et par suite

$$\Delta w_2 = \frac{1}{h_\mu} \Sigma_{\zeta+1} R'_0 \aleph(\sigma);$$

l'intégrale a pour limites zéro et $\zeta + 1$ pour les valeurs positives des ζ, elle est indéfinie pour les valeurs négatives de la variable.

En continuant de la même manière, on aurait

$$(60) \qquad \begin{cases} R_\sigma^{(\nu)} = Q_\sigma^{(\nu)} + \frac{\zeta}{1} Q_{\sigma-1}^{(\nu)} + \ldots + \frac{\zeta^{\sigma-1|-1}}{1^{\sigma-1|1}} Q_1^{(\nu)} \\ R_0^{(\nu)} = P_{\nu+1} + P_{\nu+2}\zeta + \ldots + P_\mu \frac{\zeta^{\mu-1-\nu|-1}}{1^{\mu-1-\nu|1}}, \end{cases}$$

et la différence est

$$(61) \qquad \Delta^\nu w_2 = \frac{1}{h_\mu} \Sigma_{\zeta+\nu} R_\sigma^{(\nu)} \aleph(\sigma),$$

l'intégrale s'étendant de zéro à $\zeta + \nu$, pour les valeurs positives de ζ, ou pouvant être regardée comme indéfinie pour les valeurs négatives de cette variable.

L'expression des coefficients R est générale, par la raison que nous avons donnée plus haut.

Cette formule (61) permet de passer à l'expression des dérivées. En effet, on a $\frac{1}{u} n^\zeta \mathrm{L}n$, pour la dérivée de n^ζ; en développant donc le logarithme, il vient

$$\mathrm{L}n = m - \tfrac{1}{2}m^2 + \tfrac{1}{3}m^3 - \ldots,$$

et l'on retombe, par suite, sur des transformations identiques aux précédentes; il en résulte

$$(62) \qquad \frac{dw_2}{dx} = \frac{1}{u}\left(\Delta w_2 - \frac{1}{2}\Delta^2 w_2 + \frac{1}{3}\Delta^3 w_2 - \ldots\right).$$

Les autres dérivées dépendent du développement des puissances du logarithme; Wronski a donné des formules permettant d'obtenir les puissances des polynômes quel que soit le nombre de leurs termes. Il est inutile d'insister davantage sur ces transformations, dont on doit avoir saisi l'esprit.

Suite du calcul de l'inconnue. Détermination des constantes. — Revenons à la question principale. Au moyen des expressions (35) à (36)″, ou des mêmes expressions transformées comme nous venons de le faire, il est facile de calculer les divers coefficients H de la fonction $\varphi(y)$; désignant par un accent les valeurs particulières que prennent ces coefficients quand on remplace y par w, on obtient

$$(63)\left\{\begin{aligned} \varphi(w) &= \sum_\mu \Delta^\sigma w \mathrm{H}'_\sigma - \psi(x),\\ \left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right) &= \sum_\mu \frac{d\Delta^\sigma w}{dx}\mathrm{H}'_\sigma + \sum_\mu \Delta^\sigma w\left(\frac{d\mathrm{H}'_\sigma}{dx}\right),\\ \left(\frac{d^2\varphi(w)}{dx^2}\right) &= \sum_\mu \frac{d^2\Delta^\sigma w}{dx^2}\mathrm{H}'_\sigma + 2\sum_\mu \frac{d\Delta^\sigma w}{dx}\left(\frac{d\mathrm{H}'_\sigma}{dx}\right) + \sum_\mu \Delta^\sigma w\left(\frac{d^2\mathrm{H}'_\sigma}{dx^2}\right),\end{aligned}\right.$$

et ainsi de suite. On doit se rappeler que les dérivées entre parenthèses ne sont prises que sur les fonctions de w seulement. Si l'on tient compte des dérivées totales de $\varphi(w)$, comme nous l'avons déjà fait dans le cas des équations différentielles, les dérivées précédentes deviennent

$$(63)'\left\{\begin{aligned} \left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right) &= \sum_\mu \Delta^\sigma w\left[\left(\frac{d\mathrm{H}'_\sigma}{dx}\right) - \frac{d\mathrm{H}'_\sigma}{dx}\right],\\ \left(\frac{d^2\varphi(w)}{dx^2}\right) &= 2\sum_\mu \frac{d\Delta^\sigma w}{dx}\left[\left(\frac{d\mathrm{H}'_\sigma}{dx}\right) - \frac{d\mathrm{H}'_\sigma}{dx}\right] + \sum_\mu \Delta^\sigma w\left[\left(\frac{d^2\mathrm{H}'_\sigma}{dx^2}\right) - \frac{d^2\mathrm{H}'_\sigma}{dx^2}\right].\end{aligned}\right.$$

On calculerait aussi les dérivées de $\mathrm{F}(w)$. Les dérivées de $\varphi(w)$ et de $\mathrm{F}(w)$ (¹), portées dans l'expression (22), savoir :

$$(64)\left\{\begin{aligned} \mathrm{F}(y) = \mathrm{F}(w) &- \frac{\varphi(w)}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)}\left(\frac{d\mathrm{F}(w)}{dx}\right)\\ &+ \frac{1}{2}\frac{[\varphi(w)]^2}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)^3}\left[\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)\left(\frac{d^2\mathrm{F}(w)}{dx^2}\right) - \left(\frac{d^2\varphi(w)}{dx^2}\right)\left(\frac{d\mathrm{F}(w)}{dx}\right)\right] - \ldots,\end{aligned}\right.$$

(¹) On introduit de cette manière les dérivées $\frac{dw}{dx}, \frac{d^2w}{dx^2}, \ldots$; ces quantités peuvent se déduire de la valeur fondamentale (32), mais le moyen le plus convenable, eu égard à la convergence de l'expression (22), consiste à les obtenir par donnent l'expression de la fonction inconnue $F(y)$, cette fonction pouvant se réduire à y, à une dérivée ou à une différence de y. Nous rappelons que cette expression se déduit de (3), en remplaçant les différentielles par des dérivées prises par rapport à x, d'après les formules (19), (20) et (21).

On doit remarquer que la valeur moyenne de la fonction y, ou de $F(y)$, est donnée exactement par l'équation réduite; donc, pour la valeur moyenne de y, l'expression (64) se réduit à son premier terme, les autres étant nuls. Pour les valeurs voisines de cette valeur moyenne de l'inconnue, l'expression (64) est très convergente, et cette convergence diminue à mesure que la fonction inconnue s'éloigne de cette valeur; aussi la valeur moyenne de y doit-elle être choisie, autant que possible, de manière à représenter la moyenne des valeurs de la fonction cherchée, dans les limites dont on a besoin.

Si, pour certaines valeurs de la fonction, l'expression (64) n'était plus assez convergente pour l'approximation que l'on désire, ou encore si elle était divergente, il faudrait transformer l'expression donnée au moyen des formules de la génération neutre, ou au moyen de la méthode d'exhaustion, ou par tout autre moyen que nous avons déjà indiqué. Dans le cas de la méthode d'exhaustion, l'expression (22), ou (64), prend la forme (27), et les valeurs des quantités Δw_1, $\Delta^2 w_1, \ldots, \frac{dw_1}{dx}, \frac{d^2 w_1}{dx^2}, \ldots, \frac{d\Delta w_1}{dx}, \frac{d\Delta w_1}{dx^2}, \ldots$, s'en déduisent en faisant la fonction F égale à l'une de ces quantités; ainsi l'on aurait, pour $\frac{d\Delta w_1}{dx}$,

$$\frac{d\Delta w_1}{dx} = \frac{d\Delta w}{dx} - \frac{\varphi(w,\omega)}{\left(\frac{d\varphi(w,\omega)}{dx}\right)}\frac{d^2\Delta w}{dx^2} + \ldots.$$

Il reste encore à déterminer les constantes arbitraires, ainsi que les valeurs moyennes que nous avons supposées connues. D'après ce qui a déjà été dit au sujet de cette détermination, dans le cas d'équations

la différentiation de l'équation proposée. Les différences $\Delta^\sigma w$ et leurs dérivées, provenant des différentiations successives, sont considérées comme des fonctions de x données par (32); les opérations que l'on effectue alors introduisent au premier degré les dérivées cherchées et permettent de les calculer facilement.

différentielles, il convient tout d'abord de prendre les valeurs moyennes égales aux valeurs initiales qui permettent de déterminer les constantes d'intégration; on obtient alors ces constantes au moyen d'un système de μ équations linéaires simultanées. S'il convient ensuite de prendre les valeurs moyennes différentes des valeurs initiales avec les expressions données pour l'intégration, expressions qui seront complètement déterminées, on calculera la valeur moyenne β de y au moyen de celle de α de x, comme on le ferait pour des valeurs particulières quelconques; puis, substituant ces quantités α et β dans l'expression de la valeur fondamentale, on les considérera comme de nouvelles valeurs initiales, de telle sorte que les nouvelles constantes d'intégration seront déterminées par un système d'équations linéaires simultanées. Ce système sera évidemment le même que le précédent, il n'en différera que par les valeurs numériques des variables; les formules de résolution ayant servi à la première détermination des constantes serviront aussi à la seconde, en y substituant les nouvelles valeurs initiales, qui sont les valeurs moyennes adoptées.

Ce que nous avons dit au sujet de l'intégration des équations différentielles a donc lieu aussi pour les équations contenant des différences; cela nous dispense d'entrer dans plus de détails : un exemple suffira pour achever d'élucider la question.

Cinquième exemple. — Les équations différentielles que nous avons traitées comme second exemple d'application de la méthode secondaire représentent la marche de certains phénomènes; en supposant que les conditions de ces phénomènes viennent à changer périodiquement, la loi restant la même, les équations différentielles dont nous parlons conduisent à former deux équations nouvelles qui contiennent des différences au lieu de différentielles. L'une de ces équations, qu'il suffit d'écrire, est

$$(\alpha) \qquad \Delta y - \mathrm{H}uy - ru = 0,$$

en faisant

$$(\alpha)' \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{H} &= [tx + q(y-b) + cp] \\ &\quad \times \left\{ \frac{u}{2}\left[tx + q(2y-b) + cp - \frac{pn}{tx + q(y-b) + cp}\right] - 1 \right\}. \end{aligned} \right.$$

b, c, n, p, q, t et r sont des constantes, b est la valeur que prend y pour $x = 0$, et u est la différence Δx. Telle est l'équation que nous nous proposons d'intégrer.

Formons l'équation réduite; pour cela, substituons à x et y, dans le coefficient H, leurs valeurs moyennes α et β, que nous prendrons égales respectivement aux valeurs initiales zéro et b; H devient

$$(\beta)' \qquad h = cp\left[\frac{u}{2}\left(bq + cp - \frac{n}{c}\right) - 1\right];$$

par suite, l'équation réduite est

$$(\beta) \qquad \Delta w - huw - ru = 0,$$

d'où l'on tire

$$w = \mathrm{M}(1 + hu)^{\frac{x}{u}} - \frac{r}{h}.$$

La constante M, déterminée par les valeurs initiales, est

$$\mathrm{M} = b + \frac{r}{h},$$

ce qui donne, pour la valeur fondamentale,

$$(\gamma) \qquad w = \left(b + \frac{r}{h}\right)(1 + hu)^{\frac{x}{u}} - \frac{r}{h};$$

on en déduit les quantités suivantes :

$$(\gamma)' \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= \left(b + \frac{r}{h}\right)\frac{1}{u}(1 + hu)^{\frac{x}{u}}\mathrm{L}(1 + hu),\\ \Delta w &= u(bh + r)(1 + hu)^{\frac{x}{u}},\\ \frac{d\Delta w}{dx} &= (bh + r)(1 + hu)^{\frac{x}{u}}\mathrm{L}(1 + hu). \end{aligned}\right.$$

Nous pouvons maintenant calculer les fonctions $\varphi(w)$, $\left(\frac{d\varphi(w)}{dx}\right)$, pour avoir l'expression de l'inconnue, d'après (64), c'est-à-dire

$$y = w - \frac{\varphi(w)}{\left(\frac{d\varphi w}{dx}\right)} \frac{dw}{dx} + \cdots$$

Or, d'après (63) et (63)', en mettant H' pour H quand on substitue w à y,

$$(\delta) \quad \begin{cases} \varphi(w) = u(h - \mathrm{H}')w, \\ \left(\dfrac{d\varphi(w)}{dx}\right) = u\left[\dfrac{d\mathrm{H}'}{dx} - \left(\dfrac{d\mathrm{H}'}{dx}\right)\right] w, \end{cases}$$

et, si l'on écrit la dérivée de w sous la forme

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{u}\left(w + \frac{r}{h}\right) \mathrm{L}(1 + hu),$$

on obtient pour l'inconnue, avec deux termes seulement,

$$(\varepsilon) \quad y = w - \frac{h - \mathrm{H}'}{\dfrac{d\mathrm{H}'}{dx} - \left(\dfrac{d\mathrm{H}'}{dx}\right)} \frac{1}{u}\left(w + \frac{r}{h}\right)\mathrm{L}(1 + hu).$$

Aux quantités h, H et w qui entrent dans (ε) et qui sont données par (α)', (β)' et (γ), il faut joindre la suivante :

$$(\zeta) \quad \begin{cases} \dfrac{d\mathrm{H}}{dx} - \left(\dfrac{d\mathrm{H}}{dx}\right) \\ \quad = t\left\{\dfrac{u}{2}\left[tx + q(2y - b) + cp - \dfrac{pn}{tx + q(y - b) + cp}\right] - 1\right\} \\ \qquad + \dfrac{tu}{2}[tx + q(y - b) + cp]\left\{1 + \dfrac{pn}{[tx + q(y - b) + cp]^2}\right\}. \end{cases}$$

L'expression (ε) donne généralement les valeurs de l'inconnue, mais si, pour certaines valeurs de x, (ε) ne donnait pas une approximation suffisante, il conviendrait de recourir à divers moyens de transformation, tels que la méthode d'exhaustion ou le changement de valeurs moyennes, comme on le sait déjà.