JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DÉSIRÉ ANDRÉ

Intégration, sous forme finie, de trois espèces d'équations différentielles linéaires, à coefficients variables

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 6 (1880), p. 27-48.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1880_3_6__27_0>

Intégration, sous forme finie, de trois espèces d'équations différentielles linéaires, à coefficients variables;

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

La seule méthode vraiment pratique que l'on possède actuellement pour l'intégration, sous forme finie, des équations différentielles ordinaires, est celle qu'on emploie pour intégrer les équations différentielles linéaires *à coefficients constants*. L'objet de ce Mémoire est d'en présenter une autre, aussi pratique pour le moins que la précédente, mais infiniment plus générale, puisqu'elle permet d'intégrer, sous forme finie, trois espèces d'équations différentielles linéaires à *coefficients variables*, et que c'est précisément dans l'une de ces trois espèces que rentrent, pour y constituer une simple variété, toutes les équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Les équations différentielles de la première de ces trois espèces s'intègrent, comme on le verra, sous forme finie, à l'aide des seules fonctions algébriques rationnelles; celles de la deuxième, par des fonctions algébriques rationnelles et des exponentielles de la forme a^x; celles de la troisième, par des fonctions algébriques rationnelles et des logarithmes de la forme $L(1 - ax)$.

Pour chacune de ces trois espèces, nous donnons l'expression générale de l'intégrale, de façon que celle-ci peut s'écrire sans ombre de tâtonnement. Dans la seconde et la troisième espèce, à la vérité, cette expression suppose la résolution préalable d'une certaine équation algébrique, que nous appelons *l'équation caractéristique* de l'équation différentielle à intégrer : la nécessité d'un pareil calcul se présente déjà dans le cas des équations différentielles linéaires à coefficients constants, lesquelles rentrent d'ailleurs dans la seconde de nos trois espèces. Mais, et c'est là, ce nous semble, un fait très remarquable, la formule que nous donnons pour intégrer les équations différentielles de notre première espèce n'exige nullement la résolution ni de cette équation caractéristique, ni d'aucune équation algébrique d'un degré supérieur au premier.

C'est en étudiant la sommation des séries entières que nous sommes parvenu à cette méthode d'intégration pour ces trois espèces d'équations différentielles. Cette méthode nous paraît nouvelle; elle donne l'intégrale sous forme finie; elle s'applique à un très grand nombre d'équations différentielles; elle offre surtout cet avantage d'être tout à fait pratique : nous l'avons résumée antérieurement dans une courte Note que notre illustre maître, M. Hermite, a bien voulu présenter (1) à l'Académie des Sciences.

I. — *Préliminaires.*

1. Soit une équation différentielle linéaire, d'ordre quelconque ω, sans second membre, à coefficients constants ou variables, et relative à une fonction Y de la seule variable indépendante x. Si nous désignons par Y_0, $Y_0^{(1)}$, $Y_0^{(2)}$, ... les valeurs pour $x = 0$ de la fonction Y et de ses dérivées successives, puis que nous prenions par rapport à x les dérivées d'un ordre quelconque, mais suffisamment élevé, des deux membres de cette équation différentielle, en remplaçant x par zéro dans le résultat du calcul, forcément nous arriverons à une équation ne contenant plus Y ni x, dont le second membre sera nul et dont le premier sera la somme des quantités $Y_0^{(n)}$, $Y_0^{(n-1)}$, $Y_0^{(n-2)}$, ..., respectivement multipliées par des fonctions de n. Cette dernière équation subsistera pour toutes les valeurs de n supérieures à un entier déterminé ν, et nous la nommerons l'*équation dérivée* de l'équation différentielle considérée.

(1) Dans la séance du 3 février 1879.

A toute équation différentielle linéaire correspond une pareille équation dérivée. Celle-ci peut affecter évidemment une multitude de formes diverses. Nous disons qu'elle est *régulière* lorsqu'elle peut se mettre sous la forme

$$K_0 F(n) Y_0^{(n)} + K_1 F(n-1) Y_0^{(n-1)} + \ldots + K_k F(n-k) Y_0^{(n-k)} = 0,$$

dans laquelle $F(n)$ représente une fonction quelconque de n et où les coefficients K ainsi que l'entier k sont indépendants de n, c'est-à-dire constants.

Dans le présent Mémoire, nous n'étudions, pour les intégrer, que les seules équations différentielles linéaires dont les équations dérivées sont des équations dérivées *régulières*.

2. Évidemment ces équations différentielles linéaires, assujetties à avoir des équations dérivées régulières, ne sont point des équations quelconques; mais elles constituent, dans la grande classe des équations différentielles linéaires sans second membre et à coefficients constants ou variables, un genre fort intéressant et d'une très vaste étendue.

Ce genre contient vraisemblablement une infinité d'espèces, caractérisées chacune par une forme particulière de la fonction $F(n)$. Nous n'essayerons point de les classer : une telle opération est peut-être impossible. Nous montrerons seulement comment on est amené naturellement à les distinguer.

Jusqu'ici nous en avons distingué trois, renfermant chacune une infinité d'équations différentielles linéaires que nous sommes parvenu à intégrer toutes. Ces trois espèces d'équations différentielles seront pour nous, par une raison purement chronologique, les trois premières espèces du genre. Elles sont respectivement caractérisées par les trois égalités

$$F(n) = \frac{1}{n!\,f(n)},$$

$$F(n) = \frac{(n+s)!}{n!\,f(n)},$$

$$F(n) = \frac{(n+s)(n+s+1)\ldots(n+s+t-1)}{n!\,f(n)},$$

dans lesquelles nous désignons par t un entier supérieur à zéro, par s un entier positif, nul ou négatif, et par $f(n)$ un polynôme quelconque, entier par rapport à n et à des exponentielles de la forme a^n.

Si, dans la seconde de ces trois égalités, nous supposons s égal à zéro et $f(n)$ égal à l'unité, nous trouvons que $F(n)$ est aussi égal à l'unité. Cette valeur de la fonction $F(n)$ correspond aux équations différentielles linéaires à coefficients constants, et l'on voit par là que ces dernières équations différentielles rentrent, comme variété particulière, dans la seconde de nos trois espèces.

3. Comme exemples d'équations différentielles linéaires numériques appartenant respectivement à ces trois espèces, nous citerons :

Dans la première espèce,

$$(x^4 + x^3 + x^2)\frac{d^2Y}{dx^2} + (4x^3 + x^2 - 2x)\frac{dY}{dx} + (2x^2 - x + 2)Y = 0,$$

dont l'équation dérivée est l'équation régulière

$$\frac{1}{n!n}Y_0^{(n)} + \frac{1}{(n-1)!(n-1)}Y_0^{(n-1)} + \frac{1}{(n-2)!(n-2)}Y_0^{(n-2)} = 0,$$

laquelle nous donne

$$F(n) = \frac{1}{n!n}$$

et subsiste pour toutes les valeurs de n supérieures à 2;

Dans la deuxième espèce,

$$x^2\frac{d^2Y}{dx^2} - 2x(x+1)\frac{dY}{dx} + 2(x+1)Y = 0,$$

dont l'équation dérivée est l'équation régulière

$$\frac{(n-1)!}{n!}Y_0^{(n)} - 2\frac{(n-2)!}{(n-1)!}Y_0^{(n-1)} = 0,$$

laquelle nous donne

$$F(n) = \frac{(n-1)!}{n!}$$

et subsiste pour toutes les valeurs de n supérieures à 2;

Enfin, dans la troisième espèce,

$$(x^3 - 7x^2 + 12x)\frac{d^3Y}{dx^3} + (5x^2 - 28x + 36)\frac{d^2Y}{dx^2} + (4x - 14)\frac{dY}{dx} = 0,$$

dont l'équation dérivée est l'équation régulière

$$12\frac{n(n+1)}{n!}Y_0^{(n)} - 7\frac{(n-1)n}{(n-1)!}Y_0^{(n-1)} + \frac{(n-2)(n-1)}{(n-2)!}Y_0^{(n-2)} = 0,$$

laquelle nous donne

$$F(n) = \frac{n(n+1)}{n!}$$

et subsiste encore pour toutes les valeurs de n supérieures à 2.

C'est à ces trois équations différentielles que nous appliquerons la méthode d'intégration que nous allons exposer.

II. — *Intégration, par les séries, de toutes les équations différentielles du genre.*

4. En conservant les notations qui précèdent, nous avons, d'après la formule de Maclaurin,

$$Y = Y_0 + \frac{x}{1!}Y_0^{(1)} + \frac{x^2}{2!}Y_0^{(2)} + \frac{x^3}{3!}Y_0^{(3)} + \ldots,$$

et cette formule nous montre que, pour déterminer Y, il suffit de calculer les valeurs numériques des quantités Y_0, $Y_0^{(1)}$, $Y_0^{(2)}$, $Y_0^{(3)}$, ... Ce calcul est le fondement de la méthode générale que nous avons donnée naguère (¹) pour intégrer, à l'aide des séries, et quels qu'en soient les coefficients et les seconds membres, toutes les équations différentielles linéaires. Nous ne faisons ici qu'appliquer cette méthode générale aux équations différentielles du genre que nous considérons, c'est-à-dire aux équations différentielles linéaires, sans second membre

(¹) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 7 mai 1877.

et à coefficients variables, dont l'équation dérivée (1) est une équation régulière.

5. L'équation différentielle que nous considérons étant supposée d'ordre ω, nous pouvons, sauf dans des cas tout à fait exceptionnels dont nous donnerons un exemple (19), nous pouvons, disons-nous, attribuer aux ω quantités Y_0, $Y_0^{(1)}$, $Y_0^{(2)}$, ..., $Y_0^{(\omega-1)}$ des valeurs arbitraires. Ces valeurs, que nous désignerons par C_1, C_2, C_3, ..., C_ω, seront les constantes arbitraires de l'intégrale que nous calculons. Puisqu'elles sont distinctes et que leur nombre est ordinairement égal à l'ordre ω de l'équation différentielle, cette intégrale, ordinairement aussi, est l'intégrale générale de l'équation différentielle considérée.

Il est évident que cette équation différentielle nous permettra elle-même de calculer de proche en proche, en fonction des constantes arbitraires $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_\omega$, les valeurs des quantités $Y_0^{(\omega)}, Y_0^{(\omega+1)}, Y_0^{(\omega+2)}, \ldots$. Nous calculerons ces diverses valeurs jusqu'à celle de $Y_0^{(\nu)}$ inclusivement, ν désignant (1) l'entier auquel l'ordre n de l'équation dérivée est constamment supérieur.

Ces calculs effectués, le polynôme

$$Y_0 + \frac{x}{1!}Y_0^{(1)} + \frac{x^2}{2!}Y_0^{(2)} + \frac{x^3}{3!}Y_0^{(3)} + \ldots + \frac{x^\nu}{\nu!}Y_0^{(\nu)},$$

qui constitue le commencement du développement de Y et qui présente $\nu + 1$ termes, aura tous ses coefficients exprimés en fonction des constantes arbitraires $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_\omega$.

6. Considérons maintenant l'équation dérivée (1)

$$K_0 F(n) Y_0^{(n)} + K_1 F(n-1) Y_0^{(n-1)} + \ldots + K_k F(n-k) Y_0^{(n-k)} = 0,$$

et posons

$$F(n) Y_0^{(n)} = v_n.$$

Nous trouvons cette nouvelle équation

$$K_0 v_n + K_1 v_{n-1} + K_2 v_{n-2} + \ldots + K_k v_{n-k} = 0,$$

qui, de même que l'équation dérivée d'où on la tire, subsiste pour toutes les valeurs de n supérieures à ν, et sur laquelle nous voyons que v_n est le terme général d'une série récurrente proprement dite, dont l'équation génératrice est l'équation

$$K_0 x^k + K_1 x^{k-1} + K_2 x^{k-2} + \ldots + K_k = 0,$$

qui est du degré k, et que, par une extension naturelle d'une expression usitée, nous nommerons l'*équation caractéristique* de l'équation différentielle proposée.

En nous appuyant sur les travaux de Moivre (¹), d'Euler (²) et de Lagrange (³), nous savons, à l'aide des racines de cette équation caractéristique, écrire v_n sous la forme d'un polynôme entier par rapport à n et à des exponentielles de la forme a^n, et présentant k coefficients indéterminés. Mais l'équation

$$F(n) Y_0^{(n)} = v_n,$$

que nous avons posée plus haut, nous donne

$$Y_0^{(n)} = \frac{v_n}{F(n)}.$$

Donc $Y_0^{(n)}$ s'exprime à l'aide d'une expression connue de n, qui contient k coefficients indéterminés.

Évidemment, k est au plus égal à la plus petite valeur possible de n, c'est-à-dire à $\nu + 1$. Donc nous pourrons toujours déterminer ces k coefficients en fonction des ω constantes arbitraires $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_\omega$. Il nous suffira, pour cela, de résoudre par rapport à ces k coefficients les k équations du premier degré qu'on obtient en égalant les quantités

$$\frac{v_{\nu-k+1}}{F(\nu-k+1)}, \quad \frac{v_{\nu-k+2}}{F(\nu-k+2)}, \quad \ldots, \quad \frac{v_{\nu-1}}{F(\nu-1)}, \quad \frac{v_\nu}{F(\nu)},$$

(¹) *Miscellanea analytica.*
(²) *Introductio in Analysin.*
(³) *Œuvres complètes*, 1re série.

qui sont exprimées au moyen de ces coefficients, aux quantités correspondantes

$$Y_0^{(\nu-k+1)},\quad Y_0^{(\nu-k+2)},\quad \ldots,\quad Y_0^{(\nu-1)},\quad Y_0^{(\nu)},$$

qui sont exprimées en fonction des constantes arbitraires.

Ces coefficients déterminés, et leurs expressions portées dans v_n, le quotient $\frac{v_n}{F(n)}$ se transforme en une fonction de n et de nos constantes arbitraires; la série dont il exprimait le terme général gagne les k termes $Y_0^{(\nu-k+1)}, Y_0^{(\nu-k+2)}, \ldots, Y_0^{(\nu-1)}, Y_0^{(\nu)}$, qui précèdent le terme $Y_0^{(\nu+1)}$ où elle commençait d'abord. Si nous désignons par X le polynôme

$$Y_0 + \frac{x}{1!}Y_0^{(1)} + \frac{x^2}{2!}Y_0^{(2)} + \ldots + \frac{x^{\nu-k}}{(\nu-k)!}Y_0^{(\nu-k)},$$

qui est entier en x et qui s'annule lorsque k est égal à $\nu+1$, l'intégrale dont nous nous occupons peut s'écrire

$$Y = X + \sum_{\nu-k+1}^{+\infty}{}_n \frac{v_n}{n!\,F(n)}\,x^n,$$

et cette formule nous donne, à l'aide des séries, une intégrale, qui est d'ordinaire l'intégrale générale, pour toutes les équations différentielles linéaires appartenant au genre que nous considérons.

7. Cette intégrale se compose, on le voit, d'un polynôme et d'une série. Dès qu'on saura sommer cette série, on saura écrire cette intégrale sous forme finie, en sorte que l'intégration sous forme finie des équations différentielles linéaires du genre considéré se ramène à la sommation des séries entières dont le terme général V_n est défini par l'égalité

$$V_n = \frac{v_n}{n!\,F(n)}\,x^n,$$

dans laquelle $F(n)$ désigne une fonction quelconque de n et où v_n est le terme général d'une série récurrente proprement dite.

Il y a corrélation complète entre cette intégration et cette sommation, et par suite entre les équations différentielles linéaires, sans second membre et à coefficients variables, dont l'équation dérivée est régulière, et les séries entières dont le terme général affecte la forme qu'on vient d'écrire. Dans ce genre d'équations différentielles et ce genre de séries, où les espèces nous paraissent être en nombre infini, à chaque espèce de séries, caractérisée par une forme particulière de la fonction $F(n)$, correspond une espèce d'équations différentielles, caractérisée par la même forme de la même fonction. Dès qu'on saura sommer les séries d'une certaine espèce, on saura intégrer les équations différentielles de l'espèce correspondante.

Dans l'état actuel de la Science, il nous semble que, parmi les séries du genre considéré, on n'en sait sommer que trois espèces, à savoir les séries récurrentes sommées ([1]) par Moivre à l'aide des fractions rationnelles, les séries que nous avons sommées ([2]) nous-même à l'aide des exponentielles, et celles que nous avons sommées ([3]) à l'aide des logarithmes. Ces trois espèces répondent aux trois formes du terme général U_n données par ces trois égalités

$$U_n = u_n x^n,$$
$$U_n = \frac{u_n}{n!} x^n,$$
$$U_n = \frac{u_n}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+t-1)} x^n,$$

dans lesquelles nous désignons par t un entier supérieur à zéro et par u_n le terme général d'une série récurrente proprement dite quelconque.

Ces trois formes du terme général U_n, avec toutes celles qui peuvent s'y ramener, correspondent évidemment aux trois formes de la fonction $F(n)$ que nous avons données précédemment (**2**), et les trois espèces de séries que nous considérons correspondent aux trois espèces d'équations différentielles que nous nous proposons d'intégrer.

C'est parce que nous savons sommer toutes ces séries que nous savons intégrer sous forme finie toutes ces équations différentielles. Si

([1]) *Miscellanea analytica.*

([2]) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séance du 15 avril 1878.

([3]) *Ibid.*, séance du 16 décembre 1878.

l'on découvrait la manière de sommer une quatrième, une cinquième, etc., espèce de séries du genre que nous étudions, on saurait immédiatement, d'après ce qui précède, intégrer sous forme finie une quatrième, une cinquième, etc., espèce d'équations différentielles. Il y a là tout un nouveau champ de recherches, pour ainsi dire inexploré.

III. — *Intégration, sous forme finie, des équations différentielles de la première espèce.*

8. La première espèce de nos équations différentielles est caractérisée (**2**) par l'égalité

$$F(n) = \frac{1}{n!f(n)},$$

dans laquelle $f(n)$ est un polynôme quelconque, entier par rapport à n et à des exponentielles de la forme a^n.

Pour toute équation différentielle de cette espèce, la formule (6) d'intégration prend la forme

$$Y = X + \sum_{\nu-k+1}^{+\infty}{}_n f(n) v_n x^n.$$

Or $f(n)$ et v_n sont deux polynômes connus, entiers par rapport à n et à des exponentielles de la forme a^n, dont les coefficients sont, dans le premier, numériques, et, dans le second, fonctions des constantes arbitraires $C_1, C_2, \ldots, C_\omega$. Leur produit $f(n)v_n$ sera tout à fait analogue à chacun d'eux ; en d'autres termes, il ne sera autre chose que le terme général u_n d'une série récurrente proprement dite, dont l'équation génératrice se déduirait immédiatement de la forme même du produit $f(n)v_n$. Donc l'intégrale précédente peut s'écrire

$$Y = X + \sum_{\nu-k+1}^{+\infty}{}_n u_n x^n,$$

et, sous cette dernière forme, nous voyons que, pour exprimer Y sans série infinie, nous n'avons qu'à sommer une série appartenant justement à la première des trois espèces (**7**), que nous savons sommer.

9. Les séries de cette première espèce ne sont évidemment autre chose que les séries récurrentes proprement dites. Depuis les beaux travaux de Moivre, d'Euler et de Lagrange, leur somme est bien connue : c'est une fraction rationnelle, dont le dénominateur est le polynôme entier en x qu'on obtient en remplaçant x par $\frac{1}{x}$ dans le premier membre de l'équation génératrice et en multipliant ensuite par la plus haute puissance de x qui figure dans ce premier membre, et dont le numérateur est un polynôme entier en x, d'un degré inférieur d'une unité à celui du dénominateur, dont les coefficients se déterminent à l'aide des coefficients des premiers termes de la série et qu'il faut multiplier par la puissance de x qui figure dans le premier terme de cette série.

La connaissance de u_n nous conduit directement à celle du dénominateur $\Phi(x)$ de cette fraction rationnelle. Si nous en désignons le numérateur, dont les coefficients sont calculés comme nous venons de le dire, par l'expression $\varphi(x)$, puis que nous multipliions cette expression par $x^{\nu-k+1}$, nous avons

$$Y = X + \frac{\varphi(x)}{\Phi(x)} x^{\nu-k+1},$$

et il suit de ce qui précède qu'au second membre de cette formule les coefficients sont ou numériques, ou exprimés à l'aide des constantes arbitraires $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_\omega$.

Telle est la formule générale d'intégration, sous forme finie, de toutes les équations différentielles de notre première espèce. Elle ne contient, on le voit, que des fonctions algébriques rationnelles.

10. Dans les raisonnements qui précèdent, nous nous sommes appuyé sur les racines, supposées connues, de l'équation caractéristique

$$K_0 x^k + K_1 x^{k-1} + K_2 x^{k-2} + \ldots + K_k = 0.$$

Mais, chose, selon nous, très remarquable, pour intégrer il est inutile de résoudre cette équation. En effet, connaissant d'une part l'équation génératrice de v_n, de l'autre celle du polynôme $f(n)$, qui n'est, lui aussi, que le terme général d'une série récurrente, on obtient immédiatement celle du produit $f(n)v_n$, c'est-à-dire celle de u_n. Les racines de cette dernière équation génératrice sont les produits qu'on obtient en multipliant chaque racine de la première équation génératrice par chaque racine de la seconde, et le degré de multiplicité de chaque racine ainsi constituée est la somme, diminuée d'une unité, des degrés de multiplicité des deux racines constituantes.

On écrira donc, sans résoudre l'équation caractéristique, le dénominateur $\Phi(x)$. Quant au numérateur $\varphi(x)$, on en déduira les coefficients de la considération des valeurs des premiers termes de la série que l'on somme, valeurs calculées en fonction des constantes arbitraires C_1, C_2, C_3, ..., C_ω, soit à l'aide de l'équation différentielle elle-même, soit, pour les termes éloignés, à l'aide de l'équation dérivée.

11. Pour donner un exemple, considérons l'équation différentielle déjà citée (**3**)

$$(x^4+x^3+x^2)\frac{d^2Y}{dx^2}+(4x^3+x^2-2x)\frac{dY}{dx}+(2x^2-x+2)Y=0,$$

dont l'équation dérivée est l'équation

$$\frac{1}{n!\,n}Y_0^{(n)}+\frac{1}{(n-1)!(n-1)}Y_0^{(n-1)}+\frac{1}{(n-2)!(n-2)}Y_0^{(n-2)}=0,$$

où nous avons à la fois

$$F(n)=\frac{1}{n!\,n},$$

$$\nu=2,\quad k=2.$$

L'équation différentielle considérée nous donne immédiatement

$$Y_0=0,\quad Y_0^{(1)}=C_1,\quad Y_0^{(2)}=C_2,$$

d'où nous déduisons

$$X=0.$$

L'équation génératrice de v_n est

$$x^2+x+1=0,$$

et, comme ici $f(n)$ est simplement égal à n, celle de u_n est

$$(x^2 + x + 1)^2 = 0.$$

Donc nous avons

$$Y = \frac{\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3}{(1 + x + x^2)^2} x.$$

En calculant les coefficients du numérateur à l'aide des valeurs de $Y_0^{(1)}$, $Y_0^{(2)}$, $Y_0^{(3)}$, $Y_0^{(4)}$, données soit par l'équation différentielle elle-même, soit, pour les dernières, par l'équation dérivée qui précède, on trouve finalement

$$Y = \frac{C_1 + (\frac{1}{2}C_2 + 2C_1)x + \frac{1}{4}C_2 x^2}{(1 + x + x^2)^2} x,$$

ou bien, en remplaçant simplement $\frac{1}{4}C_2$ par C_2,

$$Y = \frac{C_1 x + 2(C_1 + C_2)x^2 + C_2 x^3}{(1 + x + x^2)^2}.$$

Telle est l'intégrale générale de l'équation différentielle considérée. Nous l'avons obtenue, on le voit, sans avoir eu besoin de résoudre l'équation caractéristique.

IV. — *Intégration, sous forme finie, des équations différentielles de la deuxième espèce.*

12. Notre deuxième espèce d'équations différentielles est caractérisée (**2**) par l'égalité

$$F(n) = \frac{(n+s)!}{n!f(n)},$$

dans laquelle s désigne un nombre entier quelconque, positif, nul ou négatif, et $f(n)$ un polynôme quelconque, entier par rapport à n et à des exponentielles de la forme a^n.

Pour toute équation de cette espèce, notre formule générale (**6**) nous donne l'égalité

$$Y = X + \sum_{n=-k+1}^{+\infty} \frac{f(n)v_n}{(n+s)!} x^n;$$

laquelle, si l'on pose

$$(n)v_n = u_{n+s},$$

peut s'écrire

$$\mathrm{Y} = \mathrm{X} + x^{-s} \sum_{n=\nu-k+1}^{+\infty} \frac{u_{n+1}}{(n+s)!} x^{n+s},$$

ou bien encore, si l'on change la limite inférieure du Σ,

$$\mathrm{Y} = \mathrm{X} + x^{-s} \sum_{n=\nu-k+s+1}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n.$$

Tout le calcul revient donc à sommer, sous forme finie, les séries dont le terme général U_n est donné par l'égalité

$$\mathrm{U}_n = \frac{u_n}{n!} x^n,$$

dans laquelle u_n représente le terme général d'une série récurrente proprement dite quelconque.

13. Les séries dont le terme général peut se ramener à cette forme sont les séries de notre seconde espèce (**7**). Elles ont été sommées par nous dans un Mémoire inséré aux *Annales scientifiques de l'École Normale* (¹), et dont un résumé a été présenté à l'Académie des Sciences (²). Pour en faire connaître le résultat, nous rappellerons d'abord que, si l'on désigne par a l'une quelconque des racines de l'équation génératrice de u_n et par α son degré de multiplicité, on a

$$u_n = \Sigma \xi_a(n) a^n,$$

en étendant le Σ à toutes les racines de l'équation génératrice et désignant par $\xi_a(n)$ le polynôme

$$\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 n + \mathrm{A}_2 n^2 + \ldots + \mathrm{A}_{\alpha-1} n^{\alpha-1},$$

qui est entier en n et du degré $\alpha - 1$.

(¹) Année 1879.

(²) Dans la séance du 15 avril 1878.

Cela étant, nous avons prouvé dans ce Mémoire que, si l'on pose

$$h!\,Q_{a,h} = A_h \Delta^h O^h + A_{h+1} \Delta^h O^{h+1} + A_{h+2} \Delta^h O^{h+2} + \ldots + A_{\alpha-1} \Delta^h O^{\alpha-1},$$

on a identiquement, en convenant d'étendre le premier Σ du second membre à toutes les racines de l'équation génératrice et en désignant par e la base des logarithmes népériens,

$$\sum_0^\infty {}_n \frac{u_n}{n!} x^n = \sum \sum_0^{\alpha-1} {}_h a^h x^h Q_{a,h} e^{ax}.$$

C'est là l'expression sous forme finie de la somme obtenue.

14. Comme nous avons, évidemment,

$$\sum_{\nu-k+s+1}^{+\infty} {}_n \frac{u_n}{n!} x^n = \sum_0^{+\infty} {}_n \frac{u_n}{n!} x^n - \sum_0^{\nu-k+s} {}_n \frac{u_n}{n!} x^n,$$

nous pouvons écrire

$$Y = X - x^{-s} \sum_0^{\nu-k+s} {}_n \frac{u_n}{n!} x^n + x^{-s} \sum \sum_0^{\alpha-1} {}_h a^h x^h Q_{a,h} e^{ax}.$$

Telle est la formule générale d'intégration des équations différentielles de notre seconde espèce. On voit que l'intégrale qu'elle fournit ne contient, abstraction faite des fonctions algébriques rationnelles, que des exponentielles de la forme e^{ax}.

Les équations différentielles linéaires à coefficients constants avaient déjà des intégrales de cette forme. Il en devait être ainsi, puisque les équations différentielles linéaires à coefficients constants rentrent dans notre seconde espèce, dont elles constituent une simple variété.

On voit de plus que la formule que nous venons de donner nécessite, comme dans le cas des coefficients constants, la résolution de l'équation caractéristique

$$K_0 x^k + K_1 x^{k-1} + K_2 x^{k-2} + \ldots + K_k = 0.$$

15. Appliquons les résultats précédents à l'intégration de l'équation différentielle numérique de deuxième espèce

$$x^2 \frac{d^2Y}{dx^2} - 2x(x+1)\frac{dY}{dx} + 2(x+1)Y = 0,$$

dont l'équation dérivée est l'équation régulière

$$\frac{(n-1)!}{n!} Y_0^{(n)} - 2\frac{(n-2)!}{(n-1)!} Y_0^{(n-1)} = 0,$$

qui nous donne immédiatement

$$F(n) = \frac{(n-1)!}{n!},$$

$$\nu = 2, \quad k = 1, \quad s = -1, \quad f(n) = 1.$$

Nous avons ici, en nous reportant à la première forme de notre formule générale (**12**),

$$Y = X + \sum_{2}^{+\infty}{}_n \frac{v_n}{(n-1)!} x^n.$$

Nous tirons de l'équation différentielle elle-même

$$Y_0 = 0, \quad Y_0^{(1)} = C_1, \quad Y_0^{(2)} = C_2$$

et de l'équation dérivée

$$v_n = \lambda 2^n.$$

Il en résulte

$$X = C_1 x,$$

$$v_n = \tfrac{1}{8} C_2 2^n = \tfrac{1}{4} C_2 2^{n-1},$$

$$Y = C_1 x + \frac{1}{4} C_2 \sum_{2}^{\infty}{}_n \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} x^n,$$

et par conséquent

$$Y = C_1 x + \frac{1}{4} C_2 x \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{2^n}{n!} x^n.$$

La somme de cette dernière série se voit d'ailleurs immédiatement; elle est égale à $e^{2x} - 1$. Donc nous avons finalement

$$Y = (C_1 - \tfrac{1}{4}C_2)x + \tfrac{1}{4}C_2 x e^{2x},$$

ou bien, en remplaçant $C_1 - \frac{1}{4}C_2$ par C_1 et $\frac{1}{4}C_2$ par C_2,

$$Y = C_1 x + C_2 x e^{2x}.$$

Telle est l'intégrale générale de l'équation différentielle considérée.

V. — *Intégration, sous forme finie, des équations différentielles de la troisième espèce.*

16. Les équations différentielles de cette troisième espèce sont caractérisées (**2**) par l'égalité

$$F(n) = \frac{(n+s)(n+s+1)\ldots(n+s+t-1)}{n!f(n)},$$

dans laquelle s désigne un entier quelconque, positif, nul ou négatif, t un entier quelconque, mais supérieur à zéro, $f(n)$ un polynôme entier par rapport à n et à des exponentielles de la forme a^n.

Pour toutes les équations différentielles de cette espèce, notre formule générale d'intégration (**6**) devient

$$Y = X + \sum_{\nu - k + 1}^{+\infty}{}_n \frac{f(n)v_n}{(n+s)(n+s+1)\ldots(n+s+t-1)} x^n.$$

Si nous posons

$$f(n)v_n = u_{n+s},$$

cette formule peut s'écrire

$$Y = X + x^{-s} \sum_{\nu - k + 1}^{+\infty}{}_n \frac{u_{n+s}}{(n+s)(n+s+1)\ldots(n+s+t-1)} x^{n+s}$$

ou bien

$$Y = X + x^{-s} \sum_{\nu - k + s + 1}^{+\infty}{}_n \frac{u_n}{n(n+1)\ldots(n+t-1)} x^n.$$

17. Sous cette dernière forme, on voit immédiatement que la série qui figure dans l'expression générale de Y appartient à la troisième espèce de nos séries. Or nous avons sommé toutes les séries de cette troisième espèce dans un Mémoire récent, inséré aux *Annales scientifiques de l'École Normale* [1], dont un résumé a paru dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* [2], et qui repose sur cette égalité déjà rappelée (**13**) :

$$u_n = \Sigma \xi_a(n) a^n.$$

Ce point de départ indiqué, nous avons trouvé que l'on a

$$\sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{u_n}{n(n+1)\ldots(n+t-1)} x^n = \psi(x) + S_1 + S_2,$$

à la condition : 1° de représenter par $\psi(x)$ une fraction rationnelle que notre Mémoire donne le moyen de former et qui n'existe que dans le seul cas où l'équation génératrice de u_n a des racines dont le degré de multiplicité est supérieur à t; 2° de poser à la fois

$$S_1 = \sum\sum_{1}^{t-1}{}_h \frac{(-1)^{h+1}}{(t-1-h)!\,h!} \frac{\xi_a(-h)}{a^h x^h} \left(\frac{ax}{1} + \frac{a^2x^2}{2} + \ldots + \frac{a^h x^h}{h}\right),$$

$$S_2 = \sum\sum_{0}^{t-1}{}_h \frac{(-1)^{h+1}}{(t-1-h)!\,h!} \frac{\xi_a(-h)}{a^h x^h} \mathrm{L}(1-ax),$$

en désignant par L un logarithme népérien et convenant d'étendre, dans chacune de ces deux égalités, le premier Σ à toutes les racines de l'équation génératrice de u_n.

18. On a évidemment

$$\sum_{\nu-k+s+1}^{+\infty}{}_n \frac{u_n}{n(n+1)\ldots(n+t-1)}$$
$$= \psi(x) + S_1 + S_2 - \sum^{\nu-k+s}{}_n \frac{u_n}{n(n+1)\ldots(n+t-1)} x^n.$$

---

(1) Année 1880.

(2) Séance du 16 décembre 1878.

Donc, pour cette troisième espèce d'équations différentielles, l'intégrale est donnée, sous forme finie, par la formule

$$Y = X + x^{-s}\psi(x) + x^{-s}S_1 + x^{-s}S_2 - x^{-s}\sum_{1}^{\nu-k+s} {}_n \frac{u_n}{n(n+1)\ldots(n+t-1)} x^n,$$

qui nous montre que Y se compose uniquement de fonctions algébriques rationnelles et de logarithmes de la forme $L(1 - ax)$.

Nous voyons en même temps que, dans cette troisième espèce, notre mode d'intégration suppose la résolution préalable de l'équation caractéristique

$$K_0 x^k + K_1 x^{k-1} + K_2 x^{k-2} + \ldots + K_k = 0.$$

19. Appliquons cette formule à l'intégration de l'équation différentielle numérique du troisième ordre

$$(x^3 - 7x^2 + 12x)\frac{d^3Y}{dx^3} + (5x^2 - 28x + 36)\frac{d^2Y}{dx^2} + (4x - 14)\frac{dY}{dx} = 0,$$

dont l'équation dérivée est l'équation régulière

$$12\frac{n(n+1)}{n!}Y_0^{(n)} - 7\frac{(n-1)n}{(n-1)!}Y_0^{(n-1)} + \frac{(n-2)(n-1)}{(n-2)!}Y_0^{(n-2)} = 0,$$

qui nous donne à la fois

$$F(n) = \frac{n(n+1)}{n!}, \quad f(n) = 1,$$

$$\nu = 2, \quad k = 2, \quad s = 0, \quad t = 2.$$

L'équation différentielle que nous considérons nous permet de poser

$$Y_0 = C_1, \quad Y_0^{(1)} = C_2,$$

mais nous montre que les quantités suivantes $Y_0^{(2)}, Y_0^{(3)}, \ldots$ sont déterminées en fonction des deux premières. Donc l'exemple qui nous occupe tombe dans l'un de ces cas exceptionnels (5) où l'intégrale fournie par notre méthode n'est pas tout à fait l'intégrale générale de l'équation différentielle proposée.

Quoi qu'il en soit, dans notre exemple, s étant nul, $f(n)$ égal à l'unité, et les racines de l'équation caractéristique égales respectivement à $\frac{1}{3}$ et à $\frac{1}{4}$, la fraction $\psi(x)$ n'existe pas, et nous avons évidemment

$$v_n = u_n = \lambda_1 \left(\tfrac{1}{3}\right)^n + \lambda_2 \left(\tfrac{1}{4}\right)^n.$$

On obtient facilement d'ailleurs

$$X = C_1, \quad \lambda_1 = 24 C_2, \quad \lambda_2 = -24 C_2.$$

Donc nous trouvons

$$Y = C_1 + 24 C_2 \sum_1^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{n(n+1)} x^n,$$

et, en appliquant à la série qui figure dans cette expression notre formule de sommation, puis remplaçant $24\,C_2$ simplement par C_2,

$$Y = C_1 + C_2 \left[\left(\frac{3}{x} - 1\right) L\left(1 - \frac{x}{3}\right) - \left(\frac{4}{x} - 1\right) L\left(1 - \frac{x}{4}\right) \right].$$

Telle est l'intégrale que fournit notre méthode. Elle ne contient que deux constantes et, par conséquent, n'est pas l'intégrale générale; mais elle permet d'obtenir celle-ci.

En effet, d'après un théorème qui nous paraît dû à Lagrange, on peut diminuer l'ordre d'une équation différentielle linéaire d'un nombre d'unités égal à celui des intégrales particulières qu'on en possède. En appliquant ce théorème à l'équation proposée, on parvient à une équation différentielle du premier ordre, qui admet l'intégrale $\frac{C}{x}$. Il suffirait d'ajouter ce terme à l'intégrale trouvée déjà pour obtenir l'intégrale générale cherchée.

VI. — *Résumé.*

20. Dans tout ce qui précède, nous avons supposé nos équations différentielles linéaires dénuées de second membre. Comme on possède plusieurs moyens de ramener aux équations dénuées de second membre les équations qui en sont pourvues, il était assez naturel de ne considérer que les premières. Toutefois, nous pouvons faire remarquer que, dans le cas où le second membre est un polynôme entier en x, il est inutile de recourir aux moyens que nous venons de rappeler : nos procédés, tels que nous les avons exposés, suffisent alors à l'intégration.

21. Quoi qu'il en soit, les résultats du présent travail peuvent se résumer ainsi :

Les équations différentielles de notre première espèce admettent une intégrale composée uniquement de fonctions algébriques rationnelles ;

Celles de la seconde espèce, une intégrale composée de fonctions algébriques rationnelles et d'exponentielles de la forme a^x;

Celles enfin de la troisième, une intégrale composée de fonctions algébriques rationnelles et de logarithmes de la forme $\mathrm{L}(1 - ax)$.

22. Cette intégrale est le plus souvent l'intégrale générale de l'équation différentielle considérée. Elle peut s'écrire sous forme finie, pour les équations de la deuxième et de la troisième espèce, dès que l'on sait résoudre l'équation caractéristique correspondante et quels que soient d'ailleurs dans celle-ci les degrés de multiplicité des racines. Pour les équations différentielles de la première espèce, l'intégrale peut s'écrire sous forme finie, d'une façon tout à fait immédiate, sans qu'on ait préalablement besoin de résoudre ni l'équation caractéristique ni aucune équation d'un degré supérieur au premier.

23. La méthode d'intégration que nous avons exposée est une conséquence toute naturelle de nos précédents travaux sur l'intégration des équations différentielles linéaires [1] et sur la sommation des séries [2]. Au fond, elle consiste à développer l'intégrale cherchée en série et à sommer la série obtenue. Les formules générales d'intégration que nous avons données pour nos trois espèces d'équations différentielles font connaître le résultat de cette double opération. Dans la pratique, et grâce à ces formules, notre méthode ne conduit qu'à des calculs simples, réguliers, exempts de tâtonnements. Elle s'applique déjà aux trois espèces très vastes que nous avons distinguées et étudiées. Nous avons vu qu'il suffirait, pour l'étendre à de nouvelles espèces d'équations différentielles, d'arriver à sommer de nouvelles espèces de séries. Aussi cette méthode d'intégration nous semble-t-elle intéressante, tant à cause de sa régularité, de sa simplicité, de son caractère éminemment pratique, qu'en raison du grand nombre des équations différentielles auxquelles elle s'étend déjà et du nombre plus grand encore de celles auxquelles on ne manquera pas de l'étendre.

---

(1) *Comptes rendus*, séance du 7 mai 1877.

(2) *Ibid.*, séances du 22 avril et du 16 décembre 1878.