

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BOUSSINESQ

Sur la manière de présenter la théorie des potentiels d'attraction, dans l'hypothèse, généralement admise, de la discontinuité de la matière

Journal de mathématiques pures et appliquées 3^e série, tome 6 (1880), p. 89-98.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1880_3_6__89_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Sur la manière de présenter la théorie des potentiels d'attraction, dans l'hypothèse, généralement admise, de la discontinuité de la matière;

PAR M. J. BOUSSINESQ.

1. Les géomètres qui se sont occupés de la théorie des potentiels d'attraction newtonienne, et qui les ont étudiés pour les points situés au dedans des corps mêmes auxquels est due l'attraction dont il s'agit, ont supposé que la matière de ces corps était continue, c'est-à-dire uniformément disséminée à l'intérieur de toute partie, à dimensions infiniment petites, de l'espace qu'ils paraissent remplir. Grâce à cette hypothèse, la densité réelle, rapport de la masse au volume pour un volume infiniment peu étendu en tout sens, a sensiblement, en chaque point des corps, la même valeur que la densité apparente ρ , rapport de la masse d'une particule visible de matière à l'espace total qu'elle semble occuper. On sait qu'alors, pour tout point $M(x, y, z)$ intérieur au corps, le potentiel $V = \int \frac{dm}{r}$, somme des quotients obtenus en divisant la masse dm que contient chaque élément de volume par sa distance r au point M , est sensiblement le même, soit qu'on y comprenne la matière située à l'intérieur d'une sphère d'un rayon imperceptible R décrite autour du point M comme centre, soit qu'on ne l'y comprenne pas. En effet, on reconnaît immédiatement, par une décomposition en couches sphé-

riques concentriques, que la matière considérée donne en tout un potentiel comparable au quotient de sa masse par le rayon R de la sphère qu'elle remplit, c'est-à-dire comparable au produit ρR^2 ; ce potentiel est donc insignifiant, à côté de celui qui est relatif à l'ensemble de toutes les autres parties et qui se trouve généralement de l'ordre du produit de ρ par le carré des dimensions du corps. Alors aussi, le potentiel total V et ses dérivées partielles successives en x , y , z varient graduellement d'une région à l'autre du corps, et l'on démontre notamment que la dérivée première de V , prise à partir du point M le long d'une droite infiniment petite, est proportionnelle à la composante, suivant le même sens, de l'attraction newtonienne qui y serait exercée, sur l'unité de masse, soit par toute la matière du corps, soit seulement, à très peu près, par la portion de cette matière qui est extérieure à la sphère imperceptible de rayon R décrite autour du point M comme centre. Enfin, on sait que la somme des trois dérivées partielles secondes $\frac{d^2V}{dx^2}$, $\frac{d^2V}{dy^2}$, $\frac{d^2V}{dz^2}$ égale en chaque point $-4\pi\rho$.

Mais ces démonstrations et même leurs résultats semblent perdre toute valeur pratique, quand, de l'avis unanime des savants, on rejette l'hypothèse de la continuité de la matière, et surtout quand on regarde, avec la plupart d'entre eux, les dimensions des dernières particules ou atomes comme de très petites fractions de la distance comprise entre chacune d'elles et ses voisines. Alors, si l'on continue à définir le potentiel comme on le fait dans les Cours, cette fonction $V = \int \frac{dm}{r}$, mais surtout ses dérivées partielles de plus en plus élevées, peuvent même cesser d'exister en tant que fonctions utilisables, c'est-à-dire en tant que fonctions variant graduellement à l'intérieur de tout volume peu étendu et jouissant ainsi de la continuité attribuée, dans les diverses branches de la Physique mathématique, aux fonctions qui expriment une manière d'être déterminée, perceptible pour chaque petite région de l'espace. Par exemple, d'après le théorème de Poisson que je viens de rappeler, la somme des trois dérivées $\frac{d^2V}{dx^2}$, $\frac{d^2V}{dy^2}$, $\frac{d^2V}{dz^2}$ sera nulle dans le vide compris entre deux atomes, et elle égalera en valeur absolue, à l'intérieur de chaque atome, le produit du facteur 4π par la densité énorme de l'atome au point considéré. Les dérivées secondes du

potentiel ne varieront donc pas graduellement. On pourra en dire autant, si le rapport du vide au plein est très considérable, des dérivées premières, composantes de l'attraction, et même du potentiel, puisque, dans le cas extrême où toute la masse serait concentrée en un nombre fini d'atomes sans étendue, le potentiel $\frac{m}{r}$, relatif à un seul atome, deviendrait infini pour $r = 0$. Quand on suppose la densité de chaque atome suffisamment grande par rapport à la densité apparente ρ du corps, le potentiel $V = \int \frac{dm}{r}$, tout en restant fini, devient maximum à l'intérieur de chaque atome du corps, minimum dans chaque intervalle intermoléculaire, et présente ainsi des milliards de variations de sens inverses dans des étendues même imperceptibles.

2. Il est donc nécessaire de faire subir à la définition du potentiel un changement, qui permette à cette notion si importante de subsister, de conserver son véritable sens concret et son utilité pratique, dans toutes les opinions que l'on peut se former touchant la composition des dernières particules de la matière. C'est ce que je me propose de faire ici, en réponse à un désir exprimé par plusieurs géomètres (notamment par M. Gilbert et par M. de Saint-Venant).

Le changement à introduire ressort de l'usage même auquel on emploie le potentiel. On s'est aperçu depuis longtemps que les actions exercées sur une particule de matière sont de deux sortes : les unes, dues à d'autres particules contiguës, se produisent à des distances totalement imperceptibles et ont pour résultantes les forces appelées *pressions*, *tensions*, etc. ; les autres, régies par la loi de Newton, sont dues aux particules de matière situées à des distances visibles de celle que l'on considère, et leur résultante n'est autre que *la pesanteur* ou plutôt le poids de la particule.

Or, on ne demande au potentiel que de faire connaître la pesanteur existant en chaque point, car dans les équations d'équilibre ou de mouvement qui contiennent ses dérivées, dans celles de l'Hydrostatique par exemple, on ne manque pas de compter en outre les pressions. Donc le potentiel, tel qu'il est conçu naturellement, ne doit pas contenir de terme $\frac{dm}{r}$ ayant à son dénominateur une distance r impercep-

tible. On peut le définir, pour chaque point $M(x, y, z)$ de l'espace, la somme qu'on obtient en divisant diverses masses élémentaires considérées, m ou dm , par leurs distances r au point quelconque M , et en ajoutant, non pas tous ces quotients, mais ceux-là seulement qui se rapportent à des masses extérieures à la sphère décrite, du point M comme centre, avec un rayon imperceptible et constant, R , incomparablement plus grand que la distance de deux molécules voisines. Alors une somme $\sum \frac{m}{r}$ peut, sans difficulté, être remplacée par une intégrale

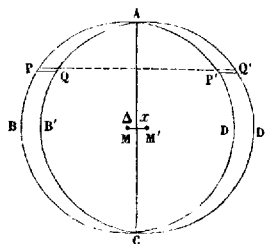
$\int \frac{dm}{r}$, car tous les r y sont assez grands pour ne varier que de fractions insignifiantes de leurs valeurs lorsqu'on suppose chaque atome pulvérisé et disséminé dans l'intervalle intermoléculaire environnant. De plus, on évite les considérations délicates de limites qu'introduit l'annulation de certains dénominateurs dans la théorie ordinaire, où l'on pose finalement $R = 0$.

D'ailleurs, la valeur absolue de R importe peu ; dès que ce rayon est supposé tout à la fois incomparablement moindre que les dimensions des corps étudiés et beaucoup plus grand que la distance de deux molécules contiguës, les variations du potentiel en un même point, dues aux variations de R , sont de l'ordre de celles de ρR^2 et totalement négligeables. Il faudrait que R , en diminuant, devînt comparable à l'intervalle qui sépare deux atomes ou tout au moins deux molécules, pour que V pût commencer à augmenter rapidement dans le voisinage de l'une d'elles et à devenir notablement différent en deux points très proches l'un de l'autre, de même qu'une série *semi-convergente*, mais dont la divergence ne s'accroît qu'à partir de termes très éloignés, s'approche longtemps et beaucoup d'une limite, pour s'en écarter ensuite indéfiniment. Dans la question du potentiel, l'hypothèse de la continuité de la matière a pour effet de rendre la somme tout à fait convergente et de permettre ainsi, grâce à l'effacement des attractions locales produit par la pulvérisation fictive de la matière, d'étendre le potentiel à toute la masse sans vicier les résultats particuliers que l'on cherche, c'est-à-dire sans altérer la valeur de la pesanteur en chaque point. Mais il y a dans cette manière de procéder une fiction qu'il importe de bien voir : elle consiste à raisonner comme si l'action de

deux points matériels était régie par la loi de Newton jusqu'aux plus petites distances, hypothèse qui, jointe à celle de la continuité, aurait pour résultat de réduire à rien ces forces qu'on appelle *pressions*, *tensions*, *tractions*, etc., et qui sont d'ordinaire les plus considérables (1).

3. La définition que je donne du potentiel conduit très simplement et, ce me semble, par la voie la plus naturelle possible, aux propriétés analytiques dont jouit cette fonction.

Proposons-nous d'évaluer d'abord ses dérivées premières, par exemple la dérivée $\frac{dV}{dx}$. A cet effet, j'observerai que le potentiel V vaudra, pour chaque point $M(x, y, z)$, la somme $\int \frac{\rho d\omega}{r}$, étendue à tous les éléments de volume $d\omega$ qui sont extérieurs à une sphère $ABCD$, décrite du point mobile M comme centre avec le rayon constant R . Si M se



déplace d'une petite fraction de R et vient ainsi au point M' , qui a les coordonnées $x + \Delta x, y, z$, la sphère se sera transportée en $AB'CD'$, et

(1) Dans la théorie de l'électricité statique, il faut supposer que la pression est insensible à l'intérieur des deux fluides qu'on y conçoit (comme elle le serait dans un gaz sans chaleur), ou, si l'on veut se dispenser de faire explicitement et directement cette hypothèse, il faut admettre à la fois la continuité de ces prétendus fluides impondérables et l'exactitude, jusqu'aux plus petites distances, de la loi newtonienne pour les actions réciproques de leurs diverses parties : suppositions sans grands inconvénients dans l'état actuel de cette branche de la Physique, où l'on en est encore à chercher le principe de la véritable explication des phénomènes.

le potentiel, devenu $V + \Delta V$, s'écrira $\int \frac{\rho d\omega}{r'}$, r' désignant la distance à M' des diverses masses, $\rho d\omega$, extérieures à cette nouvelle sphère. L'excédant ΔV se composera évidemment: 1° de la somme $\int \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right) \rho d\omega$ ou $\int \left(\Delta \frac{1}{r}\right) \rho d\omega$, étendue à tous les éléments de volume $d\omega$ extérieurs aux deux sphères; 2° de l'excès de la somme $\int \frac{\rho d\omega}{r'}$, prise pour tout l'espace $ABCB'$ intérieur à la première sphère et extérieur à la seconde, sur la somme pareille $\int \frac{\rho d\omega}{r}$, étendue à l'espace analogue $ADCD'$.

Comme on a sensiblement, en appelant x_1, y_1, z_1 les coordonnées d'un élément de volume $d\omega$,

$$\Delta \frac{1}{r} = \frac{d \frac{1}{r}}{dx} \Delta x = \frac{x_1 - x}{r^3} \Delta x,$$

la première partie vaut, sauf une erreur de l'ordre de Δx^2 négligeable à la limite,

$$(1) \quad (\Delta x) \int \frac{x_1 - x}{r^3} \rho d\omega,$$

et l'on peut d'ailleurs y étendre le signe \int à tout l'espace extérieur à la sphère $ABCD$, car ce qu'on y ajoute de la sorte, relatif à la portion $ADCD'$, est nul à la limite en comparaison du reste.

Occupons-nous actuellement de la seconde partie de ΔV . Divisons l'espace $ABCB'$ en éléments prismatiques PQ , ayant pour hauteur $PQ = \Delta x$ et pour section normale (infinitement petite en tout sens) la projection de l'élément sur le plan AC parallèle aux γz . Appelons x', y', z' les coordonnées du point P , et prenons, par suite, $dy' dz'$ pour section normale du prisme PQ . Comme le rayon R est imperceptible, c'est-à-dire fort petit par rapport aux distances le long desquelles la densité ρ varie notablement, celle-ci a sensiblement au point P la même valeur ρ qu'au centre M de la sphère, et la masse de l'élément PQ

vaut à fort peu près $\rho(\Delta x)dy'dz'$. D'ailleurs, M'Q égalant R, le potentiel relatif à l'élément PQ vaudra, en M', $\frac{\rho\Delta x}{R}dy'dz'$. Par suite, le potentiel relatif à toute la masse comprise dans ABCB' sera $\frac{\rho\Delta x}{R}\int dy'dz'$ ou sensiblement le produit de $\frac{\rho\Delta x}{R}$ par l'aire πR^2 du cercle AC d'intersection des deux sphères. Retranchons-en la somme $\int \frac{\rho d\omega}{r}$ prise pour les éléments $d\omega$ de l'espace ADCD', somme qui vaudra également $\pi R\rho\Delta x$, et nous verrons que la deuxième partie de ΔV est d'un ordre de petitesse supérieur à Δx ou, par suite, est négligeable.

Égalons donc ΔV à (1), et faisons tendre Δx vers zéro. Il viendra, comme valeur de la dérivée du potentiel suivant le sens des x ,

$$(2) \quad \frac{dV}{dx} = \int \frac{x_1 - x}{r^3} \rho d\omega;$$

la somme \int , dans le second membre, s'étend à tous les éléments de volume $d\omega$ extérieurs à la sphère décrite du point M comme centre avec le petit rayon constant R. On voit que la dérivée du potentiel le long d'une droite infiniment petite représente la composante, suivant la direction de cette droite, de la *pesanteur* qui existe en chacun de ses points, c'est-à-dire la composante de l'attraction totale qui y serait exercée sur l'unité de masse d'un atome par toute la matière *située à des distances perceptibles de cet atome*.

4. Les dérivées secondes s'obtiennent en procédant exactement de la même manière. Cherchons, par exemple, de combien croît l'expression (2) de $\frac{dV}{dx}$ quand le point M se déplace et vient en M'. La variation éprouvée $\Delta \frac{dV}{dx}$ se compose encore de deux parties.

La première n'est autre que la somme $\int \left(\Delta \frac{x_1 - x}{r^3} \right) \rho d\omega$, prise pour tous les éléments de volume $d\omega$ extérieurs aux deux sphères. Comme

on a sensiblement

$$\Delta \frac{x_1 - x}{r^3} = \frac{d \frac{x_1 - x}{r^3}}{dx} \Delta x = \left[3 \frac{(x_1 - x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right] \Delta x,$$

cette première partie peut s'écrire

$$(3) \quad (\Delta x) \int \left[3 \frac{(x_1 - x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right] \rho d\omega,$$

et l'on n'altère sa valeur que dans un rapport nul à la limite, en y étendant l'intégration \int à tous les éléments de volume $d\omega$ extérieurs à la sphère ABCD, c'est-à-dire en y comprenant même l'espace ADCD'.

Quant à la seconde partie, elle est l'excédant de l'expression $\int \frac{x_1 - x - \Delta x}{r^3} \rho d\omega$ ou sensiblement $\int \frac{x_1 - x}{r^3} \rho d\omega$, prise pour tous les éléments $d\omega$ de l'espace ABCB', sur l'expression analogue relative aux éléments de l'espace pareil ADCD'. Considérant, en particulier, l'élément PQ du premier de ces espaces, substituons dans $\frac{x_1 - x}{r^3} \rho d\omega$ sa coordonnée x' à x_1 , mettons de même pour r sa distance à M, $MP = R$, pour $d\omega$ la valeur $dy' dz' \Delta x$, et enfin, pour la densité de la matière en P, la densité très peu différente, ρ , relative au point M. Le terme de l'expression proposée qui se rapporte à PQ sera ainsi

$$\frac{\rho \Delta x}{R^3} (x' - x) dy' dz' = - \frac{\rho \Delta x}{R^3} \sqrt{R^2 - (y' - \gamma)^2 - (z' - z)^2} dy' dz'.$$

Considérons actuellement, dans le second espace ADCD', l'élément de volume P'Q', symétrique de PQ par rapport au plan AC. Le terme analogue qui lui est relatif ne différera du précédent qu'en ce que $x' - x$ y aura signe contraire ou vaudra $+\sqrt{R^2 - (y' - \gamma)^2 - (z' - z)^2}$. La différence des deux termes égalera donc

$$(4) \quad - \frac{2\rho \Delta x}{R^3} \sqrt{R^2 - (y' - \gamma)^2 - (z' - z)^2} dy' dz'$$

et la seconde partie cherchée de $\Delta \frac{dV}{dx}$ sera l'intégrale des valeurs que reçoit cette expression quand on y fait varier y' , z' dans tout l'intérieur du cercle ΔC , dont l'équation est $(y' - y)^2 + (z' - z)^2 = R^2$. Si nous prenons pour nouvelles variables les coordonnées polaires v , θ que définissent les relations

$$v = \sqrt{(y' - y)^2 + (z' - z)^2}, \quad \theta = \arctang \frac{z' - z}{y' - y},$$

le radical de (4) deviendra $\sqrt{R^2 - v^2}$ et l'élément d'aire $dy' dz'$ sera remplacé par le rectangle mixtiligne $v d\theta dv$. Comme, d'ailleurs, θ variera de zéro à 2π et v de zéro à R , l'expression (4) intégrée vaudra

$$(5) \quad - \frac{4\pi\rho\Delta x}{R^3} \int_0^R \sqrt{R^2 - v^2} v dv = \frac{4\pi\rho\Delta x}{3R^3} [(R^2 - v^2)^{\frac{3}{2}}]_0^R = - \frac{4\pi\rho}{3} \Delta x.$$

En l'ajoutant à (3) et divisant le tout par Δx , il vient

$$(6) \quad \frac{d^2V}{dx^2} = - \frac{4\pi\rho}{3} + \int \left[3 \frac{(x_1 - x)^2}{r^3} - \frac{1}{r^3} \right] \rho d\omega.$$

On trouvera des valeurs analogues pour $\frac{d^2V}{dy^2}$, $\frac{d^2V}{dz^2}$, et leur addition à (6) donnera finalement la formule de Poisson

$$(7) \quad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = - 4\pi\rho.$$

5. Il est à peine nécessaire, en terminant, de faire observer que la petite sphère *mobile* considérée ici, et qui, décrite autour du point (x, y, z) comme centre, entoure une matière dont on fait abstraction dans le calcul du potentiel, n'a rien de commun avec la petite sphère *fixe*, comprenant actuellement le point mobile (x, y, z) , que les auteurs classiques emploient pour démontrer le théorème de Poisson dans l'hypothèse d'une matière continue. Cette dernière sphère, à cause de la supposition simplificatrice permise qui s'y joint d'une den-

sité constante à son intérieur, constitue un artifice ingénieux de démonstration, mais rien de plus. Au contraire, l'introduction de la sphère mobile, outre qu'elle conduit au théorème de Poisson sans exiger aucun calcul de potentiel total ni de composantes totales d'attraction pour une sphère homogène, est surtout un moyen de transformer la notion même du potentiel, ou mieux, comme on a vu, de la ramener à son vrai sens, et de l'utiliser pour une matière quelconque, continue ou discontinue.

Rien n'empêche, en effet, de l'appliquer même au cas extrême, le seul qu'eussent traité jusqu'ici les géomètres, où, la matière étant supposée continue et d'une densité partout finie, on pose finalement $R = 0$, en étendant le potentiel V aux éléments de masse intérieurs à la sphère mobile de rayon R qu'on avait d'abord imaginée. Car, non seulement l'intégrale $\int \frac{\rho d\omega}{r}$ (prise pour tout l'intérieur de cette sphère), qu'on ajoute ainsi au potentiel, est, comme on sait, de l'ordre de ρR^2 , c'est-à-dire aussi petite que l'on veut si R avait été choisi assez faible, mais, de plus, les dérivées successives de cette intégrale sont de nouvelles intégrales de la même forme qu'elle et, par suite, également négligeables. On le reconnaît en observant que chaque élément $d\omega$ de la capacité de la sphère, c'est-à-dire, du volume constant qu'elle emporte, vient être occupé, après un petit déplacement, dx par exemple, du centre (x, y, z) , par une matière dont la densité n'est plus ρ , mais $\rho + \frac{d\rho}{dx_i} dx$, en sorte que, si l'on pose $\frac{d\rho}{dx_i} = \rho_i$, l'élément correspondant $\frac{\rho d\omega}{r}$ de la petite intégrale aura crû de $\frac{\rho_i d\omega}{r} dx$. Il en résulte que l'intégrale elle-même aura grandi de $dx \int \frac{\rho_i d\omega}{r}$; elle a donc sa dérivée en x égale à $\int \frac{\rho_i d\omega}{r}$, c'est-à-dire de même forme que $\int \frac{\rho d\omega}{r}$, et cette dérivée est bien très petite quand ρ varie graduellement. Ainsi, dans l'hypothèse d'une matière continue, le potentiel et ses dérivées partielles successives tendent vers des limites déterminées, quand R tend vers zéro, et toutes les propriétés dont jouissent ces fonctions pour R très petit se conservent à l'instant où R s'annule.