JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. LÉAUTÉ

Sur l'établissement des équations données par M. Resal pour représenter le mouvement d'une courbe funiculaire plane

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 6 (1880), p. 215-234.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1880_3_6__215_0>

Sur l'établissement des équations données par M. Resal pour représenter le mouvement d'une courbe funiculaire plane;

PAR M. H. LÉAUTÉ.

Les équations du mouvement d'une courbe funiculaire plane ont été données par M. Resal (¹), qui, désignant par α l'angle de la tangente avec l'axe des x, par u et v les composantes normale et tangentielle de la vitesse V, a obtenu la forme la plus simple à laquelle puissent se ramener les trois équations aux différences partielles simultanées qui déterminent α, u et v en fonction de l'arc s et du temps t.

Après avoir établi ces équations, M. Resal, dans son *Traité de Mécanique générale,* les a appliquées au cas du mouvement lent (²) d'une corde dont un point est fixe.

Cette partie de la démonstration donne lieu à une difficulté qui m'a paru réelle et qui provient de ce que M. Resal, n'ayant voulu traiter que le cas où la corde est très voisine de la ligne droite, ce qui résulte de son raisonnement même, n'a pas indiqué explicitement cette restriction. Et comme la question du mouvement des courbes funiculaires est d'une sérieuse importance, tant par les difficultés mathématiques qu'elle présente que par les applications dont elle est susceptible, comme d'un autre côté le travail de M. Resal sur ce sujet est aujourd'hui devenu classique, il est utile de signaler cette difficulté.

(¹) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences.*

(²) *Traité de Mécanique générale,* t. I, p. 321.

J'aborderai ensuite le problème dans toute sa généralité, afin d'établir les équations des petites oscillations d'une corde inextensible dans l'espace. Les formules auxquelles je serai conduit n'ont pas encore été obtenues, je crois; elles se réduiront à celles de M. Resal dans le cas plus simple de la courbe plane.

Enfin j'indiquerai une démonstration directe de ce dernier cas en me servant de la considération des mouvements relatifs, et la méthode suivie, tout en ne conduisant naturellement qu'à des résultats déjà obtenus, aura du moins l'avantage de fournir une signification claire des différents termes qui composent les équations.

I.

Discussion de la méthode suivie par M. Resal pour passer du cas du mouvement quelconque d'une courbe funiculaire plane à celui du mouvement très lent.

Si l'on considère une courbe funiculaire plane, on a toujours, aux termes du troisième ordre près, et dans le système de notations précédemment rappelé,

$$\frac{dv}{ds} - u\frac{d\alpha}{ds} = 0, \tag{1}$$

équation qui exprime l'invariabilité de longueur d'un élément de corde.

On a de même

$$\frac{du}{ds} + v\frac{d\alpha}{ds} - \frac{d\alpha}{dt} = 0. \tag{2}$$

Cela posé, M. Resal, pour le cas du mouvement très lent, fait le raisonnement qui suit : « Supposons que le mouvement soit assez lent pour qu'on puisse négliger les termes du second ordre en u, v, $\frac{d\alpha}{dt}$. L'équation (1) donne $\frac{dv}{ds} = 0$, et, comme un point de la corde est fixe, il faut que $v = 0$. L'équation (2) devient

$$\frac{du}{ds} = \frac{d\alpha}{dt}. \text{ »}$$

Ce raisonnement suppose implicitement que la corde s'écarte infiniment peu de la ligne droite, car cette condition est nécessaire pour qu'on puisse affirmer que $u\frac{d\alpha}{ds}$ est du second ordre quand u, v et $\frac{d\alpha}{dt}$ sont du premier.

En effet, on ne concevrait pas, *a priori*, que l'équation (1), qui exprime simplement l'inextensibilité de la corde, changeât de forme selon que le mouvement est lent ou rapide. On voit, au contraire, que $u\frac{d\alpha}{ds}$ ne sera du second ordre que lorsque $\frac{d\alpha}{ds}$ sera du premier, ce qui nécessite que α lui-même soit du premier ordre ou, si l'on veut, que la corde reste très voisine de la ligne droite.

Il est d'ailleurs facile de démontrer directement que v ne peut être nul que dans ce cas.

Pour cela, remarquons que la quantité v représente la composante de la vitesse suivant la tangente; elle ne peut donc être toujours nulle que si les deux extrémités A et B de l'élément considéré (¹) sont venues en A′ et B′ sur les normales AA′ et BB′ à la corde en A et B. Or, si l'on projette B′ en b' sur la tangente en A à l'élément AB, la longueur Ab' sera égale à A′B′, c'est-à-dire à AB, aux termes du troisième ordre près, et, par suite, B sera à une distance infiniment petite du troisième ordre de la droite B′b'.

Cela exige que l'angle BB′b' soit du second ordre, c'est-à-dire que les deux normales en A et B fassent un angle infiniment petit du second ordre. Le rayon de courbure en A est donc infini, et l'élément AB s'écarte infiniment peu d'une ligne droite.

Il est ainsi démontré que l'équation

$$\frac{dv}{ds} = 0$$

n'est rigoureuse que lorsque la corde est rectiligne ou lorsqu'il s'agit d'un point d'inflexion; elle pourra être admise comme approchée quand l'arc que l'on étudie aura un rayon de courbure regardé comme grand dans l'ordre d'approximation que l'on considère.

(¹) Le lecteur est prié de faire la figure.

C'est ainsi, par exemple, que, dans le cas des câbles d'extraction employés dans les puits de mine pour l'enlèvement des bennes, l'équation dont il s'agit sera évidemment applicable.

II.

Equations des petites oscillations dans le cas du mouvement d'une corde dans l'espace.

Pour établir les équations des petites oscillations d'une corde, nous nous placerons dans le cas le plus général, c'est-à-dire que, au lieu d'étudier simplement les petits mouvements en supposant la corde primitivement au repos écartée ensuite de sa position d'équilibre, nous examinerons les petites oscillations qu'elle peut présenter lorsqu'elle était tout d'abord animée d'un mouvement permanent de vitesse quelconque.

Le problème ainsi traité aura non seulement une généralité plus grande, mais surtout une importance pratique plus considérable, puisque ce sera la question même des câbles télodynamiques qui sera ainsi résolue.

Désignons par x, y, z, μ, T les coordonnées rectangulaires d'un point de la corde et la tension en ce point, μ étant la masse de l'unité de longueur, par X, Y, Z les composantes de la force extérieure sur l'unité de masse, et par s et t les deux variables indépendantes qui représentent la longueur d'arc et le temps.

On sait que les équations générales du mouvement sont

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{X} + \dfrac{d}{ds}\left(\mathrm{T}\dfrac{dx}{ds}\right), \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \mathrm{Y} + \dfrac{d}{ds}\left(\mathrm{T}\dfrac{dy}{ds}\right), \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = \mathrm{Z} + \dfrac{d}{ds}\left(\mathrm{T}\dfrac{dz}{ds}\right), \end{cases}$$

avec la condition

$$(2)\qquad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

qui exprime l'inextensibilité de la corde.

Nous supposerons, ainsi que nous venons de le dire, que le mouvement permanent soit tout d'abord réalisé, et nous désignerons par V la vitesse correspondante, qui, ainsi que nous l'avons démontré dans un autre travail ([1]), est alors la même en tous les points et est indépendante du temps; puis nous imaginerons que l'on écarte légèrement la corde de cette position, et nous représenterons par $x + x_1$, $y + y_1$, $z + z_1$, $\mu(T + T_1)$, ce que deviennent les coordonnées du point considéré et la tension en ce point.

Si X_1, Y_1, Z_1 sont les accroissements qu'éprouve la force extérieure X, Y, Z lorsqu'on passe du point (x, y, z) au point $(x + x_1, y + y_1, z + z_1)$, on a

$$\begin{gathered}
\frac{d^2(x+x_1)}{dt^2} = X + X_1 + \frac{d}{ds}\left[(T+T_1)\frac{d(x+x_1)}{ds}\right],\\
\frac{d^2(y+y_1)}{dt^2} = Y + Y_1 + \frac{d}{ds}\left[(T+T_1)\frac{d(y+y_1)}{ds}\right],\\
\frac{d^2(z+z_1)}{dt^2} = Z + Z_1 + \frac{d}{ds}\left[(T+T_1)\frac{d(z+z_1)}{ds}\right],\\
\left[\frac{d(x+x_1)}{ds}\right]^2 + \left[\frac{d(y+y_1)}{ds}\right]^2 + \left[\frac{d(z+z_1)}{ds}\right]^2 = 1.
\end{gathered}$$

Ces équations deviennent, si l'on tient compte des équations (1) et (2), et si l'on suppose les quantités x_1, y_1, z_1, T_1 assez petites pour qu'il soit permis de négliger, par rapport à elles ou à leurs dérivées, les termes du second ordre,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d^2x_1}{dt^2} &= X_1 + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dx_1}{ds} + T_1\frac{dx}{ds}\right),\\
\frac{d^2y_1}{dt^2} &= Y_1 + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy_1}{ds} + T_1\frac{dy}{ds}\right),\\
\frac{d^2z_1}{dt^2} &= Z_1 + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dz_1}{ds} + T_1\frac{dz}{ds}\right),\\
\frac{dx}{ds}\frac{dx_1}{ds} &+ \frac{dy}{ds}\frac{dy_1}{ds} + \frac{dz}{ds}\frac{dz_1}{ds} = 0.
\end{aligned}\right.$$

Posons maintenant

$$S + Vt = \sigma$$

([1]) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 10 novembre 1879.

et prenons pour variables σ et t, ce qui nous permettra de comparer le mouvement apparent de la corde qui oscille à la forme qu'elle a dans l'état permanent, puisque la quantité σ détermine un point de la corde qui, dans l'état permanent, occupe toujours la même position dans l'espace.

Les équations précédentes deviennent alors, en représentant $T - V^2$ par ϖ,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= X_1 + \frac{d}{d\sigma}\left(\varpi \frac{dx_1}{d\sigma} + T_1 \frac{dx}{d\sigma}\right) - 2V \frac{d^2 x_1}{d\sigma\, dt}, \\ \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= Y_1 + \frac{d}{d\sigma}\left(\varpi \frac{dy_1}{d\sigma} + T_1 \frac{dy}{d\sigma}\right) - 2V \frac{d^2 y_1}{d\sigma\, dt}, \\ \frac{d^2 z_1}{dt^2} &= Z_1 + \frac{d}{d\sigma}\left(\varpi \frac{dz_1}{d\sigma} + T_1 \frac{dz}{d\sigma}\right) - 2V \frac{d^2 z_1}{d\sigma\, dt}, \\ &\frac{dx}{d\sigma}\frac{dx_1}{d\sigma} + \frac{dy}{d\sigma}\frac{dy_1}{d\sigma} + \frac{dz}{d\sigma}\frac{dz_1}{d\sigma} = 0. \end{aligned}\right.$$

Nous allons maintenant opérer un changement de coordonnées analogue à celui qui a conduit M. Resal, dans le cas de la courbe plane, aux équations les plus simples. Nous choisirons pour nouveaux axes la tangente, la normale principale et la binormale à la courbe de repos apparent au point considéré, c'est-à-dire que nous remplacerons les axes correspondant à x_1, y_1, z_1 par d'autres dont les inclinaisons varient à chaque instant, de manière à se coucher sur les trois directions dont il vient d'être question.

Le nouveau système de coordonnées est donc variable à la fois avec le point que l'on considère et avec l'instant dont il s'agit; toutefois, sa position ne dépend que de celle qu'occuperait le point matériel, à l'instant choisi, sur la courbe de repos apparent dans le mouvement permanent, c'est-à-dire que de σ.

Afin de simplifier un peu le calcul nécessité par ce changement d'axes, nous remarquerons que, la direction des anciennes coordonnées étant complètement indépendante de celle des nouvelles, il nous est permis, pour obtenir les formules définitives, de supposer les premières coordonnées parallèles aux nouvelles à l'instant considéré et pour le point que l'on envisage spécialement.

Cela posé, nous nous servirons, pour opérer la transformation d'axes qui vient d'être indiquée, des formules de M. Serret, et, comme elles nécessitent quelques calculs assez compliqués, nous donnerons le détail des opérations.

Soient α, β, γ les nouvelles coordonnées dirigées respectivement suivant la tangente, la binormale et la normale principale à la courbe de repos apparent; si l'on désigne les angles qu'elles forment avec les anciennes de la façon suivante,

$$\begin{array}{cccc} & x, & y, & z, \\ \alpha, & \lambda, & \mu, & \nu, \\ \beta, & \lambda', & \mu', & \nu', \\ \gamma, & \lambda'', & \mu'', & \nu'', \end{array}$$

et si l'on représente par ρ et r les rayons de première et de seconde courbure de la courbe de repos apparent, on a, dans le cas général,

$$\begin{aligned}
&\frac{d\cos\lambda}{d\sigma} = \frac{\cos\lambda''}{\rho},\\
&\frac{d\cos\lambda'}{d\sigma} = \frac{\cos\lambda''}{r},\\
&\frac{d\cos\lambda''}{d\sigma} = -\frac{\cos\lambda}{\rho} - \frac{\cos\lambda'}{r},\\
&\frac{d^2\cos\lambda}{d\sigma^2} = -\frac{\cos\lambda}{\rho^2} - \frac{\cos\lambda'}{r\rho} + \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\cos\lambda''}{\rho}\right),\\
&\frac{d^2\cos\lambda'}{d\sigma^2} = -\frac{\cos\lambda}{r\rho} - \frac{\cos\lambda'}{r^2} + \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\cos\lambda''}{r}\right),\\
&\frac{d^2\cos\lambda''}{d\sigma^2} = -\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\cos\lambda}{\rho}\right) - \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\cos\lambda'}{r}\right) - \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2}\right)\cos\lambda''.
\end{aligned}$$

Dans le cas particulier où les deux systèmes d'axes sont parallèles, on trouve

$$\begin{array}{lll}
\cos\lambda = 1, & \cos\mu = 0, & \cos\nu = 0,\\
\cos\lambda' = 0, & \cos\mu' = 1, & \cos\nu' = 0,\\
\cos\lambda'' = 0, & \cos\mu'' = 0, & \cos\nu'' = 1,\\
\dfrac{d\cos\lambda}{d\sigma} = 0, & \dfrac{d\cos\mu}{d\sigma} = 0, & \dfrac{d\cos\nu}{d\sigma} = \dfrac{1}{\rho},\\
\dfrac{d\cos\lambda'}{d\sigma} = 0, & \dfrac{d\cos\mu'}{d\sigma} = 0, & \dfrac{d\cos\nu'}{d\sigma} = \dfrac{1}{r},
\end{array}$$

$$\frac{d\cos\lambda''}{d\sigma} = -\frac{1}{\rho}, \quad \frac{d\cos\mu''}{d\sigma} = -\frac{1}{r}, \quad \frac{d\cos\nu''}{d\sigma} = 0,$$

$$\frac{d^2\cos\lambda}{d\sigma^2} = -\frac{1}{\rho^2}, \qquad \frac{d^2\cos\mu}{d\sigma^2} = -\frac{1}{r\rho}, \qquad \frac{d^2\cos\nu}{d\sigma^2} = \frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\sigma},$$

$$\frac{d^2\cos\lambda'}{d\sigma^2} = -\frac{1}{r\rho}, \qquad \frac{d^2\cos\mu'}{d\sigma^2} = -\frac{1}{r^2}, \qquad \frac{d^2\cos\nu'}{d\sigma^2} = \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\sigma},$$

$$\frac{d^2\cos\lambda''}{d\sigma^2} = -\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\sigma}, \quad \frac{d^2\cos\mu''}{d\sigma^2} = -\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\sigma}, \quad \frac{d^2\cos\nu''}{d\sigma^2} = -\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2}\right).$$

On a d'ailleurs

$$x_1 = \alpha\cos\lambda + \beta\cos\lambda' + \gamma\cos\lambda'',$$
$$y_1 = \alpha\cos\mu + \beta\cos\mu' + \gamma\cos\mu'',$$
$$z_1 = \alpha\cos\nu + \beta\cos\nu' + \gamma\cos\nu'';$$

on en déduit

$$\frac{dx_1}{d\sigma} = \frac{d\alpha}{d\sigma} - \frac{\gamma}{\rho},$$
$$\frac{dy_1}{d\sigma} = \frac{d\beta}{d\sigma} - \frac{\gamma}{r},$$
$$\frac{dz_1}{d\sigma} = \frac{d\gamma}{d\sigma} + \frac{\beta}{r} + \frac{\alpha}{\rho},$$

$$\frac{d^2x_1}{d\sigma^2} = \frac{d^2\alpha}{d\sigma^2} - 2\frac{d\gamma}{d\sigma}\frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} - \frac{\beta}{r\rho} - \gamma\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\sigma},$$

$$\frac{d^2y_1}{d\sigma^2} = \frac{d^2\beta}{d\sigma^2} - 2\frac{d\gamma}{d\sigma}\frac{1}{r} - \frac{\alpha}{r\rho} - \frac{\beta}{r^2} - \gamma\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\sigma},$$

$$\frac{d^2z_1}{d\sigma^2} = \frac{d^2\gamma}{d\sigma^2} + 2\frac{d\alpha}{d\sigma}\frac{1}{\rho} + 2\frac{d\beta}{d\sigma}\frac{1}{r} + \alpha\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\sigma} + \beta\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\sigma} - \gamma\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2}\right).$$

Afin de simplifier l'écriture et de donner aux équations une forme plus explicite en mettant en évidence des quantités utiles à considérer, nous poserons

$$\frac{d\alpha}{d\sigma} - \frac{\gamma}{\rho} = \varepsilon,$$

$$\frac{d\beta}{d\sigma} - \frac{\gamma}{r} = \psi,$$

$$\frac{d\gamma}{d\sigma} + \frac{\beta}{r} + \frac{\alpha}{\rho} = \omega.$$

Ces quantités sont respectivement égales à $\frac{dx_1}{d\sigma}$, $\frac{dy_1}{d\sigma}$, $\frac{dz_1}{d\sigma}$; leur signification géométrique en résulte alors immédiatement, si l'on se rappelle que les quantités x_1, y_1, z_1 sont dirigées suivant les axes α, β, γ. La quantité ε est l'allongement relatif de l'élément de corde; il est nul dans le cas que nous traitons, puisque la corde est inextensible. ψ est le sinus de l'angle que forme l'élément oscillant avec le plan osculateur $M\alpha\gamma$ ou, si l'on veut, l'angle lui-même, puisqu'il reste toujours petit. Enfin ω est l'angle de l'élément dont il s'agit avec le plan $M\alpha\beta$, perpendiculaire à la normale principale.

Avec ces notations, les formules qui viennent d'être écrites deviennent

$$\frac{dx_1}{d\sigma} = \varepsilon, \qquad \frac{dy_1}{d\sigma} = \psi, \qquad \frac{dz_1}{d\sigma} = \omega,$$

$$\frac{d^2x_1}{d\sigma^2} = \frac{d\varepsilon}{d\sigma} - \frac{\omega}{\rho}, \quad \frac{d^2y_1}{d\sigma^2} = \frac{d\psi}{d\sigma} - \frac{\omega}{r}, \quad \frac{d^2z_1}{d\sigma^2} = \frac{d\omega}{d\sigma} + \frac{\varepsilon}{\rho} + \frac{\psi}{r}.$$

Si l'on remarque, de plus, que les quantités α, β, γ sont fixes lorsque σ est constant, on obtient

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{dy_1}{dt} = \frac{d\beta}{dt}, \quad \frac{dz_1}{dt} = \frac{d\gamma}{dt},$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}, \quad \frac{d^2y_1}{dt^2} = \frac{d^2\beta}{dt^2}, \quad \frac{d^2z_1}{dt^2} = \frac{d^2\gamma}{dt^2},$$

$$\frac{d^2x_1}{d\sigma\,dt} = \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad \frac{d^2y_1}{d\sigma\,dt} = \frac{d\psi}{dt}, \quad \frac{d^2z_1}{d\sigma\,dt} = \frac{d\omega}{dt}.$$

En tenant compte alors de ce que

$$\frac{dx}{d\sigma} = 1, \quad \frac{dy}{d\sigma} = 0, \quad \frac{dz}{d\sigma} = 0,$$

$$\frac{d^2x}{d\sigma^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{d\sigma^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{d\sigma^2} = \frac{1}{\rho},$$

puisque les axes sont supposés dirigés suivant la tangente, la binormale et la normale principale, les équations du mouvement de la corde, supposée inextensible, prennent la forme (en désignant par A_1, B_1, C_1 les accroissements des composantes suivant $M\alpha$, $M\beta$, $M\gamma$ de la force accélératrice quand on passe du point M au point M')

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\alpha}{dt^2} = A_1 - \varpi\frac{\omega}{\rho} + \frac{dT_1}{d\sigma},\\ &\frac{d^2\beta}{dt^2} = B_1 + \frac{d\varpi}{d\sigma}\psi + \varpi\left(\frac{d\psi}{d\sigma} - \frac{\omega}{r}\right) - 2V\frac{d\psi}{dt},\\ &\frac{d^2\gamma}{dt^2} = C_1 + \frac{d\varpi}{d\sigma}\omega + \varpi\left(\frac{d\omega}{d\sigma} + \frac{\psi}{r}\right) - 2V\frac{d\omega}{dt} + \frac{T_1}{\rho},\\ &\qquad\qquad \frac{d\alpha}{d\sigma} - \frac{\gamma}{\rho} = 0,\\ &\qquad\qquad \frac{d\beta}{d\sigma} - \frac{\gamma}{r} = \psi,\\ &\qquad\qquad \frac{d\gamma}{d\sigma} + \frac{\beta}{r} + \frac{\alpha}{\rho} = \omega. \end{aligned}\right.$$

Il suffit maintenant, pour passer au cas particulier de la courbe plane étudié par M. Resal, de faire infini le rayon de seconde courbure r. Les formules précédentes deviennent alors

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\alpha}{dt^2} = A_1 - \varpi\frac{\omega}{\rho} + \frac{dT_1}{d\sigma},\\ &\frac{d^2\beta}{dt^2} = B_1 + \frac{d}{d\sigma}\left(\varpi\frac{d\beta}{d\sigma}\right) - 2V\frac{d^2\beta}{d\sigma\,dt},\\ &\frac{d^2\gamma}{dt^2} = C_1 + \frac{d}{d\sigma}(\varpi\omega) - 2V\frac{d\omega}{dt} + \frac{T_1}{\rho},\\ &\qquad\qquad \frac{d\alpha}{d\sigma} - \frac{\gamma}{\rho} = 0,\\ &\qquad\qquad \frac{d\gamma}{d\sigma} + \frac{\alpha}{\rho} = \omega. \end{aligned}\right.$$

Une remarque importante doit être faite ici. Si B_1 ne dépend que de β, et si A_1 et C_1 en sont indépendants, la seconde équation ne contient pas l'accroissement de tension T_1 et elle est la seule qui renferme la variable β. Or β, qui est dirigé suivant la perpendiculaire au plan de la courbe, représente ce que l'on peut appeler l'*oscillation latérale*. On voit donc que, dans ce cas particulier, ces oscillations n'influent en rien sur la tension.

Il est évident que la réciproque est vraie et que les variations de tension ne pourront produire d'oscillations latérales tant que B_1 ne contiendra que β et que A_1 et C_1 ne le renfermeront pas.

Ce théorème, qui est évidemment applicable aux transmissions télodynamiques, puisque, la seule force extérieure étant alors la pesanteur, les quantités A_1, B_1 et C_1 sont nulles, nous montre que dans un câble métallique les oscillations latérales n'ont pas d'influence sur la régularité du mouvement et que, réciproquement, les changements de tension produits par les inégalités de vitesse des poulies ne peuvent donner lieu directement à des oscillations latérales.

Les équations (6), relatives à la courbe plane, sont identiques à celles obtenues par M. Resal lorsqu'on se place dans les conditions où il a traité le problème, c'est-à-dire lorsqu'on suppose que la seule force agissante est la pesanteur, que la corde est tout d'abord au repos, que le mouvement a lieu dans un plan et que l'arc considéré ne comprend qu'un très petit nombre de degrés dans le voisinage du sommet.

En effet, la pesanteur étant constante, les quantités A_1, B_1, C_1 sont nulles; le mouvement ayant lieu dans le plan des $\alpha\gamma$, on laissera de côté l'équation en β; enfin, la corde étant supposée primitivement au repos, V est égal à zéro, ϖ à T et σ à s.

Les équations (6) prennent alors la forme

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{\mathrm{T}}{\rho}\omega + \frac{d\mathrm{T}_1}{ds},\\ &\frac{d^2\gamma}{dt^2} = \frac{d(\mathrm{T}\omega)}{ds} + \frac{\mathrm{T}_1}{\rho},\\ &\frac{d\alpha}{ds} - \frac{\gamma}{\rho} = 0,\\ &\frac{d\gamma}{ds} + \frac{\alpha}{\rho} = \omega. \end{aligned}\right.$$

Si l'on élimine T_1 entre les deux premières, on trouve

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{d\gamma}{ds}-\frac{\alpha}{\rho}\right) &= \omega\left(\frac{T}{\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{ds}\frac{dT}{ds}+\frac{d^2T}{ds^2}\right)\\ &\quad+\frac{d\omega}{ds}\left(2\frac{dT}{ds}+\frac{T}{\rho}\frac{d\rho}{ds}\right)+T\frac{d^2\omega}{ds^2}-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{ds}\frac{d^2\gamma}{dt^2}.\end{aligned}\right.$$

On sait d'ailleurs que dans le cas de la chaînette, si l'on appelle θ l'angle de l'élément ds avec l'horizontale et R le rayon de courbure au sommet, on a

$$\rho = \frac{R}{\cos^2\theta},\quad s = R\,\mathrm{tang}\,\theta,\quad T = \frac{Rg}{\cos\theta}.$$

On en déduit

$$\frac{d\rho}{ds} = 2\,\mathrm{tang}\,\theta,\quad \frac{T}{\rho} = g\cos\theta,\quad \frac{dT}{ds} = g\sin\theta,\quad \frac{d^2T}{ds^2} = \frac{g}{R}\cos^3\theta.$$

Si l'on suppose maintenant que l'angle θ reste assez petit pour qu'il soit permis de négliger les termes qui le contiennent à une puissance supérieure à la première, on peut écrire

$$\rho = R,\quad s = R\theta,\quad T = Rg,$$
$$\frac{d\rho}{ds} = 2\theta,\quad \frac{T}{\rho} = g,\quad \frac{dT}{ds} = g\theta,\quad \frac{d^2T}{ds^2} = \frac{g}{R}.$$

En portant ces valeurs dans les équations (7), on obtient, au degré d'approximation adopté,

$$(9)\qquad \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -g\omega + \frac{dT_1}{ds},$$

$$(10)\qquad \frac{d^2\gamma}{dt^2} = Rg\frac{d\omega}{ds} + \frac{T_1}{R},$$

$$(11)\qquad \frac{d\alpha}{ds} - \frac{\gamma}{R} = 0,$$

$$(12)\qquad \frac{d\gamma}{ds} + \frac{\alpha}{R} = \omega,$$

et l'équation (8) devient

$$(13)\qquad \frac{d^2\left(\frac{d\gamma}{ds}-\frac{\alpha}{R}\right)}{dt^2} = 2\frac{g}{R}\omega + Rg\frac{d^2\omega}{ds^2};$$

mais, si l'on dérive l'équation (11) par rapport à s, on a

$$\frac{d^2\alpha}{ds^2} = \frac{1}{R}\frac{d\gamma}{ds},$$

et l'on en conclut, par l'équation (12),

$$R\frac{d^2\alpha}{ds^2} + \frac{\alpha}{R} = \omega,$$

et par suite

$$\alpha = \sin\frac{s}{R}\int\omega\cos\frac{s}{R}\,ds - \cos\frac{s}{R}\int\omega\sin\frac{s}{R}\,ds,$$

ou simplement, puisque l'arc $\frac{s}{R}$ est petit,

$$\alpha = \frac{1}{R}\left(s\int\omega\,ds - \int\omega s\,ds\right). \tag{14}$$

Il résulte de là que la quantité α peut se mettre sous la forme

$$\alpha = \frac{s^2}{R}\omega',$$

ω' étant une certaine quantité intermédiaire entre les diverses valeurs de ω.

Cette relation nous conduit à cette conséquence importante que $\frac{\alpha}{R}$ est petit par rapport à ω, puisque l'angle $\frac{s}{R}$ est, par hypothèse, petit.

Quant à $\frac{d\gamma}{ds}$ ou, si l'on veut, $R\frac{d^2\alpha}{ds^2}$, il est du même ordre de grandeur que ω d'après l'équation (12), et il peut être pris égal à cette quantité, puisque $\frac{\alpha}{R}$ est négligeable.

Les équations (12) et (13) deviennent alors

$$\frac{d\gamma}{ds} = \omega,$$
$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = \frac{2g}{R}\omega + Rg\frac{d^2\omega}{ds^2},$$

et la dernière peut s'écrire

$$2\omega + \frac{d^2\omega}{d\theta^2} - \frac{R}{g}\frac{d^2\omega}{dt^2} = 0, \tag{15}$$

qui, sauf les notations, est identiquement celle indiquée par M. Resal [1] pour les petits mouvements d'une chaînette.

Il ne reste plus qu'à montrer comment la solution s'achève par de simples quadratures.

La valeur de ω est donnée, comme on sait, par la suite

$$\omega = \sum K \cos\left[(\theta + \varepsilon)\sqrt{\frac{RK'^2}{g} + 2}\right]\cos K'(t + \varepsilon'),$$

ε, ε', K et K' étant des constantes.

Quant à γ et à α, ils sont fournis par les relations

$$\gamma = \int \omega\, ds,$$
$$\alpha = \frac{1}{R}\int \gamma\, ds = \frac{1}{R}\int\int \omega\, ds^2.$$

Il est d'ailleurs facile de reconnaître, à l'aide d'une intégration par parties, que cette dernière expression revient bien à l'expression (14) donnée plus haut.

Le problème est donc complètement terminé, et nous avons montré que l'équation finale donnée par M. Resal était non seulement exacte, malgré la difficulté signalée dans le mode de raisonnement employé pour l'établir, mais encore qu'elle ne supposait en rien l'hypothèse restrictive de la fixité des extrémités.

En résumé, il se produit dans le travail de M. Resal ce fait remarquable, que l'équation simplifiée à laquelle il arrive pour le cas de la chaînette, lorsque l'arc ne dépasse pas une vingtaine de degrés, est exacte, alors que l'équation dont elle dérive immédiatement n'est pas

---

[1] Voir le *Traité de Mécanique générale* de M. Resal, t. I, p. 329, § 97 : *Équations des petits mouvements d'une chaînette*.

admissible dans le cas général. Il est intéressant d'expliquer la raison de cette singularité.

Le raisonnement fait par M. Resal pour traiter le cas du mouvement très lent suppose, comme nous l'avons vu, que la vitesse tangentielle reste constamment nulle, c'est-à-dire (avec le système de notations adoptées dans notre travail) que α reste toujours nul quand les extrémités sont fixes. Cette hypothèse n'est pas rigoureusement exacte et paraît inadmissible *a priori;* mais il arrive, ainsi que nous l'avons démontré, que, pour un arc peu étendu, α est petit par rapport aux deux quantités γ et ω, de telle sorte que, en négligeant les termes en α dès le début, on n'a pas altéré, en fin de compte, l'équation finale en ω.

C'est là un point curieux de cette question, que les deux inconnues principales α et γ ne sont pas du même ordre de grandeur, si bien que la première, étant négligeable par rapport à l'autre, disparaît des équations qui donnent γ, et que l'on est ainsi tenté d'admettre qu'elle est toujours nulle. On peut d'ailleurs, *a priori,* prévoir cette particularité, car on sait que les flèches d'un arc d'un petit nombre de degrés sont grandes par rapport aux différences entre cet arc et sa corde.

La méthode que nous avons suivie a ce double avantage, qu'en prenant α pour variable principale nous évitons forcément l'erreur signalée et que nous obtenons la valeur de cette quantité α.

III.

Établissement des équations des petits mouvements d'une courbe funiculaire plane par la considération des mouvements relatifs.

Soient MM_1 la position d'un élément de câble dans la courbe de repos apparent et $M'M'_1$ la position du même élément à un instant quelconque t (¹).

Le point M' peut être considéré comme en équilibre sous l'action de

(¹) Dans tout ce qui suit, on distinguera par l'accentuation les quantités se rapportant au mouvement réel; celles qui ne seront pas pourvues d'accent seront relatives à la courbe de repos apparent la tension $\mu T'$ du câble en ce point, des forces extérieures et des forces d'inertie dues à son mouvement.

Si donc on désigne par F'_t et F'_n, φ'_t et φ'_n les composantes des forces extérieures et des forces d'inertie suivant la tangente et la normale à $M'M'_1$ en M', on a

$$\frac{dT'}{ds'} + F'_t + \varphi'_t = 0, \tag{16}$$

$$\frac{T'}{\rho'} + F'_n + \varphi'_n = 0, \tag{17}$$

s' et ρ' étant l'arc et le rayon de courbure correspondant au point M' dans la courbe $M'M'_1$.

Prenons pour axes α et γ la tangente et la normale en M à la courbe de repos apparent et posons

$$T' = T + T_1; \tag{18}$$

on a évidemment

$$\frac{ds'}{\rho'} = \frac{ds}{\rho} + d\omega, \tag{19}$$

ω étant l'angle de la tangente en M' avec la tangente en M.

D'un autre côté, si du point M'_1 on abaisse la perpendiculaire $M'_1 m'_1$ sur la droite $M' m'_1$ parallèle à la tangente en M, on a

$$M'_1 m'_1 = ds' \sin\omega;$$

or, si l'on projette M' en P sur la tangente en M et M'_1 en P_1 sur la tangente en M_1, on peut regarder $M'_1 m'_1$ comme la projection sur l'axe $M\gamma$ du chemin $M'_1 P_1 M_1 P M'$, et l'on trouve

$$M'_1 m_1 = d\gamma + \alpha \frac{ds}{\rho}.$$

La corde étant inextensible, c'est-à-dire ds' étant égal à ds, on déduit des deux équations précédentes, en remarquant que ω est petit,

$$\omega = \frac{d\gamma}{ds} + \frac{\alpha}{\rho}. \tag{20}$$

Cela posé, la considération du triangle $M'_1 m'_1 M'$ donne

$$M'm'_1 = ds + d\alpha - \gamma \frac{ds}{\rho},$$

et, comme $M'm'_1$ ne diffère de ds que d'une quantité très petite, puisque l'angle ω est lui-même petit, on a

$$(21) \qquad \frac{d\alpha}{ds} - \frac{\gamma}{\rho} = 0,$$

qui est l'une des équations auxquelles nous sommes arrivés par la méthode précédente.

Représentons maintenant par A' et C' les composantes suivant $M\alpha$ et $M\gamma$ de la force extérieure agissant sur M'; on aura

$$F'_t = \quad A'\cos\omega + C'\sin\omega = A' + C'\left(\frac{d\gamma}{ds} + \frac{\alpha}{\rho}\right),$$

$$F'_n = -A'\sin\omega + C'\cos\omega = -A'\left(\frac{d\gamma}{ds} + \frac{\alpha}{\rho}\right) + C'.$$

De même

$$\varphi'_t = \varphi'_\alpha + \varphi'_\gamma\left(\frac{d\gamma}{ds} + \frac{\alpha}{\rho}\right),$$

$$\varphi'_n = -\varphi'_\alpha\left(\frac{d\gamma}{ds} + \frac{\alpha}{\rho}\right) + \varphi'_\gamma,$$

et il suffit de calculer φ'_α et φ'_γ.

Pour trouver les valeurs des composantes suivant $M\alpha$ et $M\gamma$ de l'accélération du point M', on regardera le mouvement de ce point comme résultant d'un mouvement relatif par rapport aux axes en question et du mouvement d'entraînement de ces mêmes axes. Il faudra donc, d'après la théorie connue, calculer successivement l'accélération relative, l'accélération du point M', supposé fixe par rapport aux axes mobiles, et enfin l'accélération centrifuge composée.

L'accélération relative a évidemment pour composantes, suivant $M\alpha$ et $M\gamma$, $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ et $\frac{d^2\gamma}{dt^2}$. Quant à l'accélération d'entraînement, ses composantes suivant la tangente et la normale à la trajectoire de M' dans le mouvement d'entraînement sont $\frac{dV'_1}{dt}$ et $\frac{V'^2_1}{r'_1}$, V'_1 et r'_1 étant la vitesse de M' dans ce mouvement et le rayon de courbure de la trajectoire dont il s'agit.

Mais le mouvement d'entraînement élémentaire est une rotation autour du centre instantané de rotation C de la courbe de repos apparent; la vitesse angulaire de cette rotation est $\frac{V}{\rho}$; la distance du point M' à C est $\rho - \gamma$, puisque les quantités α et γ sont petites: on a donc

$$V'_1 = \frac{\rho - \gamma}{\rho} V.$$

On en déduit

$$\frac{dV'_1}{dt} = -V^2 \gamma \frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{ds},$$

car γ est constant, puisqu'il s'agit du mouvement d'entraînement.

Quant à la composante normale $\frac{V'^2_1}{r'_1}$, il faut, pour l'obtenir, calculer r'_1.

Or, si l'on désigne par C' le centre de courbure de la trajectoire d'entraînement en M', on a, au degré d'approximation adopté,

$$r'_1 = \rho - \gamma + CC'$$

et

$$\frac{CC'}{CM'} = \frac{Cp}{M'M'_1 - Cp},$$

Cp étant perpendiculaire à CM'.

On trouve aisément

$$Cp = d\rho \frac{\alpha}{\rho - \gamma},$$

$$M'M'_1 = ds \frac{\rho - \gamma}{\rho};$$

on en conclut

$$CC' = \alpha \frac{d\rho}{ds},$$

et par suite

$$r'_1 = \rho\left(1 - \frac{\gamma}{\rho} + \frac{\alpha}{\rho}\frac{d\rho}{ds}\right).$$

De là résulte

$$\frac{V_1'^2}{r_1'} = \frac{V^2}{\rho}\left(1 - \frac{\gamma}{\rho}\right)^2 \frac{1}{1 - \frac{\gamma}{\rho} + \frac{\alpha}{\rho}\frac{d\rho}{ds}} = \frac{V^2}{\rho}\left(1 - \frac{\gamma}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho}\frac{d\rho}{ds}\right).$$

Les composantes de l'accélération d'entraînement suivant les axes $M\alpha$ et $M\gamma$ seront alors, en désignant par φ l'angle MCM',

$$\frac{dV_1'}{dt}\cos\varphi - \frac{V_1'^2}{r_1'}\sin\varphi = \frac{dV_1'}{dt} - \frac{V_1'^2}{r_1'}\frac{\alpha}{\rho - \gamma} = -V^2\gamma\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{ds} - \frac{V^2}{\rho^2}\alpha,$$

$$\frac{dV_1'}{dt}\sin\varphi + \frac{V_1'^2}{r_1'}\cos\varphi = \frac{dV_1'}{dt}\frac{\alpha}{\rho - \gamma} + \frac{V_1'^2}{r_1'} = \frac{V^2}{\rho} - \gamma\frac{V^2}{\rho^2} + \alpha V^2\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{ds}.$$

Quant aux composantes de l'accélération centrifuge composée suivant $M\alpha$ et $M\gamma$, elles sont évidemment $2\frac{V}{\rho}\frac{d\gamma}{dt}$ et $-2\frac{V}{\rho}\frac{d\alpha}{dt}$.

On a donc

$$\varphi_\alpha' = \frac{d^2\alpha}{dt^2} - 2\frac{V}{\rho}\frac{d\gamma}{dt} - \alpha\frac{V^2}{\rho^2} - \gamma V^2\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{ds},$$

$$\varphi_\gamma' = \frac{d^2\gamma}{dt^2} + 2\frac{V}{\rho}\frac{d\alpha}{dt} - \gamma\frac{V^2}{\rho^2} + \alpha V^2\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{ds} + \frac{V^2}{\rho}.$$

En portant alors ces valeurs dans φ_t' et φ_n', remplaçant dans les équations (16) et (17) F_t', F_n', φ_t' et φ_n' par les expressions qui les représentent, tenant compte des équations du mouvement permanent de la corde

$$\frac{dT}{ds} + A = 0,$$

$$\frac{T}{\rho} + C - \frac{V^2}{\rho} = 0,$$

posant comme précédemment

$$A' = A + A_1,$$

$$C' = C + C_1,$$

et se rappelant les relations

$$S + Vt = \sigma,$$
$$\frac{d\alpha}{d\sigma} - \frac{\gamma}{\rho} = 0,$$
$$\frac{d\gamma}{d\sigma} + \frac{\alpha}{\rho} = \omega,$$
$$T - V^2 = \mathfrak{T},$$

on trouve, toutes simplifications faites,

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = A_1 - \mathfrak{T}\frac{\omega}{\rho} + \frac{dT_1}{d\sigma},$$
$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = C_1 + \frac{d(\mathfrak{T}\omega)}{d\sigma} - 2V\frac{d\omega}{dt} + \frac{T_1}{\rho},$$

qui sont identiques à celles que nous avons obtenues comme cas particulier de la question générale.