

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. DE SAINT-GERMAIN

Sur le parallélogramme de Watt

Journal de mathématiques pures et appliquées 3^e série, tome 6 (1880), p. 19-26.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1880_3_6_19_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Sur le parallélogramme de Watt ;***PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN,**

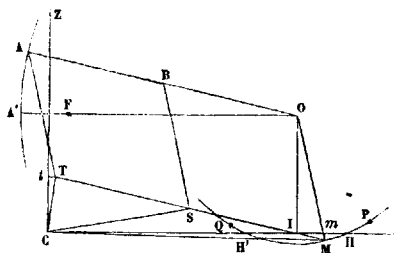
Professeur à la Faculté des Sciences de Caen.

Considérons un balancier relié à la tige d'un piston par un parallélogramme articulé, et supposons aux diverses pièces du mécanisme les dimensions relatives que Watt avait adoptées et qu'on doit toujours rechercher. On peut très facilement, à l'aide d'une remarque simple, calculer la déviation de l'extrémité de la tige, et démontrer les règles que M. Tchebicheff a déduites d'une analyse générale, et qui permettent de réduire la déviation de près des deux tiers. Prony a calculé la déviation dans un cas particulier, mais les données dont il s'est servi sont rapportées dans plusieurs Ouvrages de manière à rendre le résultat inexact; je préciserai les éléments de ce calcul numérique. Quant aux dispositions indiquées par M. Tchebicheff, elles devraient être adoptées dans la pratique, puisqu'elles augmentent la précision de l'ingénieux appareil de Watt sans en compliquer la construction.

Soient, à un instant quelconque, OA le balancier, mobile autour de son centre O, T l'extrémité de la tige du piston, CS le contre-balancier qui joint le point fixe C au sommet S du parallélogramme articulé ABST, CZ une verticale suivant laquelle on voudrait guider le point T. Si l'on prolonge le côté TS d'une longueur égale SM, le point M sera sur un cercle ayant O pour centre et AT ou BS pour rayon; ce cercle est coupé en H et H' par l'horizontale du point C.

Désignons (*fig. 1*) par a les longueurs OB , BA , CS , que Watt prenait égales entre elles, par R le rayon $OM = AT$, par x l'angle de OM

Fig. 1.



avec la verticale OI , par α les angles HOI , $H'OI$, enfin par θ la demi-amplitude d'oscillation du balancier OA .

Menons les droites CM et CT . Je puis remarquer que le triangle TCM est rectangle en C , parce que la médiane CS est égale à la moitié du côté $TM = 2a$; si donc des points M et T j'abaisse Mm , Tt perpendiculaires, la première sur CH , la seconde sur CZ , les triangles TCt , Mm seront semblables, et l'on aura pour la déviation

$$(1) \quad \delta = Tt = \frac{CT}{CM} Mm.$$

On peut, presque en toute rigueur, prendre Cm pour CM , et écrire

$$(2) \quad \begin{cases} CM = CI + R \sin x, \\ CT = \sqrt{4a^2 - (CI + R \sin x)^2}, \\ Mm = R(\cos x - \cos \alpha). \end{cases}$$

Quand le balancier exécute une oscillation, l'extrémité A décrit un arc de cercle dont la flèche est l'horizontale $A'F$; nous supposons d'abord, avec Watt, que CZ soit perpendiculaire au milieu de $A'F$, et que, lorsque le balancier est dirigé suivant OA' , le point T coïncide avec C , et TM avec CH ; dans ce cas,

$$CI = 2a - R \sin \alpha;$$

les valeurs de CM et de CT deviennent

$$\begin{aligned} \text{CM} &= 2a - R(\sin \alpha - \sin x), \\ \text{CT} &= \sqrt{R(\sin \alpha - \sin x)[4a - R(\sin \alpha - \sin x)]}, \end{aligned}$$

et, en les substituant, ainsi que celle de Mm, dans l'équation (1), il vient

$$(3) \quad \delta = \frac{R(\cos x - \cos \alpha) \sqrt{R(\sin \alpha - \sin x)[4a - R(\sin \alpha - \sin x)]}}{2a - R(\sin \alpha - \sin x)}.$$

Dans la pratique, $R(\sin \alpha - \sin x)$ est beaucoup plus petit que $2a$, et l'on peut prendre pour valeur approchée de la déviation

$$\delta = (\cos x - \cos \alpha) \sqrt{\sin \alpha - \sin x} \sqrt{\frac{R^3}{a}}.$$

Supposons que le balancier OA s'élève à partir de sa position moyenne pour accomplir une demi-oscillation; AT, d'abord parallèle à OH, se rapproche de la direction verticale pour la dépasser et finit par devenir parallèle à OH', x varie de α à $-\alpha$; pour chercher le maximum de δ , j'y remplace les sinus et cosinus par les premiers termes de leurs développements en série, et je considère le carré de la partie variable de δ , soit

$$\varepsilon = \frac{1}{4}(\alpha^2 - x^2)^2(\alpha - x) = \frac{1}{4}(\alpha - x)^3(\alpha + x)^2.$$

Pour $x = -\frac{\alpha}{5}$, ε atteint son maximum $4 \times 6^3 \left(\frac{\alpha}{5}\right)^5$; la déviation correspondante est

$$\delta_1 = \frac{12}{25} R \alpha^2 \sqrt{\frac{6R\alpha}{5a}};$$

mais on voit facilement que HH' est égal à la flèche A'F,

$$2R \sin \alpha = 2a(1 - \cos \theta) = 4a \sin^2 \frac{1}{2} \theta;$$

on en conclut la valeur de $R \sin \alpha$, qui est sensiblement égale à $R\alpha$, et,

en substituant dans δ_1 , on a pour valeur approchée de la déviation maximum

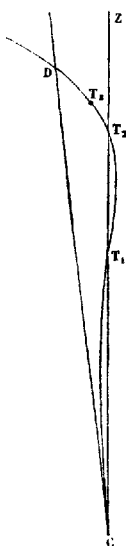
$$(4) \quad \delta_1 = \frac{96}{25} \frac{a^2}{R} \sqrt{\frac{3}{5}} \sin^3 \frac{1}{2} \theta = 2,974 \frac{a^2}{R} \sin^3 \frac{1}{2} \theta.$$

Dans l'exemple numérique dont j'ai parlé, on donne 2^m,515 pour la longueur du balancier, 0^m,762 pour les côtés AT, BS, et 35° 11' pour l'amplitude d'oscillation; si ces nombres représentent les quantités désignées par 2a, R, 2θ, la formule (4) donne pour déviation maximum 0^m,000516; pour que la déviation fût de 2^{mm}, comme l'indique Prony, il faudrait que 2^m,515 représentât OB = a, et non OA, ce qui donnerait au parallélogramme une forme plus allongée que celle que Watt adoptait. Avec les données que je prends, α est égal à 0,077, ou à 4° 26'; et si l'on se sert de la formule (3) pour calculer δ₁, on trouve pour cette déviation une valeur supérieure de $\frac{1}{48}$ à celle que donne l'équation (4), soit δ₁ = 0,000527.

Cherchons maintenant si, en conservant l'égalité des droites OB, BA, CS, on n'aurait pas quelque avantage à placer CZ un peu plus près du point O que ne le faisait Watt. Dans ce cas, quand le côté TS coïncidera avec CS, le point M devra aller sur le cercle O jusqu'à une position P à droite de H, et telle que CP = 2a; alors le balancier, toujours parallèle à TM, ne sera pas exactement dans sa position moyenne, mais fera avec l'horizon un très petit angle. Supposons qu'à partir de cette époque l'extrémité A s'élève; l'articulation S s'élèvera aussi, et le point M se déplacera sur son arc de cercle à gauche de P; la relation (1) étant toujours vraie, on voit que la déviation, nulle quand M est en P, se fait d'abord à gauche de CZ, redevient nulle quand M passe en H, puis a lieu à droite de CZ, pour s'annuler une troisième fois quand M arrivera en H'. Cela montre comment CZ doit être placée par rapport à la trajectoire du point T, qui est, on le sait, une courbe à longue inflexion; l'arc décrit par T dans son mouvement ascendant passe à droite de la tangente d'inflexion CD, pour venir la traverser au point D, après avoir subi une seconde inflexion; il faut donc que CZ soit dirigé un peu à droite de CD, de manière à couper l'arc aux trois points C, T₁, T₂, qui seront les positions du point T quand M sera en P, H et H'. La figure montre clairement que, pour restreindre autant que possible la distance de T

à la droite CZ, celle-ci doit être dirigée de manière que le maximum d'écart pendant le parcours de l'arc CT ait la même valeur absolue, δ_1 , que lorsque T va de T_1 en T_2 . Quand T atteint cette dernière position, on peut supposer que la demi-oscillation du balancier soit ter-

Fig. 2.



minée, la déviation étant rigoureusement nulle ; mais il est plus rationnel de prolonger un peu l'excursion du balancier de manière que T vienne en T_3 (*fig. 2*), à la distance δ , de CZ; M sera alors en Q à gauche de H'.

Faisons $POI = \varphi$, $QOI = \psi$.

Les équations (2) sont encore vraies ; mais, p étant la projection de P sur CH, on peut prendre sans erreur appréciable $CP = Cp$, et l'on a

$$CI = CP - Ip = 2a - R \sin \varphi.$$

En substituant cette valeur dans les équations (2), comme nous avons fait dans le premier cas, on trouvera pour la déviation

$$\delta = \frac{R(\cos x - \cos \alpha) \sqrt{R(\sin \varphi - \sin x) [4a - R(\sin \varphi - \sin x)]}}{2a - R(\sin \varphi - \sin x)}.$$

Nous considérerons encore la valeur approchée

$$\delta = (\cos x - \cos \alpha) \sqrt{\sin \varphi - \sin x} \sqrt{\frac{R^2}{a}};$$

je remplace les sinus et cosinus par les premiers termes de leurs développements en série, et je considère le carré du résultat de cette substitution,

$$(5) \quad \varepsilon = \frac{1}{4} (\alpha^2 - x^2)^2 (\varphi - x);$$

cette quantité, qui augmente et diminue en même temps que δ , est maximum quand x satisfait à l'équation

$$5x^2 - 4\varphi x - \alpha^2 = 0.$$

Si l'on élimine x entre cette équation et la précédente, l'équation résultante a pour racines les maxima de ε :

$$(6) \quad \begin{cases} (140\alpha^4\varphi + 4\alpha^2\varphi^3 - 625\varepsilon)^2 \\ = 16(25\alpha^4 + 15\alpha^2\varphi^2 - 4\varphi^4)(5\alpha^6 + 31\alpha^4\varphi^2 - 125\varphi\varepsilon). \end{cases}$$

Nous avons vu que les deux valeurs maxima de δ doivent être égales; pour exprimer que les racines de l'équation précédente sont aussi égales, j'écris qu'elle a une racine commune avec son équation dérivée; l'élimination de ε donne lieu à un calcul plus court que si l'on applique la condition d'égalité des racines de l'équation du second degré, et le résultant peut se mettre sous la forme très simple

$$(5\alpha^2 - \varphi^2)^2 (5\alpha^2 + 4\varphi^2)^3 = 0.$$

Il faut donc prendre $\varphi^2 = 5\alpha^2$, $\varphi = \alpha\sqrt{5}$, pour que les valeurs maxima de ε , et par suite celles de δ , soient égales; l'équation (6) admet alors pour racine double

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{2\varphi}{5}\right)^3 = \frac{32\alpha^3}{25\sqrt{5}}.$$

la déviation correspondante est

$$(7) \quad \delta_1 = \left(\frac{2\varphi}{5}\right)^{\frac{5}{2}} \sqrt{\frac{R^2}{a}}.$$

Reste à chercher la position du point Q, ce qui revient à calculer la valeur de x immédiatement inférieure à $-\alpha$ pour laquelle $\varepsilon = \varepsilon_1$; on aura, en remplaçant dans l'équation (5) φ par $\alpha\sqrt{5}$, et ε par ε_1 ,

$$\frac{32\alpha^2}{25\sqrt{5}} = \frac{1}{4}(x^2 - \alpha^2)^2(\alpha\sqrt{5} - x);$$

on trouve, par approximations successives, $x = -1,341$, $\alpha = -0,600\varphi$; ψ est très sensiblement les $\frac{2}{5}$ de φ . Si donc q est la projection de Q sur CH, les segments Ip, Iq sont dans le rapport de 5 à 3; or les déplacements horizontaux des points A et M sont presque égaux, et, quand M est sur la verticale OI, A est très près de CZ; cette droite divise donc la flèche A'F dans le rapport de 5 à 3, le plus grand segment se terminant en A': c'est le résultat indiqué par M. Tchébicheff.

Pour exprimer δ_1 en fonction des données de la question, écrivons que AF = pq, ou sensiblement R($\varphi + \psi$):

$$R(\varphi + \psi) = \frac{8}{5}R\varphi = 4\alpha \sin^2 \frac{1}{2}\psi;$$

substituant la valeur de φ dans (7), on trouve pour la déviation maximum

$$\delta_1 = \frac{\alpha^2}{R} \sin^5 \frac{1}{2}\psi;$$

en comparant avec la formule (4), on voit qu'avec la modification que nous avons justifiée la déviation est à peu près diminuée des deux tiers de sa première valeur.

La construction du parallélogramme articulé ne sera guère compliquée par les règles précédentes; on tracera la corde et la flèche de l'arc que l'on veut faire décrire à l'extrémité du balancier; la droite que doit suivre la tige du piston sera menée parallèlement à la corde à une distance égale aux $\frac{2}{5}$ de la flèche; enfin, pour placer le point d'at-

tache C du contrebalancier, on décrira du point A' comme centre, avec AT pour rayon, un arc de cercle qui coupera CZ en un point C'; C sera au-dessous de C' à une distance égale à Pp, qu'on pourrait négliger, mais dont la grandeur est sensiblement

$$R(\cos \alpha - \cos \varphi) = \frac{2}{5} R \varphi^2 = \frac{5a^2}{2R} \sin^4 \frac{1}{2} \theta = \frac{5}{32} \frac{A'F^2}{R};$$

avec les données numériques que nous avons considérées, cette longueur serait de 0^m,0025, et on peut toujours la construire graphiquement.