JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DAVID

Sur la transformation des fonctions Θ

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 6 (1880), p. 187-214.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1880_3_6__187_0>

Sur la transformation des fonctions Θ;

Par M. DAVID.

Dans le *Journal de Mathématiques* (année 1858), M. Hermite, comprenant les quatre fonctions θ dans une seule formule, a résolu le problème de leur transformation. Toute fonction intermédiaire (¹) pouvant s'exprimer par l'une des fonctions θ, le problème de cette transformation est complètement résolu, au point de vue théorique du moins. Si je reviens sur ce sujet (et il ne s'agit ici que des fonctions du premier ordre), c'est que, tout en considérant immédiatement la question d'une manière générale, l'on obtient en même temps des formules plus simples et plus symétriques. J'ai d'ailleurs à donner la somme d'une série qui est analogue à celle considérée par Gauss dans son Mémoire sur certaines séries singulières, qui comprend quelquefois cette série, et qui est souvent plus générale; et ces deux questions sont liées dans l'analyse suivante, de telle sorte qu'elles ne peuvent être séparées.

I. Toute fonction intermédiaire du premier ordre pouvant être définie à un facteur constant près par la formule

$$e^{\pi i(az^2+2bz)} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}[2m(z-c)+m^2\omega']},$$

(¹) Je me sers ici de la dénomination de *fonctions intermédiaires* donnée par MM. Briot et Bouquet (page 236 de la *Théorie des fonctions elliptiques*) à la classe des fonctions dont les quotients expriment les fonctions doublement périodiques.

on trouve pour la transformation du premier degré, c'est-à-dire pour celle dans laquelle, les nouvelles périodes étant désignées par

$$(1) \qquad \Omega = p\omega + q\omega', \quad \Omega' = r\omega + s\omega',$$

on a entre les nombres entiers p, q, r, s la relation

$$(2) \qquad ps - qr = 1;$$

on trouve, dis-je, pour cette transformation l'équation

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\omega}} e^{\pi i(az^2+2bz)} \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}[2m(z-C)+m^2\omega']} \\ \qquad = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\Omega}} e^{\pi i\left[Az^2+2Bz-\frac{(b-B)^2}{a-A}\right]} \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} e^{\frac{\pi i}{\Omega}[2m(z-C)+m^2\Omega']}, \end{cases}$$

que l'on peut écrire d'une manière plus abrégée, et sans réduire la question, en remplaçant $a - A$ par a et $b - B$ par b,

$$\frac{1}{\sqrt{\omega}} e^{a\pi i\left(z+\frac{b}{a}\right)^2} \sum e^{\frac{\pi i}{\omega}[2m(z-c)+m^2\omega']} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\Omega}} \sum e^{\frac{\pi i}{\Omega}[2m(z-C)+m^2\Omega']}.$$

Cependant nous emploierons de préférence l'équation (3) à cause de la symétrie qu'elle présente et qui doit s'étendre aux formules de la transformation.

Ces formules sont les suivantes :

$$(4) \qquad \begin{cases} a - A = \dfrac{q}{\omega\Omega}, \\ c(a - A) + b - B = -\dfrac{pq + 2K}{2\Omega}, \\ c - C = -(sr + 2H)\dfrac{\Omega}{2} + (pq + 2K)\dfrac{\Omega'}{2}, \end{cases}$$

les nombres entiers H et K étant tout à fait arbitraires; ou bien encore

$$(4\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} &a - A = \frac{q}{\omega\Omega},\\ &C(a - A) + b - B = -\frac{qs - 2k}{2\omega},\\ &c - C = -(pr - 2h)\frac{\omega}{2} + (sq - 2k)\frac{\omega'}{2}. \end{aligned}\right.$$

Les premières servent à la transformation du premier membre dans le second; les secondes à la transformation du second membre dans le premier. La symétrie est complète, ainsi qu'on va le voir. Si l'on résoud les équations (1) par rapport à ω et ω', il vient

$$(5)\qquad \omega = s\Omega - q\Omega', \quad \omega' = -r\Omega + p\Omega',$$

et, si on les compare aux équations (1), on voit qu'on passe des unes aux autres par le changement de p, q, r, s en s, $-q$, $-r$, p. Si l'on désigne en outre par k et h les nombres entiers analogues à K et H, on passera de l'une des transformations à l'autre par le changement des quantités

$$\omega,\ \omega',\ p,\ q,\ r,\ s,\ a,\ b,\ c,\ h,\ k,$$

dans les quantités

$$\Omega,\ \Omega',\ s,\ -q,\ -r,\ p,\ A,\ B,\ C,\ H,\ K.$$

Il est clair d'ailleurs que les formules (4) et (4 *bis*) doivent être identiques; il en résulte les relations

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &p(sr + 2H) - r(pq + 2K) = pr - 2h,\\ &q(sr + 2H) - s(pq + 2K) = -sq + 2k, \end{aligned}\right.$$

ou, ce qui revient au même,

$$(6\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} &sr + 2H = s(pr - 2h) + r(sq - 2k),\\ &pq + 2K = q(pr - 2h) + p(sq - 2k). \end{aligned}\right.$$

L'introduction des nombres h, k, H, K présente cet avantage, qu'on peut toujours en disposer pour que les quantités c et C soient comprises dans les parallélogrammes (ω, ω') et (Ω, Ω').

Quant à la quantité ε, il y a plusieurs cas à distinguer.

1° La partie imaginaire de $\frac{q}{\omega\Omega}$ étant positive,

$$(7)\quad \begin{cases} q \text{ impair}, & \varepsilon = e^{-\mathrm{K}s\left(r-p-\frac{\mathrm{K}}{q}\right)\pi i}\, e^{\frac{q\pi i}{4}} \left(\dfrac{p}{q}\right), \\ q = 2^{2n+1}\beta, & \varepsilon = e^{-\mathrm{K}s\left(r-p-\frac{\mathrm{K}}{q}\right)\pi i}\, e^{\frac{\pi i}{4}\left[pq+\frac{3(p\beta+1)^2+(\beta+1)^2}{2}\right]} \left(\dfrac{p}{\beta}\right), \\ q = 2^{2n}\beta, & \varepsilon = e^{-\mathrm{K}s\left(r-p-\frac{\mathrm{K}}{q}\right)\pi i}\, e^{\frac{\pi i}{4}\left[pq+\frac{3(p\beta+1)^2+(\beta+1)^2+p^2-1}{2}\right]} \left(\dfrac{p}{\beta}\right). \end{cases}$$

2° La portion imaginaire de $\frac{q}{\omega\Omega}$ étant négative,

$$(8)\quad \begin{cases} q \text{ impair}, & \varepsilon = e^{-kp\left(r+s-\frac{k}{q}\right)\pi i}\, e^{\frac{q\pi i}{4}} \left(\dfrac{p}{q}\right), \\ q = 2^{2n+1}\beta, & \varepsilon = e^{-kp\left(r+s-\frac{k}{q}\right)\pi i}\, e^{-\frac{\pi i}{4}\left[-sq+\frac{3(s\beta-1)^2+(\beta-1)^2}{2}\right]} \left(\dfrac{p}{\beta}\right), \\ q = 2^{2n}\beta, & \varepsilon = e^{-kp\left(r+s-\frac{k}{q}\right)\pi i}\, e^{-\frac{\pi i}{4}\left[-sq+\frac{3(s\beta-1)^2+(\beta-1)^2+s^2-1}{2}\right]} \left(\dfrac{p}{\beta}\right). \end{cases}$$

Le symbole $\left(\frac{p}{q}\right)$ est celui de la théorie des résidus quadratiques étendu au cas où les nombres p et q sont composés et premiers entre eux, q étant impair, et les deux termes du symbole pouvant être positifs ou négatifs. Toutefois il y a lieu de remarquer que, s'ils sont tous deux négatifs, la loi de réciprocité n'est plus applicable; mais il est toujours facile de transformer le symbole en un autre dans lequel un des termes seulement serait négatif, ou mieux encore en un autre dont les deux termes seraient positifs.

On a encore la transformation du premier degré avec la relation

$$(9)\qquad ps - qr = -1.$$

Alors, au lieu de l'équation (3), il vient l'équation

$$(3\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{\omega}} e^{\pi i(az^2+2bz)} \sum e^{\frac{\pi i}{\omega}[2m(z-c)+m^2\omega']} \\ &\quad = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\Omega}} e^{\pi i\left[Az^2+2Bz-\frac{(b-B)^2}{a-A}\right]} \sum e^{-\frac{\pi i}{\Omega}[2m(z-C)+m^2\Omega']}, \end{aligned}\right.$$

et il faut, dans les formules (4), (4 *bis*), (6), (6 *bis*), (7), (8), changer r, s, Ω' en $-r$, $-s$, $-\Omega'$.

Le cas de $ps - qr = 1$ correspond aux fonctions θ et le cas de $ps - qr = -1$ correspond aux fonctions ϑ de Jacobi.

Les formules précédentes donnent la somme de la série

$$(10)\qquad U = \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} e^{\rho\left(p+\frac{2K}{q}\right)\pi i+\rho^2\frac{p\pi i}{q}},$$

au moyen de la formule

$$(11)\qquad U = \sqrt{iq}\,\varepsilon,$$

la quantité ε étant déterminée par les formules (7), dans lesquelles on change K en $-K$ et q en $-q$, les nombres r et s étant une des solutions de l'équation $ps - qr = 1$, et les nombres donnés p et q étant premiers entre eux. Si l'on représente la série (10) par la formule

$$(12)\qquad U = \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} e^{(\rho m+\rho^2 p)\frac{\pi i}{q}},$$

on dira que la somme est donnée par la formule (11) quand, p et q étant premiers entre eux, les nombres m et pq sont de même parité.

Lorsqu'on fait $K = 0$, on a la série

$$(13)\qquad U = \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} e^{\rho p\pi i+\rho^2\frac{p\pi i}{q}},$$

dont la somme a été donnée par M. Hermite, dans le Mémoire cité, sans démonstration. Lorsqu'on y suppose p pair, cette série se confond avec celle de Gauss

$$(14)\qquad U = \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} e^{\rho^2 \frac{2h\pi i}{q}},$$

où l'on suppose h et q premiers entre eux (attendu que, si ces nombres ont un plus grand commun diviseur, ce cas se ramène immédiatement à celui dont il est question). Elle ne comprend une série nouvelle que dans le cas de p impair; on peut l'écrire alors

$$(15)\qquad U = 1 - e^{\frac{q\pi i}{q}} + e^{2^2\frac{p\pi i}{q}} - \ldots \pm e^{(q-1)^2\frac{p\pi i}{q}},$$

le signe + étant relatif au cas de q impair, et le signe — au cas de q pair. Lorsque dans la série (10) on suppose p pair, il faut, d'après les conditions énoncées, supposer q impair, tandis que cette condition n'est point nécessaire pour la série (13). A ce point de vue, la série (10) ne comprend donc pas complètement la série de M. Hermite et par suite celle de Gauss. Lorsque p est impair, la série (10) ou, ce qui revient au même, la série (12), comprend bien la série (15) considérée par M. Hermite; mais, les nombres m et pq n'étant pas nécessairement de même parité, on ne peut pas toujours employer la solution de la formule (11).

Dans le *Journal de Mathématiques* (t. XII), Lebesgue a introduit une nouvelle série de ce genre

$$(16)\qquad U = \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} e^{\frac{\rho^2+\rho}{2}\frac{2h\pi i}{q}},$$

dans laquelle il suppose h et q premiers entre eux. Ce n'est un cas particulier de la série (10) que lorsque p est pair ou q impair.

D'ailleurs les séries de Lebesgue ou de M. Hermite se déduisent avec facilité de la série de Gauss. Je détermine les unes et les autres par des formules analogues à celles que M. Hermite a employées pour exprimer la série (13). (Voir § V.)

La série nouvelle que j'examine est donc à la fois plus et moins générale que celles dont il vient d'être question. Mais elle ne s'y ramène que par une marche bien différente et qui est liée étroitement à la transformation du premier degré des fonctions intermédiaires du premier ordre. Elle échappe à cette analyse quand les nombres m et pq de la formule (12) ne sont pas de même parité; il semble que la solution dépend alors de la transformation de degré supérieur. Si cette restriction, que les nombres m et pq doivent être de même parité, pouvait être écartée, la série (10) comprendrait toutes les séries examinées antérieurement.

Je passe à la démonstration des différentes formules ci-dessus.

II. Une fonction intermédiaire, ayant été représentée, abstraction faite d'un facteur constant, par la formule

$$(17)\qquad f(z) = e^{\pi i(az^2+2bz)} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}[2m(z-c)+m^2\omega']},$$

peut aussi être représentée d'une manière analogue en se servant d'autres périodes déterminées par les équations (1) et (2); et elle s'exprime alors, toujours abstraction faite du facteur constant, par

$$(18)\qquad f(z) = e^{\pi i(Az^2+2Bz)} \sum e^{\frac{\pi i}{\Omega}[2m(z-C)+m^2\Omega']}.$$

Il est facile en effet de voir que la partie imaginaire du rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ étant positive, ce qui est la condition pour que la première série soit convergente, la partie imaginaire du rapport $\frac{\Omega'}{\Omega}$ est aussi positive si $ps - qr = 1$, ce qui rend la deuxième série aussi convergente. C'est le contraire qui a lieu, si $ps - qr = -1$; et c'est pour cela que dans l'équation (3 *bis*) le rapport $\frac{\Omega'}{\Omega}$ est remplacé par le rapport $-\frac{\Omega'}{\Omega}$. Sous le bénéfice de cette observation et des indications données au § I, nous n'aurons pas à revenir sur la transformation relative au cas de $ps - qr = -1$.

La première question à résoudre est de trouver des relations entre les constantes a, b, c et A, B, C, pour que les deux formules (17) et (18) soient identiques, abstraction faite du facteur constant.

On sait que toute fonction intermédiaire satisfait à des relations telles que

$$f(z+\omega) = e^{az+b} f(z),$$
$$f(z+\omega') = e^{a'z+b'} f(z),$$

pourvu qu'on ait entre les quantités a et a' la relation

$$a\omega' - a'\omega = 2n\pi i,$$

n étant un nombre entier désignant l'ordre de la fonction. Dans le cas actuel, la fonction est du premier ordre, et l'on a $n=1$. Il s'agit de former ces relations pour les formules (17) et (18).

En remplaçant, dans la formule (17), r par $r+\Omega$, elle devient

$$f(z+\Omega) = e^{\pi i[a(z+\Omega)^2+2b(z+\Omega)]} \sum e^{\frac{\pi i}{\omega}[2m(z-c)+2mp\omega+2mq\omega'+m^2\omega']}.$$

On peut, dans la quantité sous le signe Σ qui a pour facteur $\frac{\pi i}{\omega}$, faire abstraction de $2mp\omega$; car, quel que soit m, on a $e^{2m\pi i}=1$. Cette expression peut ensuite s'écrire

$$2(m+q)(z-c) + (m+q)^2\omega' - 2q(z-c) - q^2\omega'.$$

Pour former la série, il faut donner à m toutes les valeurs entières depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$; on obtient évidemment le même résultat en donnant ces valeurs entières à $m+q$. Le Σ de la formule précédente peut donc être remplacé par

$$e^{-\frac{\pi i}{\omega}[2q(z-c)+q^2\omega']} \sum e^{\frac{\pi i}{\omega}[2m(z-c)+m^2\omega']}.$$

On en conclut que la fonction $f(z)$ satisfait à la relation

$$f(z+\Omega) = e^{\pi i\left[2\left(a\Omega-\frac{q}{\omega}\right)z+a\Omega^2+2b\Omega-q^2\frac{\omega'}{\omega}+2q\frac{c}{\omega}\right]} f(z),$$

qui est relative à la période Ω. Elle satisfait de même à la relation

$$f(z+\Omega') = e^{\pi i\left[2\left(a\Omega'-\frac{s}{\omega}\right)z+a\Omega'^2+2b\Omega'-s^2\frac{\omega'}{\omega}+2s\frac{c}{\omega}\right]} f(z),$$

qui est relative à la période Ω'.

On trouve plus facilement encore les deux relations relatives à la formule (18),

$$f(z+\Omega) = e^{\pi i(2A\Omega z + A\Omega^2 + 2B\Omega)} f(z),$$
$$f(z+\Omega') = e^{\pi i\left[2\left(A\Omega' - \frac{1}{\Omega}\right)z + A\Omega'^2 - \frac{\Omega'}{\Omega} + 2B\Omega' + 2\frac{C}{\Omega}\right]} f(z).$$

La comparaison des relations précédentes conduit aux équations suivantes, qui, en y ajoutant les équations (5), vont servir à la détermination des quantités A, B, C :

$$(19) \qquad A\Omega = a\Omega - \frac{q}{\omega},$$

$$(20) \qquad A\Omega' - \frac{1}{\Omega} = a\Omega' - \frac{s}{\omega},$$

$$(21) \qquad A\Omega^2 + 2B\Omega = a\Omega^2 + 2b\Omega - q^2\frac{\omega'}{\omega} + 2q\frac{c}{\omega} + 2K,$$

$$(22) \qquad A\Omega'^2 - \frac{\Omega'}{\Omega} + 2B\Omega' + 2\frac{C}{\Omega} = a\Omega'^2 + 2b\Omega' - s^2\frac{\omega'}{\omega} + 2s\frac{c}{\omega} + 2H.$$

Il y a quatre équations et trois inconnues; les relations (5) mettent de suite en évidence l'identité des équations (19) et (20).

Substituant la valeur de A tirée de l'équation (19) dans l'équation (21), puis cette même valeur de A tirée de l'équation (20) dans l'équation (22), les trois équations sont remplacées par

$$(4) \qquad a - A = \frac{q}{\omega\Omega},$$
$$-\frac{q\Omega}{\omega} + 2B\Omega = 2b\Omega - q^2\frac{\omega'}{\omega} + 2q\frac{c}{\omega} + 2K,$$
$$-\frac{s\Omega'}{\omega} + 2B\Omega' + 2\frac{C}{\Omega} = 2b\Omega' - s^2\frac{\omega'}{\omega} + 2s\frac{C}{\Omega} + 2H.$$

Les deux dernières deviennent ensuite, par des transformations faciles,

$$(4) \qquad c(a-A) + b - B = -\frac{qp + 2K}{2\Omega},$$
$$2(b-B)\Omega' = -sr + 2\frac{C}{\Omega} - 2s\frac{c}{\omega} - 2H.$$

En substituant dans cette dernière la valeur de c déduite de la précédente, on a

$$C(a-A)+b-B=\frac{q(sr+2H)-s(pq+2K)}{2\omega};$$

puis, retranchant celle-ci de la dernière des équations numérotées (4),

$$(4)\qquad c-C=-(sr+2H)\frac{\Omega}{2}+(pq+2K)\frac{\Omega'}{2}.$$

Les trois équations précédentes, qui portent le n° (4), sont celles de même numéro du § I.

Quant aux équations (4 *bis*), (6) et (6 *bis*), il semble que ce que l'on a déjà dit au § I suffit. Mais leur forme pourrait faire croire que les nombres h et k ou bien H et K qu'elles déterminent peuvent ne pas être entiers, ce qui serait un résultat absurde. Il est facile de voir, en écrivant

$$\begin{aligned} -2h &= \quad 2pH-2rK+pr(s-q-1),\\ -2k &= -2qH+2sK+sq(p-r-1), \end{aligned}$$

que les nombres entiers $pr(s-q-1)$ et $qs(p-r-1)$ sont toujours divisibles par 2, et qu'il en est par suite de même des premiers membres de ces équations. En effet, d'après la relation $ps-qr=1$, on ne peut faire que les six suppositions suivantes :

p pair..........................	s, q, r impairs,
s pair..........................	p, q, r impairs,
p, s pairs..........................	q, r impairs,
q pair..........................	p, s, r impairs,
r pair..........................	p, s, q impairs,
q, r pairs..........................	p, s impairs,

et dans tous les cas les nombres dont il s'agit sont pairs.

III. Si l'on rétablit maintenant le facteur constant dont il a été fait abstraction, il faut, pour achever de résoudre le problème, le déterminer de manière que l'équation

$$e^{\pi i(az^2+2bz)}\sum e^{\frac{\pi i}{\omega}[2m(z-c)+m^2\omega']}=\mathrm{T}e^{\pi i(Az^2+2Bz)}\sum e^{\frac{\pi i}{\Omega}[2m(z-C)+m^2\Omega']}$$

soit identique. L'idée qui se présente immédiatement est de faire $z=0$, et il vient

$$T = \frac{\sum e^{\frac{\pi i}{\omega}(-2mc+m^2\omega')}}{\sum e^{\frac{\pi i}{\Omega}(-2mC+m^2\Omega')}} = \frac{\theta_3(-c, \omega, \omega')}{\theta_3(-C, \Omega, \Omega')}.$$

Mais, si cette solution se présente immédiatement, elle n'est pas la plus simple.

M. Hermite détermine cette constante par l'analyse remarquable qui suit, et qu'il est indispensable de répéter, soit à cause des différences de notations, soit à cause du point de vue plus général où nous nous sommes placés, soit enfin à cause de quelques détails. Il y a deux cas à distinguer, selon que la partie imaginaire de $\frac{q}{\omega\Omega}$ ou de $a - A$, ce qui est la même chose, est positive ou négative. Nous considérons le premier cas.

Après avoir divisé l'équation ci-dessus par le facteur $e^{\pi i(Az^2+Bz)}$, nous posons

$$(23) \qquad \varphi(z, m) = (a - A)z^2 + 2\left(b - B + \frac{m}{\omega}\right)z - \frac{2mc}{\omega} + m^2\frac{\omega'}{\omega},$$

et elle devient

$$(24) \qquad \sum e^{\pi i\varphi(z,m)} = T\sum e^{\frac{\pi i}{\Omega}[2m(z-C)+m^2\Omega']}.$$

Il est facile d'établir la relation

$$(25) \qquad \varphi(z + n\Omega, m) \equiv \varphi(z, m + nq) \pmod{2}.$$

En changeant dans (23) z en $z+\Omega$ et m en $m+q$, on a les deux relations

$$\begin{aligned}
\varphi(z+\Omega, m) &= (a - A)(z+\Omega)^2 \\
&\quad + 2\left(b - B + \frac{m}{\omega}\right)(z+\Omega) - \frac{2mc}{\omega} + m^2\frac{\omega'}{\omega}, \\
\varphi(z, m+q) &= (a - A)z^2 \\
&\quad + 2\left(b - B + \frac{m+q}{\omega}\right)z - \frac{2(m+q)c}{\omega} + (m+q)^2\frac{\omega'}{\omega};
\end{aligned}$$

en les retranchant l'une de l'autre et faisant quelques réductions, il vient

$$\varphi(z+\Omega, m) - \varphi(z, m+q) = 2K + 2mp.$$

On passe facilement de là à la relation qu'il s'agit de démontrer.

Cela posé, après l'avoir multipliée par dz, intégrons les deux membres de l'équation (24) suivant la ligne droite qui va de zéro à Ω. En ce qui concerne le second membre, l'intégration d'un terme quelconque donne

$$\int_0^\Omega e^{\frac{\pi i}{\Omega}[2m(z-C)+m^2\Omega']}\,dz = \frac{\Omega}{2m\pi i}e^{\frac{\pi i}{\Omega}[-2mC+m^2\Omega']}(e^{2m\pi i}-1),$$

et l'on voit ainsi que chacun de ces termes est nul, sauf le cas où m est égal à zéro. Quant à ce terme que l'on obtient en faisant $m=0$, son intégrale est égale à Ω. L'équation (24) conduit ainsi à

$$\text{(26)} \qquad T\Omega = \int_0^\Omega dz \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} e^{\pi i\varphi(z,m)}.$$

Si q est positif, à la place de celle-ci on peut écrire

$$T\Omega = \int_0^\Omega dz\left[\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{\pi i\varphi(z,nq)} + \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{\pi i\varphi(z,nq+1)} + \ldots + \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{\pi i\varphi(z,nq+q-1)}\right],$$

et à cause de la relation (25)

$$\text{(27)} \qquad T\Omega = \int_0^\Omega dz\left[\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{\pi i\varphi(z+n\Omega,0)} + \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{\pi i\varphi(z+n\Omega,1)} + \ldots + \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{\pi i\varphi(z+n\Omega,q-1)}\right].$$

Mais, si q est négatif, en remplaçant q par $-q$, cette relation (25) devient

$$\varphi(z, m-nq) \equiv \varphi(z+n\Omega, m) \pmod{2},$$

et à la place de (26) il faut écrire

$$T\Omega = \int_0^\Omega dz\left[\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{\pi i\varphi(z,-nq)} + \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{\pi i\varphi(z,-nq+1)} + \ldots + \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{\pi i\varphi(z,-nq+q-1)}\right];$$

d'où résulte encore la formule (27). Dans les deux cas on peut donc poser

$$\mathrm{T}\Omega = \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \int_0^\Omega e^{\pi i \varphi(z+n\Omega,\rho)} dz, \tag{28}$$

pourvu que dans la limite supérieure du premier Σ l'on ait soin de prendre q avec sa valeur absolue.

Posons actuellement $z + n\Omega = y$, il vient

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \int_0^\Omega e^{\pi i \varphi(z+n\Omega,\rho)} dz = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \int_{n\Omega}^{(n+1)\Omega} e^{\pi i \varphi(y,\rho)} dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i \varphi(y,\rho)} dy;$$

et enfin

$$\mathrm{T}\Omega = \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} \int_0^\Omega e^{\pi i \varphi(z,\rho)} dz. \tag{29}$$

L'intégrale qui entre dans cette formule a la forme

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+bx+c)} dx,$$

et est égale à $\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-c+\frac{b^2}{4a}}$, même dans le cas où les constantes sont imaginaires, pourvu que la partie réelle de a soit positive, ainsi que l'a démontré Cauchy (*Exercices de Mathématiques*, t. II). Dans le cas actuel, pour comparer plus facilement à la formule que nous venons de trouver, nous écrirons

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i (mz^2+nz+p)} dz = \frac{e^{\pi i\left(p-\frac{n^2}{4m}\right)}}{\sqrt{-mi}},$$

la partie réelle de $-m\pi i$ étant positive. Or, d'après (23), on a $m = a - \mathrm{A}$, et nous considérons le cas où la partie imaginaire de $a - \mathrm{A}$ est positive; par conséquent, la formule ci-dessus est applicable.

En remplaçant m par ρ dans la formule (23), on a

$$p - \frac{n^2}{4m} = -\frac{2\rho c}{\omega} + \rho^2\frac{\omega'}{\omega} - \frac{\left(b - \mathrm{B} + \frac{\rho}{\omega}\right)}{a - \mathrm{A}},$$

qui se réduit, en tenant compte des diverses formules relatives à la transformation, à

$$p - \frac{n^2}{4m} = -\frac{(b - \mathrm{B})^2}{a - \mathrm{A}} + \rho\left(p + \frac{2\mathrm{K}}{q}\right) - \rho^2\frac{p}{q}.$$

La formule (29) devient donc, tous calculs faits,

$$\mathrm{T} = \frac{e^{-\pi i\frac{(b-\mathrm{B})^2}{a-\mathrm{A}}}}{\sqrt{-iq\frac{\Omega}{\omega}}}\sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} e^{\rho\left(p+\frac{2\mathrm{K}}{q}\right)\pi i - \rho^2\frac{p\pi i}{q}},$$

pourvu que, dans le cas de q négatif, on convienne de prendre, dans la limite supérieure du Σ, q avec sa valeur absolue. De là on passe immédiatement à l'équation (3) du § I,

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{\omega}}e^{\pi i(az^2+2bz)}\sum e^{\frac{\pi i}{\omega}[2m(z-c)+m^2\omega']} \\ &\quad = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\Omega}}e^{\pi i\left[\mathrm{A}z^2+2\mathrm{B}z-\frac{(b-\mathrm{B})^2}{a-\mathrm{A}}\right]}\sum e^{\frac{\pi i}{\Omega}[2m(z-\mathrm{C})+m^2\Omega']}, \end{aligned}\right.$$

en posant

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{-iq}}\mathrm{U},$$

$$\mathrm{U} = \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} e^{\rho\left(p+\frac{2\mathrm{K}}{q}\right)\pi i - \rho^2\frac{p\pi i}{q}}.$$

C'est, sauf la convention relative au cas où q est négatif, la série (10) du § I. On va voir qu'elle se ramène à la série de M. Hermite.

IV. Le nombre K que nous avons introduit dans cette analyse est arbitraire, ainsi que le nombre H. On a une transformation particulière en faisant $K = 0$ et $H = 0$. Désignons par B', C', ε' ce que deviennent les quantités B, C, ε qui sont les seules qui changent avec les valeurs de H et K; la transformation correspondante est donnée par les formules

$$a - A = \frac{q}{\omega\Omega},$$

$$c - C' = -sr\frac{\Omega}{2} + pq\frac{\Omega'}{2},$$

$$c(a - A) + b - B' = -\frac{pq}{2\Omega},$$

$$\varepsilon' = \frac{1}{\sqrt{-iq}} \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} e^{\rho p\pi i - \rho^2 \frac{p\pi i}{q}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{\omega}} e^{\pi i(az^2+2bz)} \sum e^{\frac{\pi i}{\omega}[2m(z-c)+m^2\omega']} = \frac{\varepsilon'}{\sqrt{\Omega}} e^{\pi i\left[Az^2+2B'z-\frac{(b-B')^2}{a-A}\right]} \sum e^{\frac{\pi i}{\Omega}[2m(z-C')+m^2\Omega']}.$$

Quand H et K ne sont pas nuls, les formules de transformation sont les formules (3) et (4) du § I auxquelles il faut ajouter

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{-iq}} \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} e^{\rho\left(p+\frac{2K}{q}\right)\pi i - \rho^2\frac{p\pi i}{q}}.$$

Or, en comparant ces formules aux précédentes, on a

$$B' = B - \frac{K}{\Omega}, \quad C' = C - H\Omega + K\Omega';$$

d'où il résulte, en substituant et désignant, pour abréger, par $f(z)$ le premier membre de l'équation (3), qui est en même temps le premier membre de l'équation ci-dessus,

$$f(z) = \frac{\varepsilon'}{\sqrt{\Omega}} e^{\pi i\left[Az^2+2\left(B-\frac{K}{\Omega}\right)z-\frac{\left(b-B+\frac{K}{\Omega}\right)^2}{a-A}\right]} \sum e^{\frac{\pi i}{\Omega}[2m(z-C+H\Omega-K\Omega')+m^2\Omega']}.$$

Par une transformation facile et analogue à celle qui a été employée pour les formules (17) et (18), cette équation peut être remplacée par la suivante,

$$f(z) = \frac{\varepsilon'}{\sqrt{\Omega}} e^{\pi i\left[A z^2 + 2Bz - \frac{(b-B)^2}{a-A}\right]} e^{-K\pi i\left[2\frac{b-B}{(a-A)\Omega} + \frac{K}{(a-A)\Omega^2} + \frac{2C}{\Omega} + K\frac{\Omega'}{\Omega}\right]} \sum e^{\frac{\pi i}{\Omega}[2m(z-C) + m^2\Omega']}.$$

En comparant à l'équation (3), on en déduit, après avoir remplacé ε et ε' par leurs valeurs,

$$\sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} e^{\rho\left(p+\frac{2K}{q}\right)\pi i - \rho^2\frac{p\pi i}{q}} = e^{-K\pi i\left[\frac{2(b-B)}{(a-A)\Omega} + \frac{K}{(a-A)\Omega^2} + \frac{2C}{\Omega} + K\frac{\Omega'}{\Omega}\right]} \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} e^{\rho p\pi i - \rho^2\frac{p\pi i}{q}}.$$

Le premier membre ne contenant que les nombres entiers p, q, K, il est clair que le facteur exponentiel du second membre ne peut contenir que ces nombres ou des nombres qui en dépendent. C'est ce qui se vérifie facilement au moyen des formules (4) et (4 *bis*); et il en résulte

$$\sum_{\rho=0}^{\rho q=-1} e^{\rho\left(p+\frac{2K}{q}\right)\pi i - \rho^2\frac{p\pi i}{q}} = e^{-Ks\left(r-p-\frac{K}{q}\right)\pi i} \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} e^{\rho p\pi i - \rho^2\frac{p\pi i}{q}}. \tag{30}$$

La série du premier membre, qui est la série (10), est ainsi exprimée par celle du second membre, qui est celle de M. Hermite. Quant aux nombres r et s introduits dans le second membre, ils sont toujours liés à ceux du premier membre par l'équation $ps - qr = 1$; et il est facile de voir, ce qui doit être, qu'une solution quelconque de cette équation ne change pas ce second membre. Seulement il faut remarquer que dans la nouvelle série les nombres p et q sont premiers entre eux, tandis que dans la série de M. Hermite considérée en elle-même, indépendamment de la question actuelle, il n'en est pas de même.

Il reste à évaluer cette dernière série.

V. Nous rappelons d'abord les formules suivantes données par Lebesgue dans le Mémoire cité, pour exprimer la série de Gauss :

$$V = \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} e^{\rho^2\frac{2h\pi i}{q}},$$

en supposant h et q premiers entre eux,

$$(31)\quad \begin{cases} q \text{ impair}, & V = e^{\frac{\pi i}{8}(q-1)^2}\left(\dfrac{h}{q}\right)\sqrt{q}, \\ q = 2\beta, & V = 0, \\ q = 2^{2n}\beta, & V = \left[1 + (-1)^{\frac{h\beta-1}{2}} i\right] i^{\left(\frac{\beta-1}{2}\right)^2}\left(\dfrac{h}{\beta}\right)\sqrt{q}, \\ q = 2^{2n+1}\beta, & V = \left[1 + (-1)^{\frac{h\beta-1}{2}} i\right] i^{\left(\frac{\beta-1}{2}\right)^2}\left(\dfrac{h}{\beta}\right)\sqrt{q}. \end{cases}$$

Pour retrouver les formules de M. Hermite, il faut leur donner une autre forme.

En considérant le facteur

$$1 + (-1)^{\frac{h\beta-1}{2}} i = 1 + e^{\frac{h\beta\pi i}{2}},$$

l'élevant au carré, puis faisant l'opération inverse, on trouve

$$1 + e^{\frac{h\beta\pi i}{2}} = \pm\sqrt{2}e^{\frac{h\beta\pi i}{4}} = \pm\sqrt{2}\left(\cos\frac{h\beta}{4} + i\sin\frac{h\beta}{4}\right).$$

Si $h\beta \equiv \pm 1 \pmod{8}$, on a

$$\cos\frac{h\beta}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

si $h\beta \equiv \pm 3 \pmod{8}$, on a

$$\cos\frac{h\beta}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Il en résulte que dans le premier cas

$$1 + e^{\frac{h\beta\pi i}{2}} = \sqrt{2}e^{\frac{h\beta\pi i}{4}},$$

et dans le second

$$1 + e^{\frac{h\beta\pi i}{2}} = -\sqrt{2}e^{\frac{h\beta\pi i}{4}}.$$

Or il est facile de vérifier que dans le premier cas on a la congruence

$$h\beta - 1 \equiv \frac{3(h\beta-1)^2}{2} \pmod{8},$$

tandis que dans le second cas on a la congruence

$$h\beta - 1 \equiv \frac{3(h\beta - 1)^2}{2} \pmod{4},$$

sans que la première congruence soit satisfaite. On a donc dans les deux cas

$$(32) \qquad 1 + e^{\frac{h\beta\pi i}{2}} = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi i}{4}\left[1 + \frac{3(h\beta - 1)^2}{2}\right]},$$

et les formules (31) deviennent

$$(33) \quad \begin{cases} q \text{ impair}, & \mathrm{V} = e^{\frac{\pi i}{8}(q-1)^2} \left(\dfrac{h}{q}\right)\sqrt{q}, \\ q = 2\beta, & \mathrm{V} = 0, \\ q = 2^{2n}\beta, & \mathrm{V} = e^{\frac{\pi i}{4}\left[1 + \frac{3(h\beta - 1)^2 + (\beta - 1)^2}{2}\right]} \left(\dfrac{h}{\beta}\right)\sqrt{2q}, \\ q = 2^{2n+1}\beta, & \mathrm{V} = e^{\frac{\pi i}{4}\left[1 + \frac{3(h\beta - 1)^2 + (\beta - 1)^2 + q^2 - 1}{2}\right]} \left(\dfrac{h}{\beta}\right)\sqrt{2q}. \end{cases}$$

Si h et q n'étaient pas premiers entre eux, on poserait, en appelant d leur plus grand commun diviseur,

$$h = dh', \quad q = dq',$$

et l'on aurait

$$\mathrm{V} = d \sum_{\rho=0}^{\rho=q'-1} e^{\rho^2 \frac{2h'\pi i}{q'}},$$

ce qui ramènerait aux formules précédentes.

Celles-ci conduisent à exprimer la série de Lebesgue

$$\mathrm{T} = e \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} e^{\frac{\rho^2+\rho}{2} \frac{2h\pi i}{q}}$$

par les formules suivantes :

$$(34) \quad \begin{cases} q \text{ pair}, & \mathrm{T} = 0, \\ q \text{ impair}, & \begin{cases} h \text{ impair}, & \mathrm{T} = e^{-\frac{h\pi i}{4q}} e^{\frac{\pi i}{4}\left[1 + \frac{3(hq-1)^2 + (q-1)^2 + h^2 - 1}{2}\right]} \left(\dfrac{h}{q}\right)\sqrt{q}, \\ h \text{ pair}, & \mathrm{T} = e^{-\frac{h\pi i}{4q}} e^{\frac{\pi i}{4}(hq - q + 1)} \left(\dfrac{h}{q}\right)\sqrt{q}; \end{cases} \end{cases}$$

h et q sont encore premiers entre eux, et s'ils ne l'étaient pas, en désignant par d leur plus grand commun diviseur, on aurait comme précédemment

$$T = d \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} e^{\frac{\rho^2+\rho}{2} \frac{2h'\pi i}{q'}}.$$

Soit d'abord q pair, et posons $q = 2^\alpha \beta$, β étant impair. En considérant dans la série des termes à égale distance des extrêmes, savoir

$$e^{\frac{\rho^2+\rho}{2} \frac{2h\pi i}{2^\alpha Q}},\quad e^{\frac{(2^\alpha\beta-\rho-1)^2+2^\alpha\beta-\rho-1}{2} \frac{2h\pi i}{2^\alpha\beta}},$$

on voit que ces deux termes sont égaux et de signe contraire. D'où $T = 0$; c'est la première des formules (34).

Soit q impair; on peut supposer h pair ou impair. Considérons en premier lieu le cas de h impair. On démontre facilement la formule

$$\sum_{\rho=0}^{\rho=8q-1} e^{\rho^2 \frac{2h\pi i}{8q}} = \sum_{\rho=0}^{\rho=4q-1} e^{\rho^2 \frac{2h\pi i}{4q}} + e^{\frac{h\pi i}{4q}} \sum_{\rho=0}^{\rho=4q-1} e^{\frac{\rho^2+\rho}{2} \frac{2h\pi i}{q}},$$

en divisant la somme du premier membre en deux autres, dont l'une correspond aux valeurs paires de ρ et l'autre aux valeurs impaires. La seconde partie du second membre peut ensuite être partagée comme il suit :

$$\sum_{\rho=0}^{\rho=2q-1} e^{\rho^2 \frac{2h\pi i}{2q}} + \sum_{\rho=0}^{\rho=2q-1} e^{(\rho+2q)^2 \frac{2h\pi i}{2q}},$$

et, en développant $(\rho+2q)^2 = \rho^2 + 4q\rho + 4q^2$, on s'aperçoit que ces deux sommes sont égales et par suite nulles, puisque la première est nulle en vertu de la seconde des formules (33). La seconde partie du second membre se partage de même en quatre sommes que l'on reconnaît être égales entre elles, et l'on a, par suite, la formule réduite

$$4e^{\frac{h\pi i}{4q}} T = \sum_{\rho=}^{\rho=8q-1} e^{\rho^2 \frac{2h\pi i}{8q}};$$

d'où, en employant la quatrième des formules (33), on déduit la seconde des formules (34).

Lorsque h est pair, on peut poser $h = 2^\alpha p$. On emploie la formule

$$\sum_{\rho=0}^{\rho=4q-1} e^{\rho^2 \frac{2^\alpha p\pi i}{4q}} = \sum_{\rho=0}^{\rho=2q-1} e^{\rho^2 \frac{2^\alpha p\pi i}{q}} + e^{\frac{2^{\alpha-2} p\pi i}{q}} \sum_{\rho=0}^{\rho=2q-1} e^{\frac{\rho^2+\rho}{2} \frac{2^{\alpha+1} p\pi i}{q}},$$

qui se démontre comme il a été dit précédemment, et que l'on réduit de même à la suivante

$$(35) \qquad \frac{1}{2} \sum_{\rho=0}^{\rho=4q-1} e^{\rho^2 \frac{2^\alpha p\pi i}{4q}} = \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} e^{\rho^2 \frac{2^\alpha p\pi i}{q}} + e^{\frac{2^{\alpha-2} p\pi i}{q}} \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} e^{\frac{\rho^2+\rho}{2} \frac{2^{\alpha+1} p\pi i}{q}}.$$

Si $\alpha = 1$, et par suite $h = 2p$, il vient par les formules (33)

$$e^{\frac{p\pi i}{2q}} \mathrm{T} = e^{\frac{\pi i}{4}\left[1 + \frac{3(pq-1)^2 + (q-1)^2}{2}\right]} \left(\frac{p}{q}\right) \sqrt{2q} - e^{\frac{\pi i}{8}(q-1)^2} \left(\frac{p}{q}\right) \sqrt{q};$$

puis par la formule (32)

$$\mathrm{T} = e^{-\frac{h\pi i}{4q}} e^{\frac{\pi i}{4}\left[hq + \frac{(q-1)^2}{2}\right]} \left(\frac{p}{q}\right) \sqrt{q}.$$

C'est la troisième des formules (35) quand on ramène le symbole $\left(\frac{p}{q}\right)$ au symbole $\left(\frac{h}{q}\right)$. Si $\alpha = 2$, et par suite $h = 4p$, dans le premier membre de la formule (35), la fraction $\frac{2^\alpha p\pi i}{4q}$ se réduit à $\frac{2^{\alpha-1} p\pi i}{2q}$, les deux termes de la fraction étant divisés par 2; il en résulte que ce premier membre est égal à

$$\sum_{\rho=0}^{\rho=2q-1} e^{\rho^2 \frac{2p\pi i}{2q}} = 0.$$

Il reste donc

$$\mathrm{T} = - e^{-\frac{p\pi i}{q}} e^{\frac{\pi i}{8}(q-1)^2} \left(\frac{p}{q}\right) \sqrt{q} = e^{-\frac{h\pi i}{4q}} e^{\frac{\pi i}{4}\left[hq + \frac{(q-1)^2}{4}\right]} \left(\frac{p}{q}\right) \sqrt{q};$$

d'où l'on passe immédiatement à la troisième des formules (34). Si

$\alpha > 3$, le premier membre de (35) se réduit, à cause du diviseur 4, à

$$2\sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} e^{\rho^2\frac{2^{\alpha-2}p\pi i}{q}},$$

et il vient

$$e^{\frac{2^{\alpha-2}p\pi i}{q}}\mathrm{T} = 2e^{\frac{\pi i}{8}(q-1)^2}\left(\frac{2^{\alpha-3}p}{q}\right)\sqrt{q} - e^{\frac{\pi i}{8}(q-1)^2}\left(\frac{2^{\alpha-1}p}{q}\right)\sqrt{q};$$

d'où l'on déduit encore la même formule en remarquant que

$$\left(\frac{2^{\alpha-1}p}{q}\right) = \left(\frac{2^{\alpha-3}q}{q}\right),$$

puis ramenant le symbole $\left(\frac{p}{q}\right)$ au symbole $\left(\frac{h}{q}\right)$.

Revenons maintenant à la série de M. Hermite, et, supposant q positif, représentons-la par

$$\mathrm{U} = \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} e^{\rho p\pi i+\rho^2\frac{p\pi i}{q}} = \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} e^{-\rho p\pi i+\rho^2\frac{p\pi i}{q}}.$$

En admettant que p peut être positif ou négatif, tous les cas sont compris dans cette forme. Quand p est pair, la série se réduit à celle de Gauss, et il n'y a rien à examiner de nouveau : il n'y a de série nouvelle que pour p impair. Elle s'exprime par les formules

$$(36)\quad \begin{cases} q \text{ impair}, & \mathrm{U} = e^{-\frac{\pi i}{4}(q-1)}\left(\frac{p}{q}\right)\sqrt{q}. \\ q = 2^{2n+1}\beta, & \mathrm{U} = e^{\frac{\pi i}{4}\left[-pq+1+\frac{3(p\beta-1)^2+(\beta-1)^2}{2}\right]}\left(\frac{p}{\beta}\right)\sqrt{q}, \\ q = 2^{2n}\beta, & \mathrm{U} = e^{\frac{\pi i}{4}\left[-pq+1+\frac{3(p\beta-1)^2+(\beta-1)^2+p^2-1}{2}\right]}\left(\frac{p}{\beta}\right)\sqrt{q}. \end{cases}$$

Si q est impair, on pose

$$p = mq + 2n,$$

m étant nécessairement impair. La série U devient

$$U = \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} e^{\rho^2 \frac{2n\pi i}{q}} = e^{\frac{\pi i}{8}(q-1)^2} \left(\frac{n}{q}\right) \sqrt{q}.$$

Les règles relatives au calcul des symboles font voir que

$$\left(\frac{n}{q}\right) = \left(\frac{2n}{q}\right)(-1)^{-\frac{q^2-1}{8}}.$$

Mais de la congruence $2n \equiv p \pmod{q}$ il résulte

$$\left(\frac{2n}{q}\right) = \left(\frac{p}{q}\right);$$

faisant ensuite les substitutions convenables, on trouve la première des formules (36).

Soient maintenant q pair et $q = 2^\alpha\beta$; en réunissant, ainsi qu'on l'a fait déjà, les termes positifs qui correspondent aux valeurs paires de ρ et les termes négatifs qui correspondent aux valeurs impaires, on a

$$(37) \qquad U = \sum_{\rho=0}^{\rho=2^{\alpha-1}\beta-1} e^{\rho^2 \frac{2p\pi i}{2^{\alpha-1}\beta}} - e^{\frac{p\pi i}{2^\alpha\beta}} \sum_{\rho=0}^{\rho=2^{\alpha-1}\beta-1} e^{\frac{\rho^2+\rho}{2} \frac{4p\pi i}{2^{\alpha-1}\beta}},$$

chacune des séries dont se compose la série U étant déterminée par les séries V et T. A cause du plus grand commun diviseur 2, la seconde somme, abstraction faite du facteur, est égale à

$$2 \sum_{\rho=0}^{\rho=2^{\alpha-1}\beta-1} e^{\frac{\rho^2+\rho}{2} \frac{2p\pi i}{2^{\alpha-2}\beta}},$$

et, en admettant $\alpha > 2$, cette série est nulle, de sorte que l'on a simplement

$$U = \sum_{\rho=0}^{\rho=2^{\alpha-1}\beta-1} e^{\rho^2 \frac{2p\pi i}{2^{\alpha-1}\beta}},$$

série dont la somme a été donnée précédemment. Si $\alpha = 2n+1$, sa valeur est déterminée par la troisième des formules (33); si $\alpha = 2n$, elle est déterminée par la quatrième. On obtient ainsi les formules données par M. Hermite. En y introduisant le facteur $e^{-\frac{\pi i}{4}pq}$, qui est égal à l'unité, puisque $\frac{q}{4}$ est au moins égal à 2, on a la deuxième et la troisième des formules (36).

Reste à démontrer les deux cas d'exception $\alpha = 2$, $\alpha = 1$; et c'est précisément pour obtenir, dans ces deux cas, les mêmes formules que nous avons introduit le facteur $e^{-\frac{\pi i}{4}pq}$.

Si $\alpha = 2$, d'où $q = 4\beta$, la première série du second membre est nulle, et il reste

$$U = -e^{\frac{p\pi i}{4\beta}} \sum_{\rho=0}^{\rho=2\beta-1} e^{\frac{\rho^2+\rho}{2}\frac{4p\pi i}{2\beta}},$$

qui se réduit, à cause du plus grand commun diviseur 2, à

$$U = -2e^{\frac{p\pi i}{4\beta}} \sum_{\rho=0}^{\rho=\beta-1} e^{\frac{\rho^2+\rho}{2}\frac{2p\pi i}{\beta}}.$$

Les nombres p et β étant tous deux impairs, le signe $-$ peut être remplacé par le facteur $e^{-\frac{pq\pi i}{4}}$, et l'on retrouve la troisième des formules (36).

Si $\alpha = 1$, d'où $q = 2\beta$, on a, d'après les formules (37), (33) et (34),

$$\begin{aligned} U &= e^{\frac{\pi i}{8}(\beta-1)^2}\left(\frac{p}{\beta}\right)\sqrt{\beta} - e^{\frac{\pi i}{4}(2p\beta-\beta+1)}\left(\frac{2p}{\beta}\right)\sqrt{\beta} \\ &= e^{\frac{\pi i}{8}(\beta-1)^2}\left(\frac{p}{\beta}\right)\sqrt{q}\,\frac{1-e^{\frac{p\beta\pi i}{2}}}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

De la formule (32), en changeant p en $-p$, on déduit

$$\frac{1+e^{-\frac{p\beta\pi i}{2}}}{\sqrt{2}} = e^{\frac{\pi i}{4}\left[1+\frac{3(p\beta+1)^2}{2}\right]};$$

puis, en remarquant que $e^{-\frac{p\beta\pi i}{2}} = - e^{\frac{p\beta\pi i}{2}}$

$$U = e^{\frac{\pi i}{8}(\beta-1)^2}\left(\frac{p}{\beta}\right)\sqrt{q}\, e^{\frac{\pi i}{4}\left[1+\frac{3(p\beta+1)^2}{2}\right]};$$

cette dernière conduit immédiatement à la seconde des formules (36).

VI. Pour obtenir la valeur de ε, qui achève de réduire à une identité l'équation (3), il faut remonter à la formule (30), dont le premier membre est exprimé par la série U, quand on y change p en $-p$, et il faut, en outre, diviser U par $\sqrt{-iq}$. Par ce changement, les formules (36) deviennent d'abord

$$e^{-\frac{\pi i}{4}(q-1)}\left(\frac{-p}{q}\right)\sqrt{q},$$
$$e^{\frac{\pi i}{4}\left[pq+1+\frac{3(p\beta+1)^2+(\beta-1)^2}{2}\right]}\left(\frac{-p}{\beta}\right)\sqrt{q},$$
$$e^{\frac{\pi i}{4}\left[pq+1+\frac{3(p\beta+1)^2+(\beta-1)^2+p^2-1}{2}\right]}\left(\frac{-p}{\beta}\right)\sqrt{q};$$

puis, en les divisant par $\sqrt{-iq}$ et remplaçant le symbole $\left(\frac{-p}{\beta}\right)$ par $e^{\frac{\pi i}{2}(\beta-1)}\left(\frac{p}{\beta}\right)$, il vient, tous calculs faits, les formules (7).

Ces formules supposent q positif, tandis que dans le problème de la transformation q peut être négatif. S'il en est ainsi, posons $q = -q'$. D'après ce qui a été dit à la fin du § III, la série U doit être remplacée par la série

$$U = \sum_{\rho=0}^{\rho=q'-1} e^{s\left(p-\frac{2K}{q'}\right)\pi i+\rho^2\frac{p\pi i}{q'}};$$

à la place de la formule (30), on a

$$\sum_{\rho=0}^{\rho=q'-1} e^{\rho\left(p-\frac{2K}{q'}\right)\pi i+\rho^2\frac{p\pi i}{q'}} = e^{Ks\left(r+p+\frac{K}{q'}\right)\pi i}\sum_{\rho=0}^{\rho=q'-1} e^{-\rho p\pi i+\rho^2\frac{p\pi i}{q'}},$$

et dans les formules (36) il faut simplement changer q en q'; au lieu de diviser par $\sqrt{-iq}$, il faut diviser par $\sqrt{iq'}$, et l'on obtient, en résumé, en remarquant que

$$e^{\mathrm{K}sr\pi i} = e^{-\mathrm{K}sr\pi i}, \quad e^{\mathrm{K}sp\pi i} = e^{-\mathrm{K}sp\pi i},$$

à la place des formules (7), les formules

$$\begin{gathered}
e^{-\mathrm{K}s\left(r-p+\frac{\mathrm{K}}{q'}\right)\pi i}\, e^{-\frac{q'\pi i}{4}} \left(\frac{p}{q'}\right), \\
e^{-\mathrm{K}s\left(r-p+\frac{\mathrm{K}}{q'}\right)\pi i}\, e^{\frac{\pi i}{4}\left[-q'p+\frac{3(p\beta'-1)^2+(\beta'-1)^2}{2}\right]} \left(\frac{p}{\beta'}\right), \\
e^{-\mathrm{K}s\left(r-p+\frac{\mathrm{K}}{q'}\right)\pi i}\, e^{\frac{\pi i}{4}\left[-q'p+\frac{3(p\beta'-1)^2+(\beta'-1)^2+p^2-1}{2}\right]} \left(\frac{p}{\beta'}\right).
\end{gathered}$$

Si l'on y change q en $-q'$, à cause de

$$\left(\frac{p}{-\beta}\right) = \left(\frac{p}{\beta}\right),$$

elles se réduisent aux formules (7); et ainsi il n'est pas nécessaire de distinguer le cas de q positif du cas de q négatif.

VII. Considérons maintenant le cas où la partie imaginaire de $\frac{q}{\omega\Omega}$ est négative. Au lieu de l'équation (3), nous poserons

$$\frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{\pi i(\mathrm{A}z^2+2\mathrm{B}z)} \sum e^{\frac{\pi i}{\Omega}[2m(z-\mathrm{C})+m^2\Omega']} = \frac{\varepsilon'}{\sqrt{\omega}} e^{\pi i\left[az^2+2bz-\frac{(\mathrm{B}-b)^2}{\mathrm{A}-a}\right]} \sum e^{\frac{\pi i}{\omega}[2m(z-c)+m^2\omega']},$$

en considérant les périodes Ω, Ω' comme les périodes primitives. Alors, en opérant comme précédemment, il y aura dans le premier membre la quantité $\mathrm{A}-a$, c'est-à-dire la quantité $\frac{q}{\omega\Omega}$ changée de signe; tous les calculs du § III deviennent applicables, et il n'y a qu'à changer, ainsi qu'on l'a dit au § I, les quantités

$$\omega,\ \omega',\ p,\ q,\ r,\ s,\ a,\ b,\ c,\ h,\ k,$$

dans les quantités

$$\Omega,\ \Omega',\ s,\ -q-r,\ p,\ \mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C},\ \mathrm{H},\ \mathrm{K}.$$

La quantité ε' se trouve déterminée par le même changement, et l'on a, à la place des formules (7),

$$\begin{aligned}
\varepsilon' &= e^{-kp\left(-r-s+\frac{k}{q}\right)\pi i}\, e^{-\frac{q\pi i}{4}}\left(\frac{s}{-q}\right),\\
\varepsilon' &= e^{-kp\left(-r-s+\frac{k}{q}\right)\pi i}\, e^{\frac{\pi i}{4}\left[-sq+\frac{3(s\beta-1)^2+(\beta-1)^2}{2}\right]}\left(\frac{s}{-\beta}\right),\\
\varepsilon' &= e^{-kp\left(-r-s+\frac{k}{q}\right)\pi i}\, e^{\frac{\pi i}{4}\left[-sq+\frac{3(s\beta-1)^2+(\beta-1)^2+s^2-1}{2}\right]}\left(\frac{s}{-\beta}\right).
\end{aligned}$$

Or, de $ps-qr=1$, c'est-à-dire de la congruence $ps\equiv 1\ (\text{mod.}\ \beta$ ou mod. $q)$, on déduit

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{s}{q}\right)=\left(\frac{ps}{q}\right)=\left(\frac{1}{q}\right)=1=\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{s}{-q}\right).$$

Posant alors $\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon'}$, pour revenir à l'équation (3), on trouve les formules (8).

VIII. Nous avons supposé les nombres h, k, H, K arbitraires et liés par les équations (6) et (6 *bis*). La détermination de ces nombres peut se faire en précisant les valeurs des quantités c et C introduites dans les expressions des fonctions intermédiaires.

D'abord, dans toute fonction intermédiaire,

$$f(z)=e^{\pi i(az^2+2bz)}\sum e^{\frac{\pi i}{\omega}[2mz(-c)+m^2\omega']},$$

on peut considérer la quantité c comme comprise dans le parallélogramme des périodes (ω,ω'). Car s'il en est autrement, c étant une quantité comprise dans le parallélogramme, h et k des nombres entiers, désignons par $c + h\omega + k\omega'$ la quantité correspondante qui entre dans l'expression de la fonction intermédiaire; celle-ci est définie par la formule

$$f(z) = e^{\pi i(az^2 + 2bz)} \sum e^{\frac{\pi i}{\omega}[2m(z - c - h\omega - k\omega') + m^2\omega']}.$$

En premier lieu, l'exponentielle sous le signe Σ doit être réduite à

$$e^{\frac{\pi i}{\omega}[2m(z - c - k\omega') + m^2\omega']},$$

puisque, quel que soit m, on a $e^{-2mh\pi i} = 1$; en second lieu, la quantité qui a $\frac{\pi i}{\omega}$ pour coefficient peut s'écrire

$$2(m - k)(z - c) + (m - k)^2\omega' + 2k(z - c) - k^2\omega';$$

et pour former la série il faut donner à m des valeurs entières depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$; on obtient évidemment le même résultat en donnant ces valeurs entières à $m - k$. Par suite, la série de la formule précédente est égale à

$$\sum e^{\frac{\pi i}{\omega}[2m(z - c) + m^2\omega'] + \frac{\pi i}{\omega}(2k(z - c) - k^2\omega')};$$

et comme nous faisons abstraction d'un facteur constant et qu'on peut supposer le facteur $e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2kc + k^2\omega')}$ compris dans cette constante, on a en résumé

$$f(z) = e^{\pi i\left[az^2 + 2\left(b - \frac{k}{\omega}\right)z\right]} \sum e^{\frac{\pi i}{\omega}[2m(z - c) + m^2\omega']}.$$

Ainsi, l'on peut toujours supposer que, dans le premier membre de l'équation (3), la quantité c est comprise dans le parallélogramme (ω, ω'). La troisième des équations (1) peut s'écrire

$$C = c + sr\frac{\Omega}{2} - pq\frac{\Omega'}{2} + H\Omega - K\Omega',$$

et elle montre immédiatement qu'on peut déterminer les nombres H et K de telle sorte que la quantité C soit comprise dans le parallélogramme $(\Omega\Omega')$.

Considérant la transformation inverse, il faut supposer que, dans le second membre, C est choisi de manière à être compris dans le parallélogramme $(\Omega\Omega')$, et alors on comprend c dans le parallélogramme $(\omega\omega')$ en déterminant convenablement les nombres g et k.