JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE MATHIEU

Remarques sur les Mémoires relatifs à la théorie de la lumière, renfermés dans les Exercices d'Analyse et de Physique mathématique de Cauchy

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 7 (1881), p. 201-214.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1881_3_7__201_0>

Remarques sur les Mémoires relatifs à la théorie de la lumière, renfermés dans les Exercices d'Analyse et de Physique mathématique de Cauchy;

PAR M. ÉMILE MATHIEU.

Il y a plus de dix-huit ans que, m'occupant de la théorie de la lumière, je lus pour la première fois, dans les *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique* de Cauchy, les Mémoires qui sont relatifs à cette théorie et que j'en vérifiai tous les calculs avec le plus grand soin. Cette lecture me conduisit presque immédiatement à faire différentes remarques sur cet Ouvrage, et je les communiquai, à cette époque, à Poncelet, qui m'engagea à plusieurs reprises à les publier dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*. Cependant je ne pus me résoudre alors à publier des critiques sur le travail d'un géomètre qui s'était acquis tant de réputation.

J'ai encore de cette époque plusieurs manuscrits sur la théorie de la lumière, et j'ai publié postérieurement un travail sur cette théorie [*Mémoire sur la dispersion de la lumière* (*Journal de Mathématiques*, 1866, et *Annales de Chimie et de Physique*, 4e série, t. X)]; toutefois, jusque dans ces derniers temps, je n'avais pas rédigé les remarques critiques dont je parle. Étant aujourd'hui plus connu dans la Science, je ne me crois plus obligé à la même circonspection, et j'ai pensé qu'elles pourraient avoir encore quelque intérêt, précisément à cause de la célébrité du géomètre auquel elles s'adressent. Ces réflexions portant surtout sur des considérations physiques ou mécaniques, j'ai pu les retrouver sans peine, et mes souvenirs, au bout de dix-huit ans, ont été assez précis pour que la Note que je publie diffère peu, je crois, de celle que j'aurais publiée à cette époque.

Ces remarques sont si faciles, que je suis porté à croire que plusieurs géomètres se les sont faites à eux-mêmes; mais, comme elles ne paraissent pas avoir été publiées, elles peuvent avoir encore quelque utilité.

Premier Mémoire. — Quoique ce Mémoire ait pour titre : *Sur les mouvements infiniment petits d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle,* le but de l'auteur est d'établir les principes de la théorie mathématique de la lumière.

Après avoir établi les équations différentielles du mouvement, et après avoir supposé que la constitution du système donné de molécules est partout la même, il imagine des ondes planes qui se propagent parallèlement à elles-mêmes, et dont le mouvement satisfait aux équations différentielles; les déplacements ξ, η, ζ de chaque molécule se trouvent être des expressions trigonométriques de la forme

$$\begin{gathered} a\cos(ux+vy+wz-st), \\ b\cos(ux+vy+wz-st), \\ c\cos(ux+vy+wz-st), \end{gathered}$$

multipliées par une même exponentielle

$$e^{\mathrm{KR}-\mathrm{S}t};$$

K, S sont des constantes et R est la distance de la molécule vibrante au plan

$$\mathrm{U}x+\mathrm{V}y+\mathrm{W}z=0. \tag{a}$$

D'après ces formules, le mouvement se propageant en ondes planes parallèles au plan

$$ux+vy+wz=0,$$

chaque molécule décrit, *en général*, une ellipse dont l'auteur donne les équations.

Or, il est aisé de voir que le mouvement vibratoire elliptique ne peut, en général, se propager dans un cristal. Si, en effet, un rayon polarisé elliptiquement tombe, par exemple, sur un spath d'Islande, on sait que ce rayon, en pénétrant dans le cristal, se décompose en deux rayons, l'un ordinaire, l'autre extraordinaire, et en général un rayon tombant sur un cristal uniaxe ou biaxe se décomposera en deux rayons dont les vibrations seront rectilignes et correspondront à deux ondes planes différentes.

Si un milieu est isotrope ou que la propagation du mouvement dans l'éther s'effectue de la même manière dans tous les sens, un rayon polarisé elliptiquement en tombant sur ce corps donne un rayon réfracté qui est aussi polarisé elliptiquement; mais alors il est inutile de considérer comme simples ces ondes à vibrations elliptiques, puisqu'elles peuvent être considérées comme la superposition de deux ondes planes simples à vibrations rectilignes, de phase différente et rectangulaires entre elles.

A la vérité, certains cristaux sont doués du pouvoir rotatoire et des vibrations elliptiques peuvent s'y propager; mais il est bien aisé de voir que les équations de Cauchy ne peuvent convenir à ces milieux. En effet, si dans les équations de Cauchy,

$$\left(\mathfrak{G}+\frac{d^2\mathfrak{H}}{du^2}\right)\xi+\frac{d^2\mathfrak{H}}{du\,dv}\eta+\frac{d^2\mathfrak{H}}{du\,dw}\zeta=s^2\xi,$$

etc.,

on exprime que le milieu est isotrope, et que par conséquent ces équations ne changent pas de forme par une transformation de coordonnées rectangulaires, alors, d'après un calcul extrêmement facile, longuement développé par Cauchy (p. 101 à 123), on reconnaît que $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{G}$ sont des fonctions de $u^2+v^2+w^2$ et (*voir* p. 137 à 142) il ne se produit que deux ondes planes simples parallèlement à un plan donné, l'une dans laquelle la vibration est transversale, l'autre dans laquelle la vibration est longitudinale. Or, si l'on prend une dissolution douée du pouvoir rotatoire, elle peut évidemment être considérée comme un corps isotrope, et il résulte des idées de Fresnel, qui ont été sur ce point adoptées par tous les physiciens et les géomètres, que, parallèlement à un plan donné, il se propage dans ce corps deux ondes planes dont la vitesse de propagation est différente, et dans lesquelles la vibration est transversale et circulaire. Ainsi, sans être obligé aucunement de former les équations différentielles relatives au pouvoir rotatoire, on reconnaît que les équations de Cauchy ne peuvent expliquer ce phénomène, même dans le cas le plus simple.

Portons maintenant notre attention sur le coefficient par lequel se trouvent multipliées les composantes ξ, η, ζ de la vibration, et qui a pour valeur

$$e^{\mathrm{KR}} . e^{-\mathrm{S}t},$$

K étant négatif et R étant la distance de la molécule vibrante au plan dont l'équation est (a). Le facteur $e^{-\mathrm{S}t}$ est étranger aux phénomènes de la lumière; la quantité de la lumière qui se propage ne doit pas non plus varier, par suite de l'extinction, comme e^{KR}, mais comme e^{-mr}, r étant la distance de la molécule au plan

$$(b) \qquad ux + vy + wz = 0$$

parallèle aux ondes, comme on peut le démontrer par un raisonnement élémentaire employé dans les Ouvrages de Physique; de plus, le coefficient m peut varier avec les quantités u, v, w, qui déterminent le plan (b) et la longueur d'ondulation de la lumière.

Mais ce que je veux surtout faire remarquer, c'est que les équations différentielles de Cauchy doivent être considérées *a priori* comme ne pouvant s'appliquer qu'au mouvement de la lumière dans les corps parfaitement diaphanes, et, par suite, comme impropres à tenir compte de l'extinction de la lumière.

En effet, quand un rayon de lumière se propage en s'affaiblissant, c'est qu'une portion de la lumière ou, ce qui est la même chose, de chaleur rayonnante se change en chaleur obscure en se fixant dans le corps. Si nous supposons que le mouvement se propage en ondes planes d'une certaine couleur ou d'une durée de vibration déterminée, alors, quand l'onde passera d'une position à une position suivante infiniment voisine, une partie du mouvement se propagera sans changer de nature et en conservant la même durée de vibration, une autre partie changera de nature.

De ces deux phénomènes, on peut n'en examiner qu'un seul, le premier, qui est le plus simple, mais c'est à la condition d'introduire dans les équations différentielles des termes qui tiennent compte de l'absorption de la lumière, ainsi qu'on tient compte en Mécanique des frottements, sans être obligé de connaître exactement leur nature. Il faudra donc, pour avoir égard à l'absorption de la lumière, introduire dans les équations différentielles des termes analogues à ceux que Navier a fait entrer dans les équations différentielles de l'Hydrodynamique, afin d'avoir égard à la cohésion des liquides. Ce n'est qu'à cette condition qu'on pourra introduire dans les intégrales du mouvement vibratoire le coefficient e^{-mr} dont j'ai parlé ci-dessus, et qui exprime l'extinction.

Ainsi, on reconnaît que les équations de Cauchy ont une généralité qui est étrangère aux phénomènes de la Physique. En général, un mouvement simple par ondes planes se ferait d'après ses équations avec vibrations elliptiques, ce qui est contraire au phénomène ordinaire de la double réfraction, et ses équations ne peuvent expliquer la polarisation rotatoire, quand la vibration est effectivement circulaire ou elliptique. Enfin ses équations sont tout à fait impropres à exprimer l'extinction de la lumière.

Deuxième Mémoire, p. 33. — Il a pour titre : *Sur les mouvements infiniment petits de deux systèmes de molécules qui se pénètrent mutuellement.* Comme le dit l'auteur à la page 37, son but, en exposant ce travail, est dans l'application qu'il croit qu'on en peut faire à la théorie de la lumière, en supposant que l'un des deux systèmes soit celui des molécules d'éther et l'autre celui des molécules du corps renfermant cet éther. Rien n'est plus naturel que de faire cet essai; mais, si on l'opère, on peut reconnaître au moins, lorsque le corps est parfaitement diaphane, que, pour rendre compte des phénomènes de la lumière, il faut admettre que les molécules du corps n'ont aucune action dynamique sur l'éther, mais seulement une action statique qui change son élasticité d'une manière variable avec la direction.

Comme je ne veux point exposer ici une théorie de la lumière, je ne m'arrêterai pas à cette question, non plus qu'à démontrer que les équations de Cauchy pour un seul système de molécules ne peuvent expliquer les phénomènes connus de la double réfraction.

Troisième Mémoire, p. 101. — *Sur les mouvements infiniment petits dont les équations présentent une forme indépendante des trois axes de coordonnées supposées rectangulaires ou de deux d'entre eux.*

Ce Mémoire est très facile et ne donne lieu à aucune remarque.

Quatrième et cinquième Mémoires, p. 133-178 et 212-269, qui traitent de la réflexion et de la réfraction pour les milieux isotropes.

J'ai expliqué ci-dessus que les équations de Cauchy sont impropres à exprimer l'extinction de la lumière. Page 140, revenant sur les formules du mouvement simple dans le cas où le milieu est isotrope et où la propagation des mouvements vibratoires s'y effectue en tous sens de la même manière, il suppose que, les ondes planes se propageant parallèlement au plan

$$(b) \qquad ux + vy + wz = 0,$$

l'extinction de la lumière varie avec la distance R à un autre plan

$$Ux + Vy + Wz = 0.$$

Il est cependant en quelque sorte plus évident encore, quand le milieu est isotrope, que cette extinction ne peut dépendre que de la distance r au plan (b). J'ai montré ci-dessus que le coefficient qui exprime l'extinction est de la forme e^{-mr}, m ne dépendant que de u, v, w; dans un corps isotrope, m ne dépendra plus que de la seule quantité $u^2+v^2+w^2$.

Mais arrivons au point le plus important de ces deux Mémoires. L'étude que l'on se propose dépend entièrement de ce qui se passe à la séparation des deux milieux, et il paraît indispensable aussi bien pour les géomètres que pour les physiciens d'entrer à ce sujet dans des considérations mécaniques; cependant Cauchy préfère y substituer des hypothèses purement analytiques, qui n'ont rien d'obligatoire, en s'appuyant sur un Mémoire qu'il a publié ailleurs (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* 1839, 1^{er} semestre, dans trois articles, p. 374, 432 et 459). Il arrive ainsi à un théorème dont le long énoncé (p. 152 et 153) est *a priori* bien peu satisfaisant pour servir de base à une théorie.

Or, je veux montrer combien la manière de raisonner de Cauchy dans cette question est dangereuse, en faisant une hypothèse mécanique beaucoup plus vraisemblable et bien plus facile à comprendre que ses hypothèses analytiques, mais qui a beaucoup d'analogie avec les siennes et qui présente exactement la même faute.

Cette hypothèse mécanique consiste à supposer que les forces élastiques développées par le mouvement du fluide éthéré sont égales de part et d'autre au plan de séparation des deux milieux et infiniment près de ce plan.

Soient

Oz la trace du plan d'incidence d'un rayon de lumière simple sur le plan de séparation;
Ox une normale à ce dernier plan;
Oy une perpendiculaire au plan d'incidence.

Désignons les composantes, suivant Ox, Oy, Oz, des forces élastiques exercées sur un élément plan, suivant que cet élément plan est perpendiculaire

$$\begin{array}{ll} \text{à } Ox & \text{par} \\ \text{à } Oy & \text{»} \\ \text{ou à } Oz & \text{»} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} N_1, T_3, T_2, \\ T_3, N_2, T_1, \\ T_2, T_1, N_3. \end{array} \right.$$

En désignant par ξ, η, ζ les composantes de la vibration et par μ un coefficient constant, on a, comme on sait,

$$N_1 = 2\mu \frac{d\xi}{dx}, \quad N_2 = 2\mu \frac{d\eta}{dy}, \quad N_3 = 2\mu \frac{d\zeta}{dz},$$
$$T_1 = \mu\left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right), \quad T_2 = \mu\left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}\right), \quad T_3 = \mu\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right).$$

Sur le plan des y, z à la limite du premier milieu, ξ, η, ζ doivent être remplacés par la somme des composantes des vibrations du rayon incident et du rayon réfléchi; dans le second milieu, ξ, η, ζ sont les composantes de la vibration du rayon réfracté.

Le rayon étant pris simple et polarisé, on peut le supposer décomposé en deux autres rayons simples et tels que les vibrations de l'un soient perpendiculaires au plan d'incidence et les vibrations de l'autre soient dans ce plan.

La quantité μ est celle que l'on désigne sous le nom d'*élasticité* dans la théorie de la lumière; d'après Fresnel, cette élasticité serait égale dans les deux milieux; or, en admettant cette hypothèse et en supposant, suivant l'ordinaire, que la phase ne change pas dans la réflexion et la réfraction, voici ce que l'on trouve par des calculs faciles :

1° Si la vibration est perpendiculaire au plan d'incidence, l'hypothèse de l'égalité des forces élastiques de part et d'autre du plan yOz détermine complètement les mouvements réfléchi et réfracté, et l'on obtient précisément les formules de Fresnel.

2° Si la vibration est située dans le plan d'incidence, l'hypothèse de l'égalité des forces élastiques détermine encore complètement les mouvements réfléchi et réfracté. Des deux équations que l'on obtient, l'une s'accorde avec les équations de Fresnel, mais l'autre qui provient de l'égalité des forces T_2 est en contradiction avec ces équations.

Donc, le rayon étant supposé polarisé dans un plan quelconque, la théorie de Fresnel conduit à l'égalité des forces

$$N_1,\ N_2,\ N_3\ T_1,\ T_3$$

au contact des deux milieux, mais non à l'égalité des forces T_2.

Néanmoins, il n'y aurait pas à hésiter dans un choix entre ces deux théories; en effet, dans la théorie de Fresnel, le principe des forces vives est satisfait; dans celle que je viens d'indiquer, il ne l'est pas. Je vais maintenant démontrer que la théorie de Cauchy présente exactement la même faute.

En effet Cauchy met, page 170, ses équations de condition relatives à la surface réfléchissante et qui doivent avoir lieu pour $x=0$ sous cette forme :

$$(39)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\eta}{dz}-\frac{d\zeta}{dy}&=\frac{d\eta'}{dz}-\frac{d\zeta'}{dy},\\ \frac{d\zeta}{dx}-\frac{d\xi}{dz}&=\frac{d\zeta'}{dx}-\frac{d\xi'}{dz},\\ \frac{d\zeta}{dy}-\frac{d\eta}{dx}&=\frac{d\xi'}{dy}-\frac{d\eta'}{dx},\end{aligned}\right.$$

$$(40)\qquad \bar{\eta}+D_y\left(\frac{1}{\upsilon}+\frac{1}{\upsilon'}-\frac{D_x}{\upsilon\upsilon'}\right)\bar{\xi}=\eta'+D_y\left(\frac{1}{\upsilon}+\frac{1}{\upsilon'}+\frac{D_x}{\upsilon\upsilon'}\right)\bar{\xi}'.$$

Les trois premières équations s'accordent avec celles de Fresnel, et on le vérifiera de la manière suivante :

1° Si la vibration est perpendiculaire au plan d'incidence, on aura

$$\xi = 0, \quad \zeta = 0, \quad \xi' = 0, \quad \zeta' = 0,$$

et ces trois équations reviennent aux deux équations de Fresnel.

2° Si la vibration est située dans le plan d'incidence, on aura

$$\eta = 0, \quad \eta' = 0, \quad \frac{d\xi}{dy} = 0, \quad \frac{d\xi'}{dy} = 0, \quad \frac{d\zeta}{dy} = 0, \quad \frac{d\zeta'}{dy} = 0,$$

et ces trois équations se réduisent à une seule, qui est encore une des équations de Fresnel.

Quant à l'équation (40), on voit aisément qu'on doit la rejeter, parce qu'elle est, en général, en contradiction avec le principe des forces vives.

Ordinairement on suppose une relation d'égalité entre les deux milieux éthérés; ou l'on admet avec Fresnel que l'élasticité de l'éther est la même dans les deux milieux, ou l'on admet avec Neumann que la densité de l'éther y est la même. Cauchy, au contraire, a établi ces formules en ne supposant aucune relation entre les deux milieux. C'est seulement à la page 246 qu'il particularise ses formules de manière qu'un rayon polarisé perpendiculairement au plan d'incidence puisse, sous une incidence convenable, disparaître dans la réflexion : fait d'expérience peu propre à servir de base à une théorie physico-mathématique. (En effet, en Physique mathématique, on ne doit pas partir de faits d'expérience, mais on doit les retrouver d'après les principes physiques d'où l'on est parti.) Il obtient alors des formules qui donnent les mêmes lois expérimentales que celles de Fresnel; elles ne sont pas cependant identiques, car il est enfin obligé d'établir une relation d'égalité entre les natures des deux milieux qu'il écrit ainsi (p. 248),

$$(19) \qquad \frac{k^2}{1+f} = \frac{k'^2}{1+f'},$$

et qui n'exprime pas l'égalité d'élasticité des deux milieux, adoptée par Fresnel.

Désignons par ω la vitesse des ondes transversales, par Ω la vitesse des ondes longitudinales dans le premier milieu, par ω', Ω' les mêmes quantités dans le second milieu. L'équation (19) peut s'écrire

$$(1+f)\frac{s^2}{k^2} = (1+f')\frac{s^2}{k'^2},$$

$\frac{s}{k}$, $\frac{s}{k'}$ représentant les vitesses ω, ω' des ondes de même couleur dans les deux milieux; donc cette équation peut s'écrire

$$\frac{\Omega^2}{\omega^2}\omega^2 = \frac{\Omega'^2}{\omega'^2}\omega'^2 \quad \text{ou} \quad \Omega = \Omega'.$$

Ainsi, Cauchy admettant que le mouvement de l'éther peut se propager en ondes longitudinales, l'équation (19) exprimerait, bien qu'il ne le dise pas, que les ondes simples longitudinales se propagent avec la même vitesse dans les deux milieux.

Mais ce qu'il importe surtout de remarquer, c'est que la formule (19), substituée à la condition de Fresnel, empêche que le principe des forces vives ait lieu, et que par cette seule raison la théorie de Cauchy pourrait être rejetée.

On se tromperait beaucoup si l'on concluait de ce qui précède que j'admets la théorie de la réflexion et de la réfraction à la surface des corps isotropes telle qu'elle a été donnée par Fresnel; je n'ai, au contraire, aucun doute que ce soit la théorie de Neumann sur cette question qui soit la vraie. Si j'ai comparé la théorie de Cauchy à celle de Fresnel, c'est qu'elles ont beaucoup de rapports entre elles, et l'on doit reconnaître combien les considérations si simples de Fresnel sont supérieures à tous égards à ces deux Mémoires si compliqués de Cauchy.

Les formules qui viennent de nous occuper sont précédées de formules plus générales, d'après lesquelles il n'existe plus d'angle de polarisation complète; alors la vibration du rayon polarisé perpendiculairement au plan d'incidence ne s'annule pour aucune valeur de l'incidence τ, mais devient seulement minimum et très petite pour une valeur φ de τ.

Le principe de la conservation de la force vive n'est plus rigoureusement applicable, une petite quantité de lumière du rayon incident étant perdue par absorption ou diffusion, et il faut faire subir des modifications très petites aux formules de Fresnel ou à celles de Neumann, relatives à la réflexion et à la réfraction.

D'après ces formules, la vibration réfléchie pour un rayon incident polarisé perpendiculairement au plan d'incidence s'annule pour $\tau = \varphi$ et change de sens quand τ dépasse φ. Donc, d'après les nouvelles formules, quand on fera varier l'angle d'incidence entre $\tau = \varphi - s$ et $\tau = \varphi + s$, s étant très petit, la vibration réfléchie, qui s'effectue d'abord sensiblement dans le même sens que la vibration incidente, vibre en dernier lieu en sens contraire. La vibration du rayon incident étant désignée par $\sin\frac{2\pi t}{T}$ sur le plan réflecteur, Fresnel et Neumann représentent au même moment celle du rayon réfléchi par $v \sin\frac{2\pi t}{T}$. Comme nous supposons que v ne s'annule plus pour $\tau = \varphi$, mais devient seulement minimum, il faut, pour que la seconde vibration devienne de sens contraire à la première, qu'il se fasse un *changement continu de phase;* la vibration réfléchie sera donc représentée par $v \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{\psi}{l}\right)$, ψ variant depuis une fraction très petite de la demi-ondulation $\frac{l}{2}$ jusqu'à une quantité très voisine de $\pm\frac{l}{2}$. On en conclut facilement qu'un rayon de lumière polarisé rectilignement dans un azimut quelconque est par réflexion polarisé elliptiquement dans le voisinage de l'angle φ.

Il est aisé de voir que la théorie de Cauchy ne peut représenter ce phénomène; en effet, cette théorie n'étant pas exacte dans le cas le plus simple, elle ne peut l'être quand le phénomène se complique. De plus, les formules de cette théorie ne donnent pas, pour la différence de phase des deux rayons en lesquels on imagine décomposé le rayon polarisé réfléchi, l'expression désignée sous le nom de *formule de Cauchy* dans les Ouvrages de Physique.

En effet, en désignant par i l'argument de réflexion pour un rayon polarisé perpendiculairement au plan d'incidence, c'est-à-dire l'angle que la réflexion ajoute à la phase du rayon, on déduit facilement des formules de Cauchy

$$\operatorname{tang} i = \frac{\eta \sin 2\tau}{-\cos(\tau+\tau')\cos(\tau-\tau')+\eta^2\sin(\tau+\tau')\sin(\tau-\tau')},$$

en faisant

$$\eta = \frac{\varpi+\varpi'}{1+\varpi\varpi'},$$

et désignant par τ, τ' les angles d'incidence et de réfraction. Suivant Cauchy, le rayon composant, polarisé suivant le plan d'incidence, ne subirait pas de changement de phase. Donc, si l'on a un rayon de lumière polarisé rectilignement, la différence de phase des deux rayons composants serait égale à i et fournie par la formule précédente, tandis que les Ouvrages de Physique, après M. Jamin, donnent pour la tangente du changement de phase,

$$\operatorname{tang} i = \frac{\varepsilon \sin\tau[\operatorname{tang}(\tau+\tau')+\operatorname{tang}(\tau-\tau')]}{1-\varepsilon^2\sin^2\tau \operatorname{tang}(\tau+\tau')\operatorname{tang}(\tau-\tau')},$$

ε étant un très petit coefficient. Le Mémoire de Cauchy que je viens d'analyser a paru aussi littéralement dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* de 1839; c'est donc bien cependant le Mémoire auquel M. Jamin dit avoir emprunté cette formule (*Annales de Chimie et de Physique*, 1850, t. XXIX, p. 286).

Dernier Mémoire, p. 288. — Il est intitulé : *Sur les deux espèces d'ondes planes qui peuvent se propager dans un système isotrope.* Le titre du Mémoire indique peu le sujet qui s'y trouve traité. L'auteur se propose de déterminer l'action qui s'exerce entre deux molécules d'éther. Il est conduit à penser que cette action est répulsive et varie comme l'inverse du bicarré de la distance.

Il est bon de remarquer que cette loi n'est pas une conséquence nécessaire de ses formules. En effet, étant arrivé, page 304, à la formule

$$(37) \qquad \Omega^2 = \frac{4\pi\mathfrak{G}}{3}\left[\frac{1}{k^2}r_\infty^2 f(r_\infty) - \frac{1}{10}r_0^4 f(r_0)\right],$$

où Ω désigne la vitesse de propagation des ondes planes, il dit :

« L'équation (37) fournit pour Ω^2 une valeur finie, positive et différente de zéro dans deux cas dignes de remarque, savoir :

» 1° Quand le produit $r^2 f(r)$ se réduit, pour une valeur infiniment grande de la distance r, à une constante finie, mais positive ;

» 2° Quand le produit $r^4 f(r)$ se réduit, pour une valeur infiniment petite de r, à une constante finie, mais négative. »

De ces deux cas, le plus vraisemblable est certainement le second, mais il y a une infinité de fonctions autres que $\frac{-h}{r^4}$ (h étant constant), qui satisfont à ce second cas. Il faut aussi noter que r_0 désigne la plus petite distance entre deux molécules et qu'on peut concevoir que le résultat soit très différent, suivant qu'on substitue dans $r_0^4 f(r_0)$ pour r_0 la valeur zéro ou cette plus courte distance; il n'est pas prouvé, par exemple, qu'on ne puisse pas faire $f(r) = -\frac{h}{r^n}$, n étant > 4.

D'après la loi que Cauchy adopte pour l'action entre deux molécules d'éther, il trouve que la vitesse de propagation de l'onde à vibrations longitudinales serait infiniment grande par rapport à celle de l'onde à vibrations transversales. Enfin, il trouve que dans le vide la vitesse de propagation des rayons violets surpasserait celle des rayons rouges, en sorte que les rayons qui se propagent le plus rapidement dans les corps se propageraient au contraire moins rapidement dans le vide.

Le point de départ étant déjà très peu probable, un tel résultat doit porter à l'abandonner complétement.

Mais il me semble utile de faire quelques remarques au sujet même de cette recherche.

Sachant que deux corps célestes s'attirent, on ne peut guère admettre que cette action s'exerce autrement que par un corps intermédiaire; cet objet intermédiaire ne peut être que l'éther, et sans savoir exactement comment se produit cette transmission de la force, on pourrait démontrer qu'elle doit avoir lieu en raison inverse du carré de la distance. C'est de même par l'intermédiaire de l'éther qu'il est naturel de se représenter les actions mutuelles des molécules d'électricité statique.

Mais s'il s'agit de deux molécules d'éther, je ne puis admettre qu'elles agissent l'une sur l'autre par un milieu intermédiaire : rien ne prouve qu'elles soient de forme sphérique; j'ai à considérer leurs actions non à des distances finies, mais à des distances infiniment petites; j'admets encore le principe de la réaction égale et directement opposée à l'action, mais je ne vois nullement qu'il soit nécessaire que les deux molécules agissent l'une sur l'autre suivant une fonction de la distance, et, par exemple, l'action entre deux molécules d'électricité dynamique, bien qu'elle s'exerce à distance finie, dépend non seulement de leur distance, mais encore de leurs vitesses. Cependant, comme il serait peu philosophique d'affirmer *a priori* que cette action entre deux molécules d'éther n'est pas une simple fonction de leur distance, on peut essayer cette hypothèse, et, en l'appliquant aux cristaux à un et à deux axes optiques, on trouve précisément que cette hypothèse doit être rejetée.

En adoptant la théorie de l'élasticité, qui laisse cette action indéterminée, et supposant l'éther incompressible, on n'obtient plus dans un corps isotrope qu'une onde à vibrations transversales, et l'on n'est plus obligé de supposer, comme Cauchy, qu'il en existe une autre sur laquelle les vibrations sont longitudinales, et dont le mouvement de propagation est lié au mouvement de propagation de l'onde à vibrations transversales.

Le célèbre physicien Regnauld m'a dit avoir demandé plusieurs fois à Cauchy des formules relatives au mouvement de la lumière dans les cristaux transparents, résultant de ses théories et auxquelles on pût appliquer l'expérience, mais que Cauchy ne voulut jamais accéder à sa demande. On peut s'expliquer aisément ce refus, d'après les réflexions qui précèdent.