JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LAGUERRE

Sur la réduction en fractions continues de $e^{F(x)}$, $F(x)$ désignant un polynôme entier

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 6 (1880), p. 99-110.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1880_3_6__99_0>

Sur la réduction en fractions continues de $e^{F(x)}$, F(x) *désignant un polynôme entier;*

Par M. LAGUERRE.

L'étude du développement en fractions continues d'une fonction d'une variable conduit, dans un très grand nombre de cas, à la considération d'équations différentielles linéaires et du second ordre. Elles ont pour solutions les polynômes qui forment les dénominateurs des diverses réduites.

Dans deux Notes précédemment publiées (¹), j'ai déterminé la forme de ces équations; pour résoudre complètement le problème, il reste à déterminer les coefficients des polynômes qui entrent dans leur expression.

Ce problème présente d'assez grandes difficultés et j'ai essayé de le résoudre dans la Note qui suit; j'y traite seulement le développement de la fonction $e^{F(x)}$, où $F(x)$ désigne un polynôme entier d'un degré quelconque, et je fais l'application de la théorie générale au cas où $F(x)$ est du second degré.

(¹) *Sur l'approximation des fonctions d'une variable au moyen des fractions rationnelles* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. V, p. 78).

Sur l'approximation de diverses transcendantes qui renferment comme cas particulier les intégrales hyperelliptiques (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*).

I.

1. Soit $F(x)$ un polynôme entier du degré m; posons

$$e^{F(x)} = \frac{\varphi_n(x)}{f_n(x)} + (x^{2n+1}) \text{ (1)},$$

$\varphi_n(x)$ et $f_n(x)$ désignant des polynômes du degré n.

On en déduit

$$F(x) = \log\varphi_n(x) - \log f_n(x) + (x^{2n+1}),$$

puis, en prenant les dérivées des deux membres,

$$F'(x) = \frac{\varphi'_n(x)}{\varphi_n(x)} - \frac{f'(x)}{f_n(x)} + (x^{2n})$$

et

$$F'(x)\varphi_n(x)f_n(x) - \varphi'_n(x)f_n(x) + \varphi_n(x)f'_n(x) = x^{2n}\Theta_n(x),$$

$\Theta_n(x)$ désignant un polynôme du degré $(m-1)$, qui généralement ne sera pas divisible par x.

Si, dans cette relation, on considère $f_n(x)$ et $\Theta_n(x)$ comme connus, on a, pour déterminer $\varphi_n(x)$, une équation linéaire et du premier ordre. En l'intégrant d'abord, en négligeant le second membre, on aura

$$(1) \qquad \varphi_n(x) = e^{F(x)} f_n(x) z,$$

et z sera, comme on le sait, déterminé par la relation

$$(2) \qquad -z = \int \frac{e^{-F(x)} x^{2n}\Theta_n(x)\,dx}{f_n^2(x)}.$$

En désignant par α, β, ... les diverses racines de l'équation

(1) Dans tout ce qui suit, je désigne généralement par (x^p) une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x et commençant par un terme en x^p, sans avoir égard aux valeurs des coefficients de cette série.

$f_n(x) = 0$, posons l'identité

$$\frac{x^{2n}\Theta_n(x)}{f_n^2(x)} = \mathrm{P} + \sum \frac{p}{(x-\alpha)^2} + \sum \frac{q}{x-\alpha},$$

où P est un polynôme du degré $(m-1)$ en x.

On en déduit

$$-z = \int e^{-F(x)}\,\mathrm{P}\,dx + \sum \int \frac{e^{-F(x)} p\,dx}{(x-\alpha)^2} + \sum \int \frac{e^{-F(x)} q\,dx}{x-\alpha},$$

ou encore, en intégrant par parties le deuxième terme du second membre de la relation précédente,

$$-z = \int e^{-F(x)}\,\mathrm{P}\,dx - \sum \frac{e^{-F(x)} p}{x-\alpha} + \sum \int e^{-F(x)} \frac{q - p\mathrm{F}'(x)}{x-\alpha}\,dx,$$

ou encore

$$\begin{aligned} -z = \int e^{-F(x)}\,\mathrm{P}\,dx &- \sum \frac{p\,e^{-F(x)}}{x-\alpha} - \sum \int e^{-F(x)} \frac{p[\mathrm{F}'(x) - \mathrm{F}'(\alpha)]}{x-\alpha}\,dx \\ &+ \sum \int e^{-F(x)} \frac{q - p\,\mathrm{F}'(\alpha)}{x-\alpha}\,dx. \end{aligned}$$

Or la valeur de z ne peut, comme cela résulte de l'équation (1), renfermer d'autre transcendante que la fonction $e^{F(x)}$; on a donc, pour toutes les racines de l'équation $f_n(x) = 0$,

$$q - p\,\mathrm{F}'(\alpha) = 0.$$

Un calcul facile donne

$$\frac{p}{f'_n(\alpha)} = \frac{q}{\left[\frac{2n}{\alpha} + \frac{\Theta'_n(\alpha)}{\Theta_n(\alpha)}\right] f'_n(\alpha) - f''_n(\alpha)},$$

d'où il suit que le polynôme $f_n(x)$ satisfait à une équation linéaire et du second ordre de la forme

$$y'' - \left[\frac{2n}{x} + \frac{\Theta'_n(x)}{\Theta_n(x)} - \mathrm{F}'(x)\right] y' - \frac{\mathrm{H}_n(x)}{x\,\Theta_n(x)}\,y = 0, \tag{3}$$

où $\mathrm{H}_n(x)$ désigne un polynôme entier en x du degré $2(m-1)$.

2. L'équation (3) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{e^{F(x)}y'}{x^{2n}\Theta_n(x)}\right] - K(x)y = 0.$$

On en conclut qu'une seconde solution de cette équation est donnée par la formule

$$y = f_n(x)\int\frac{e^{-F(x)}x^{2n}\Theta_n(x)\,dx}{f_n^2(x)}$$

ou, en vertu des relations (1) et (2),

$$y = \varphi_n(x)e^{-F(x)}.$$

3. C'est sur cette importante propriété que je m'appuierai pour déterminer les coefficients des polynômes $\Theta_n(x)$ et $H_n(x)$.

A cet effet, je remarque que $f_{n-1}(x)$ satisfait à l'équation

$$(4)\qquad u'' - \left[\frac{2(n-1)}{x} + \frac{\Theta'_{n-1}(x)}{\Theta_n(x)} - F'(x)\right] - u' - \frac{H_{n-1}(x)}{x\,\Theta_{n-1}(x)}u = 0,$$

dont une seconde solution est

$$u = \varphi_{n-1}(x)\,e^{-F(x)}.$$

Formons l'équation linéaire et du quatrième ordre $\Omega = 0$, à laquelle satisfait l'expression

$$z = uy;$$

la solution la plus générale de cette équation est, en désignant par A, B, C et D quatre constantes arbitraires,

$$\begin{aligned} &A f_n(x)f_{n-1}(x) + B f_n(x)\,\varphi_{n-1}(x)e^{-F(x)} \\ &\qquad + C f_{n-1}(x)\,\varphi_n(x)e^{-F(x)} + D\,\varphi_n(x)\,\varphi_{n-1}(x)e^{-2F(x)}. \end{aligned}$$

En particulier, elle est satisfaite par l'expression

$$e^{-F(x)}[f_n(x)\,\varphi_{n-1}(x) - f_{n-1}(x)\,\varphi_n(x)],$$

dont il est facile d'obtenir la valeur en se servant d'une des propriétés les plus élémentaires des fractions continues.

Ayant en effet

$$e^{F(x)} = \frac{\varphi_n(x)}{f_n(x)} + (x^{2n+1})$$

et

$$e^{F(x)} = \frac{\varphi_{n-1}(x)}{f_{n-1}(x)} + (x^{2n-1}),$$

on en déduit

$$\frac{\varphi_{n-1}(x)}{f_{n-1}(x)} - \frac{\varphi_n(x)}{f_n(x)} = (x^{2n-1}),$$

d'où

$$f_n(x)\varphi_{n-1}(x) - f_{n-1}(x)\varphi_n(x) = \mathrm{M}x^{2n-1},$$

M désignant une quantité constante.

4. De là résulte que l'équation $\Omega = 0$ est identiquement satisfaite quand on y fait

$$z = e^{-F(x)}x^{2n-1},$$

ce qui ne peut avoir lieu qu'en établissant certaines relations entre les coefficients des polynômes inconnus $\Theta_n(x)$, $\mathrm{H}_n(x)$, $\Theta_{n-1}(x)$ et $\mathrm{H}_{n-1}(x)$.

Mais, pour obtenir ces relations, il est plus commode de transformer d'abord les équations (3) et (4). A cet effet, je poserai

$$y = x^n\sqrt{\Theta_n(x)}\,e^{-\frac{F(x)}{2}}\,\mathrm{Y}$$

et

$$u = x^n\sqrt{\Theta_{n-1}(x)}\,e^{-\frac{F(x)}{2}}\,\mathrm{U}.$$

En faisant, pour abréger,

$$\mathrm{R} = \left[\frac{n}{x} + \frac{1}{2}\frac{\Theta'_n(x)}{\Theta_n(x)} - \frac{F'(x)}{2}\right]^2 + \frac{n}{x^2} + \frac{F''(x)}{2} - \frac{d}{dx}\frac{1}{2}\frac{\Theta'_n(x)}{\Theta_n(x)} + \frac{\mathrm{H}_n(x)}{x\Theta_n(x)}$$

et

$$\mathrm{S} = \left[\frac{n-1}{x} + \frac{1}{2}\frac{\Theta'_{n-1}(x)}{\Theta_{n-1}(x)} - \frac{F'(x)}{2}\right]^2 + \frac{n-1}{x^2} + \frac{F''(x)}{2} - \frac{d}{dx}\frac{1}{2}\frac{\Theta'_{n-1}(x)}{\Theta_{n-1}(x)} + \frac{\mathrm{H}_{n-1}(x)}{x\Theta_{n-1}(x)},$$

les équations (3) et (4) deviennent respectivement

$$(5) \qquad Y'' = RY,$$

et

$$(6) \qquad U'' = SY.$$

Formons maintenant l'équation linéaire et du quatrième ordre à laquelle satisfait l'expression

$$(7) \qquad Z = YU;$$

ayant identiquement

$$yu = x^{2n-1} e^{-F(x)} \sqrt{\Theta_n(x)\,\Theta_{n-1}(x)}\,.\,Z,$$

et $x^{2n-1} e^{-F(x)}$ étant une valeur de yu, on voit que l'équation différentielle en Z a pour solution

$$\frac{1}{\sqrt{\Theta_n(x)\,\Theta_{n-1}(x)}}.$$

5. Faisant, dans ce qui suit,

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\Theta_n(x)\,\Theta_{n-1}(x)}},$$

on obtiendra facilement une relation linéaire entre Z et ses trois premières dérivées.

De l'équation (7) on déduit en effet

$$(8) \qquad Z' = YU' + UY',$$

puis, en vertu des équations (5) et (6),

$$(9) \qquad Z'' - (R+S)Z = 2Y'U';$$

puis, en dérivant une troisième fois,

$$(10) \qquad Z''' - (R+S)Z' - (R'+S')Z = 2RYU' + 2SUY',$$

et enfin

$$(11)\quad \begin{cases} Z^{\text{IV}} - 2(R+S)Z'' - 2(R'+S')Z' \\ \qquad + [(R-S)^2 - R'' - S'']Z = 2R'YU' + 2SUY'. \end{cases}$$

Si maintenant, entre les équations (8), (10) et (11), nous éliminons les quantités YU' et UY', nous obtiendrons la relation cherchée

$$\begin{vmatrix} Z' & 1 & 1 \\ Z''' - (R+S)Z' - (R'+S')Z & 2R & 2S \\ Z^{\text{IV}} - 2(R+S)Z'' - 2(R'+S')Z' + [(R-S)^2 - R'' - S'']Z & 2R' & 2S' \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore, si l'on pose, pour abréger,

$$R + S = G \quad \text{et} \quad R - S = K,$$

$$(12)\quad Z^{\text{IV}} - \frac{K'}{K}Z''' - 2GZ'' + \left(2G\frac{K'}{K} - 3G'\right)Z' + \left(K^2 + \frac{G'K'}{K} - G''\right)Z = 0.$$

6. La relation précédente peut, comme il est facile de le vérifier, se mettre sous la forme suivante :

$$(13)\quad \frac{d}{dx}\left(GZ^2 - ZZ'' + \frac{1}{2}Z'^2\right) = KZ\int KZ\,dx.$$

Je remarquerai d'abord que, le premier membre de cette identité étant une fonction rationnelle de x, l'intégrale $\int KZ\,dx$ ne doit renfermer aucune partie transcendante, et de là découlent immédiatement un certain nombre de relations entre les coefficients des polynômes $\Theta_n(x)$, $H_n(x)$, $\Theta_{n-1}(x)$ et $H_{n-1}(x)$. En second lieu, cette intégrale ne doit renfermer aucune quantité constante; en effet, le produit de cette constante par KZ donnerait une quantité irrationnelle qui ne peut exister dans l'expression $\frac{d}{dx}\left(GZ^2 - ZZ'' + \frac{1}{2}Z'^2\right)$.

En intégrant la relation (13), il vient, en désignant par β une constante convenablement choisie,

$$2\beta + GZ^2 - ZZ'' + \tfrac{1}{2}Z'^2 = \tfrac{1}{2}\left(\int KZ\,dx\right)^2,$$

et encore

$$(14)\quad \frac{1}{Z}\int KZ\,dx = \sqrt{\frac{4\beta}{Z^2} + 2G - \frac{2Z''}{Z} + \frac{Z'^2}{Z^2}}.$$

Le premier membre de cette identité étant une fonction rationnelle de x, il en résulte que l'expression rationnelle

$$\frac{4\beta}{Z^2} + 2G - \frac{2Z''}{Z} + \frac{Z'^2}{Z^2}$$

est un carré parfait.

II.

7. Comme application des résultats obtenus, je ferai

$$F(x) = x^2 + 2ax,$$

a désignant une constante arbitraire.

On voit que, dans ce cas, $f_n(x)$ satisfait à une équation différentielle de la forme

$$y'' - \left(\frac{2n}{x} + \frac{1}{x-\alpha_n} - 2x - 2a\right)y' - \left(2n + \frac{P_n}{x} + \frac{Q_n}{x-\alpha_n}\right)y = 0;$$

on a

$$\Theta_n(x) = x - \alpha_n,$$

et le problème à résoudre consiste à déterminer les coefficients α_n, P_n et Q_n.

8. On a

$$\begin{aligned} R &= \left(\frac{n}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-\alpha_n} - x - a\right)^2 + 2n + 1 + \frac{n}{x^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x-\alpha_n)^2} + \frac{P_n}{x} + \frac{Q_n}{x-\alpha_n} \\ &= x^2 + 2ax + a^2 + \left(P_n - 2na - \frac{n}{\alpha_n}\right)\frac{1}{x} + \frac{n(n+1)}{x^2} \\ &\quad + \left(Q_n + \frac{n}{\alpha_n} - \alpha_n - a\right)\frac{1}{x-\alpha_n} + \frac{3}{4}\frac{1}{(x-\alpha_n)^2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} S = x^2 + 2ax + a^2 &+ \left[P_{n-1} - 2(n-1)a - \frac{n-1}{\alpha_{n-1}}\right]\frac{1}{x} + \frac{n(n-1)}{x^2} \\ &+ \left(Q_{n-1} + \frac{n-1}{\alpha_{n-1}} - \alpha_{n-1} - a\right)\frac{1}{x-\alpha_{n-1}} + \frac{3}{4}\frac{1}{(x-\alpha_{n-1})^2}. \end{aligned}$$

On en déduit, en posant, pour abréger l'écriture,

$$P_n + P_{n-1} - 2(2n-1)a - \frac{n}{\alpha_n} - \frac{n-1}{\alpha_{n-1}} = A,$$

$$Q_n + \frac{n}{\alpha_n} - \alpha_n - a = B,$$

$$Q_{n-1} + \frac{n-1}{\alpha_{n-1}} - \alpha_{n-1} - a = C$$

et

$$P_n - P_{n-1} - 2a - \frac{n}{\alpha_n} + \frac{n-1}{\alpha_{n-1}} = D,$$

les formules suivantes :

$$\begin{aligned} G = {} & 2x^2 + 4ax + 2a^2 + \frac{A}{x} + \frac{2n^2}{x^2} \\ & + \frac{B}{x-\alpha_n} + \frac{C}{x-\alpha_{n-1}} + \frac{3}{4}\frac{1}{(x-\alpha_n)^2} + \frac{3}{4}\frac{1}{(x-\alpha_{n-1})^2} \end{aligned}$$

et

$$K = \frac{D}{x} + \frac{2n}{x^2} + \frac{B}{x-\alpha_n} - \frac{C}{x-\alpha_{n-1}} + \frac{3}{4}\frac{1}{(x-\alpha_n)^2} - \frac{3}{4}\frac{1}{(x-\alpha_{n-1})^2}.$$

9. On a

$$Z = \frac{1}{\sqrt{(x-\alpha_n)(x-\alpha_{n-1})}}.$$

Posons

$$(x-\alpha_n)(x-\alpha_{n-1}) = \Delta, \quad \frac{\alpha_n + \alpha_{n-1}}{2} = p, \quad \alpha_n\alpha_{n-1} = q \quad \text{et} \quad \alpha_n - \alpha_{n-1} = \omega ;$$

il viendra

$$\begin{aligned} \int KZ\,dx = {} & D\int\frac{dx}{x\sqrt{\Delta}} + 2n\int\frac{dx}{x^2\sqrt{\Delta}} + B\int\frac{dx}{(x-\alpha_n)\sqrt{\Delta}} \\ & - C\int\frac{dx}{(x-\alpha_{n-1})\sqrt{\Delta}} + \frac{3}{4}\int\frac{dx}{(x-\alpha_n)^2\sqrt{\Delta}} - \frac{3}{4}\int\frac{dx}{(x-\alpha_{n-1})^2\sqrt{\Delta}}, \end{aligned}$$

ou, en effectuant les intégrations,

$$\begin{aligned} \int KZ\,dx = {} & \left(D + \frac{n}{\alpha_n} + \frac{n}{\alpha_{n-1}}\right)\int\frac{dx}{x\sqrt{\Delta}} - \frac{2n\sqrt{\Delta}}{qx} \\ & - \frac{2B}{\omega\sqrt{\Delta}}(x-\alpha_{n-1}) - \frac{2C}{\omega\sqrt{\Delta}}(x-\alpha_n) \\ & - \frac{1}{2\omega}\frac{\sqrt{\Delta}}{(x-\alpha_n)^2} - \frac{1}{2\omega}\frac{\sqrt{\Delta}}{(x-\alpha_{n-1})^2} + \frac{1}{\omega^2}\frac{x-\alpha_{n-1}}{\sqrt{\Delta}} - \frac{1}{\omega^2}\frac{x-\alpha_n}{\sqrt{\Delta}}. \end{aligned}$$

Comme cette intégrale ne doit pas contenir de partie transcendante, on a

$$(15)\qquad D = -n\left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\alpha_{n-1}}\right),$$

d'où

$$(16)\qquad P_n = P_{n-1} + 2a - \frac{2n-1}{\alpha_{n-1}}$$

et

$$(17)\qquad A = 2P_n - 4na - n\left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_{n-1}}\right).$$

10. On a

$$\frac{-1}{Z}\int KZ\,dx = 2Mx - 2N + \frac{2n}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-\alpha_n} - \frac{1}{2}\frac{1}{x-\alpha_{n-1}},$$

relation où j'ai posé, pour abréger,

$$M = \frac{n}{\alpha_n\alpha_{n-1}} + \frac{B+C}{\omega},\quad N = n\left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\alpha_{n-1}}\right) + \frac{B\alpha_{n-1} + C\alpha_n}{\omega},$$

puis

$$\begin{aligned}
&\frac{4\beta}{Z^2} + 2G - \frac{2Z''}{Z} + \frac{Z'^2}{Z^2}\\
&\quad = 4\beta\Delta + 2G + \frac{\Delta''}{\Delta} - \frac{5}{4}\frac{\Delta'^2}{\Delta^2}\\
&\quad = 4\beta(x^2 - 2px + q) + 4x^2 + 8ax + 4a^2\\
&\qquad + \frac{2A}{x} + \frac{4n^2}{x^2} + \frac{2B}{x-\alpha_n} + \frac{2C}{x-\alpha_{n-1}} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{x-\alpha_n}\right)^2\\
&\qquad + \frac{3}{2}\frac{1}{(x-\alpha_{n-1})^2} - \frac{5}{4}\frac{1}{(x-\alpha_n)^2} - \frac{5}{4}\frac{1}{(x-\alpha_{n-1})^2} - \frac{1}{2\omega(x-\alpha_n)} + \frac{1}{2\omega(x-\alpha_{n-1})}\\
&\quad = 4(1+\beta)x^2 + 8(a-p\beta)x + 4(a^2+q\beta)\\
&\qquad + \frac{2A}{x} + \frac{4n^2}{x^2} + \left(2B - \frac{1}{2\omega}\right)\frac{1}{x-\alpha_n}\\
&\qquad + \left(2C + \frac{1}{2\omega}\right)\frac{1}{x-\alpha_{n-1}} + \frac{1}{4(x-\alpha_n)^2} + \frac{1}{4(x-\alpha_{n-1})^2}.
\end{aligned}$$

L'identité (14) donne alors les relations suivantes :

$$M^2 = 1 + \beta, \tag{18}$$

$$MN = p\beta - a, \tag{19}$$

$$N^2 + 2nM = a^2 + q\beta, \tag{20}$$

$$A + 4nN + n\left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_{n-1}}\right) = 0, \tag{21}$$

puis

$$B = M\alpha_n - N + \frac{n}{\alpha_n}$$

et

$$C = -M\alpha_{n-1} + N - \frac{n}{\alpha_{n-1}}.$$

Ces deux dernières sont, comme il est facile de le voir, identiquement satisfaites.

Des équations (21) et (17) on déduit

$$N = n\left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\alpha_{n-1}}\right) + \frac{B\alpha_{n-1} + C\alpha_n}{\omega} = a - \frac{P_n}{2n}. \tag{22}$$

On a ensuite

$$B^2 = \left(M\alpha_n - N + \frac{n}{\alpha_n}\right)^2;$$

d'où, en développant le carré et en remplaçant M^2, MN, N^2 et N par leurs valeurs tirées des relations (18), (19), (20) et (22),

$$B^2 + 2\frac{2nB\alpha_{n-1}}{\alpha_n(\alpha_n - \alpha_{n-1})} + \frac{2nC}{\alpha_n - \alpha_{n-1}} - (\alpha_n + a)^2 + n^2\left(\frac{1}{\alpha_n^2} + \frac{2}{\alpha_n\alpha_{n-1}}\right) = 0. \tag{23}$$

On a de même

$$C^2 = \left(-M\alpha_{n-1} + N - \frac{n}{\alpha_{n-1}}\right)^2,$$

d'où, en développant et en remplaçant M^2, MN, N^2 et N par leurs valeurs tirées des relations (18), (19), (20) et (22),

$$C^2 + \frac{2nC\alpha_n}{\alpha_{n-1}(\alpha_n - \alpha_{n-1})} + \frac{2nB}{\alpha_n - \alpha_{n-1}} - (\alpha_{n-1} + a)^2 + n^2\left(\frac{1}{\alpha_{n-1}^2} + \frac{2}{\alpha_n\alpha_{n-1}}\right) = 0. \tag{24}$$

10. La solution complète du problème est maintenant ramenée à une question d'Algèbre élémentaire.

Si en effet, entre les équations (23) et (24), on élimine successivement C et B, on obtiendra deux équations du quatrième degré auxquelles satisfont respectivement ces deux quantités, et qui sont de la forme

$$\Phi(B, \alpha_n, \alpha_{n-1}, n) = 0 \tag{25}$$

et

$$\Phi_1(C, \alpha_n, \alpha_{n-1}, n) = 0. \tag{26}$$

Si maintenant on observe que B se déduit de C par le changement de n en $(n+1)$, de l'équation (26) on déduira une nouvelle équation

$$\Phi_1(B, \alpha_{n+1}, \alpha_n, n+1) = 0. \tag{27}$$

Ces deux équations (25) et (27), auxquelles satisfait B, sont d'ailleurs distinctes, puisqu'elles ne renferment pas les mêmes lettres; en écrivant la condition nécessaire et suffisante pour qu'elles aient une racine commune, on obtiendra la relation qui lie ensemble trois quantités consécutives

$$\alpha_{n+1}, \ \alpha_n \text{ et } \alpha_{n-1},$$

et cette relation permettra d'obtenir ces diverses quantités par voie récurrente.

La valeur de la racine commune donnera B, et par conséquent Q_n; enfin, la valeur de C se déduisant de celle de B par le changement de n en $n-1$, la formule (22) donnera la valeur de P_n.