JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

W. DE MAXIMOVITCH

Conditions pour que les constantes arbitraires d'une expression générale soient distinctes entre elles

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 6 (1880), p. 167-176.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1880_3_6__167_0>

Conditions pour que les constantes arbitraires d'une expression générale soient distinctes entre elles;

Par M. W. de MAXIMOVITCH.

Nous nous proposons ici d'établir les conditions analytiques qui doivent avoir lieu pour qu'il soit impossible de réduire le nombre de constantes arbitraires dans une expression sans diminuer sa généralité.

Cette question se ramène à une autre que nous allons traiter d'abord.

§ I. — *Conditions pour qu'il existe entre des fonctions données de plusieurs variables des relations linéaires à coefficients constants.*

Étant donné un système de fonctions

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_m$$

des variables indépendantes

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,$$

on demande les conditions pour qu'il existe entre les fonctions proposées une ou plusieurs relations linéaires à coefficients constants.

Considérons tous les déterminants qu'on peut former avec les fonctions A_1, A_2, ..., A_m et leurs dérivées partielles successives prises parmi celles dont l'ordre ne surpasse pas $(m-1)$, déterminants dont chaque colonne verticale contient des dérivées d'une même fonction et chaque ligne horizontale une même dérivée de toutes les fonctions. D'après cette définition, tous ces déterminants sont compris dans la formule

$$R_m = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_m \\ \dfrac{d^{k_1} A_1}{dx_\alpha dx_{\alpha'} \cdots dx_{\alpha''}} & \dfrac{d^{k_1} A_2}{dx_\alpha dx_{\alpha'} \cdots dx_{\alpha''}} & \cdots & \dfrac{d^{k_1} A_m}{dx_\alpha dx_{\alpha'} \cdots dx_{\alpha''}} \\ \dfrac{d^{k_2} A_1}{dx_\beta dx_{\beta'} \cdots dx_{\beta''}} & \dfrac{d^{k_2} A_2}{dx_\beta dx_{\beta'} \cdots dx_{\beta''}} & \cdots & \dfrac{d^{k_2} A_m}{dx_\beta dx_{\beta'} \cdots dx_{\beta''}} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{d^{k_{m-1}} A_1}{dx_\gamma dx_{\gamma'} \cdots dx_{\gamma''}} & \dfrac{d^{k_{m-1}} A_2}{dx_\gamma dx_{\gamma'} \cdots dx_{\gamma''}} & \cdots & \dfrac{d^{k_{m-1}} A_m}{dx_\gamma dx_{\gamma'} \cdots dx_{\gamma''}} \end{vmatrix},$$

les ordres des dérivées $k_1, k_2, \ldots, k_{m-1}$ ne surpassant pas $(m-1)$ et les indices des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pouvant présenter toutes les combinaisons possibles. Dans cette formule, le nombre m étant quelconque, R_{m-1} désignera les déterminants analogues à R_m formés avec $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$ et leurs dérivées partielles d'ordre ne surpassant pas $(m-2)$.

Lemme. — *Lorsque tout déterminant R_m est nul et qu'en même temps l'un des déterminants R_{m-1} est différent de zéro, alors A_m s'exprime inéairement au moyen de $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$ et de constantes.*

Désignons par $u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$ des inconnues et considérons le système linéaire

$$(1) \begin{cases} A_1 u_1 + A_2 u_2 + \ldots + A_{m-1} u_{m-1} + A_m = 0, \\ \dfrac{d^k A_1}{dx_i \ldots dx_j} u_1 + \dfrac{d^k A_2}{dx_i \ldots dx_j} u_2 + \ldots + \dfrac{d^k A_{m-1}}{dx_i \ldots dx_j} u_{m-1} + \dfrac{d^k A_m}{dx_i \ldots dx_j} = 0, \end{cases}$$

où k a toutes les valeurs depuis l'unité jusqu'à $(m-2)$ inclusivement, et les indices $i, \ldots, j$ des variables x présentent toutes les combinaisons possibles.

Considérons encore le système suivant :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^{m-1}A_1}{dx_i\ldots dx_j}u_1+\frac{d^{m-1}A_2}{dx_i\ldots dx_j}u_2+\ldots\\ &\qquad+\frac{d^{m-1}A_{m-1}}{dx_i\ldots dx_j}u_{m-1}+\frac{d^{m-1}A_m}{dx_i\ldots dx_j}=0,\end{aligned}\right.$$

les indices des variables x présentant toutes les combinaisons possibles. A l'égard du système (1) on remarque que le déterminant de $(m-1)$ équations (choisies comme l'on voudra, mais sans omettre la première) est précisément l'un des déterminants que nous avons désignés par R_{m-1}.

D'autre part, tout déterminant R_m est visiblement formé avec les coefficients des inconnues et les termes indépendants de m équations quelconques des systèmes (1) et (2) réunis; ce déterminant égalé à zéro est la résultante de l'élimination de $u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$ entre les m équations correspondantes : c'est donc la condition suffisante de leur compatibilité.

Ainsi, lorsque l'un des déterminants R_{m-1} n'est pas nul, et qu'en même temps tout déterminant R_m est égal à zéro, alors le système (1) présente $(m-1)$ équations distinctes, soit

$$(3)\left\{\begin{aligned} &A_1u_1+A_2u_2+\ldots+A_{m-1}u_{m-1}+A_m=0,\\ &\frac{d^kA_1}{dx_i\ldots dx_j}u_1+\frac{d^kA_2}{dx_i\ldots dx_j}u_2+\ldots+\frac{d^kA_{m-1}}{dx_i\ldots dx}u_{m-1}+\frac{d^kA_m}{dx_i\ldots dx_j}=0,\\ &k=k_1,k_2,\ldots,k_{m-1}\leqq(m-2),\end{aligned}\right.$$

système dont les autres équations (1) et (2) sont des conséquences. En d'autres termes, on peut résoudre le système (3) par rapport à u_1, $u_2, \ldots, u_{m-1}$, et les valeurs trouvées satisfont en même temps à toutes les équations (1) et (2); nous allons montrer que ces valeurs de u_1, $u_2, \ldots, u_m$ sont constantes, et, partant, notre lemme sera établi par la première des équations (3).

Différentiant l'une quelconque des équations (3) par rapport à l'une des variables x, on a

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{d^{k+1}A_1}{dx\,dx_i\ldots dx_j}u_1 + \dfrac{d^{k+1}A_2}{dx\,dx_i\ldots dx_j}u_2 + \ldots + \dfrac{d^{k+1}A_{m-1}}{dx\,dx_i\ldots dx_j}u_{m-1} + \dfrac{d^{k+1}A_m}{dx\,dx_i\ldots dx_j} \\ \qquad + \dfrac{d^{k}A_1}{dx_i\ldots dx_j}\dfrac{du_1}{dx} + \dfrac{d^{k}A_2}{dx_i\ldots dx_j}\dfrac{du_2}{dx} + \cdots + \dfrac{d^{k}A_{m-1}}{dx_i\ldots dx_j}\dfrac{du_{m-1}}{dx} = 0, \\ k = 0, k_1, k_2, \ldots, k_{m-2} \leqq (m-2). \end{cases}$$

La somme des termes de la première ligne est nulle séparément, n'étant autre chose que le premier membre de l'une des équations (1) ou (2).

Mais après suppression des parties nulles les équations (4) deviennent linéaires et homogènes par rapport aux dérivées de $u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$ et entraînent comme conséquences les équations suivantes :

$$R_{m-1}\frac{du_1}{dx} = 0, \quad R_{m-1}\frac{du_2}{dx} = 0, \quad \ldots, \quad R_{m-1}\frac{du_{m-1}}{dx} = 0,$$

le déterminant R_{m-1} étant le même que celui du système (3), et, comme ce déterminant n'est pas nul, il en résulte que $u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$ sont indépendants de chacune des variables x. C. Q. F. D.

Théorème I. — *Afin qu'il existe au moins une relation linéaire homogène à coefficients constants entre les fonctions* $A_1, A_2, \ldots, A_m$, *il faut et il suffit que tout déterminant* R_m *soit nul.*

Cette condition est nécessaire, car, s'il existe entre $A_1, A_2, \ldots, A_m$ une relation linéaire à coefficients constants, on peut la différentier partiellement par rapport à chaque variable x autant de fois qu'on voudra, et l'on aura ainsi une même relation linéaire entre les éléments de chaque ligne horizontale de tout déterminant R_m, qui, par conséquent, sera égal à zéro. Réciproquement, si tout déterminant R_m est nul, alors il existe une relation linéaire entre $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Effectivement, d'après le lemme, lorsque tout R_m est nul, alors A_m s'exprime au moyen de $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$, à moins que tout R_{m-1} ne soit nul; mais si tout R_{m-1} est nul, alors, par ce même lemme (où l'on aura changé le nombre m en $m-1$), A_{m-1} s'exprime au moyen de $A_1, A_2, \ldots, A_{m-2}$ à moins que tout R_{m-2} ne soit nul, et ainsi de suite. Finalement, on trouve que A_3 s'exprime au moyen de A_1, A_2 à moins que tout R_2 ne soit nul, et dans ce dernier cas on s'assure directement que A_2 est en rapport constant à A_1, puisque, par supposition même,

$$R_2 = \begin{vmatrix} A_1, & A_2 \\ \frac{dA_1}{dx_i}, & \frac{dA_2}{dx_i} \end{vmatrix} = A_1 \frac{dA_2}{dx_i} - A_2 \frac{dA_1}{dx_i} = A_1^2 \frac{d}{dx_i}\left(\frac{A_2}{A_1}\right) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

§ II. — *Conditions pour que les constantes arbitraires d'une expression soient distinctes entre elles.*

Une expression où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des variables indépendantes et $a_1, a_2, \ldots, a_m$ des constantes arbitraires,

$$(1) \qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_n; a_1, a_2, \ldots, a_m),$$

représente l'ensemble infini de fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qu'on obtient en donnant à $a_1, a_2, \ldots, a_m$ toutes les valeurs possibles, et parfois il existe une autre expression

$$(2) \qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_n; b_1, b_2, \ldots, b_k), \quad k < m,$$

contenant moins de constantes que F et qui cependant représente le même ensemble de fonctions. De là les définitions suivantes :

I. *Deux expressions sont* équivalentes *si, en donnant toutes les valeurs possibles à toutes les constantes qui figurent dans l'une, on en déduit toutes les fonctions particulières comprises dans l'autre, et réciproquement.*

II. *Les constantes d'une expression sont* distinctes *lorsqu'il n'existe* *aucune expression avec moins de constantes que la proposée et qui lui soit équivalente.*

Cela posé, nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Afin que les constantes arbitraires $a_1, a_2, \ldots, a_m$ d'une expression* F *soient distinctes, il faut et il suffit qu'il n'existe entre les fonctions*

$$\frac{dF}{da_1}, \frac{dF}{da_2}, \ldots, \frac{dF}{da_m}, \tag{3}$$

aucune relation linéaire homogène à coefficients constants [1].

Pour cela il faut et il suffit que parmi les dérivées partielles de F *par rapport aux variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et dont les ordres ne surpassent pas $(m-1)$, il se trouve au moins un seul système de m fonctions, soit*

$$F, \frac{d^{k_1}F}{dx_\alpha\, dx_{\alpha'} \ldots dx_{\alpha''}}, \frac{d^{k_2}F}{dx_6\, dx_{6'} \ldots dx_{6''}}, \ldots, \frac{d^{k_{m-1}}F}{dx_\gamma\, dx_{\gamma'} \ldots dx_{\gamma''}}, \tag{4}$$
$$k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_{m-1} \leqq (m-1),$$

entre lesquelles il n'existe aucune relation où $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ne figurent pas explicitement [2].

Lorsque $a_1, a_2, \ldots, a_m$ dans (1) ne sont pas distinctes, alors (1) est par définition II équivalente à une expression (2) où le nombre k de constantes est inférieur à m, et par définition I, en donnant dans (1) à $a_1, a_2, \ldots, a_m$ des valeurs déterminées quelconques, la fonction particulière ainsi trouvée peut être également tirée de (2) en y assignant à $b_1, b_2, \ldots, b_k$ des valeurs convenables. En d'autres termes, se donnant

---

(1) Indépendants de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, mais pouvant dépendre de $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

(2) Dans ce cas les fonctions (4) sont dites indépendantes entre elles par rapport à $a_1, a_2, \ldots, a_m$ et, d'après le théorème de Jacobi, le déterminant fonctionnel de (4) par rapport à $a_1, a_2, \ldots, a_m$ est différent de zéro.

arbitrairement $a_1, a_2, \ldots, a_m$, considérant $b_1, b_2, \ldots, b_k$ comme inconnues et posant l'équation

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; b_1, b_2, \ldots, b_k) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n; a_1, a_2, \ldots, a_m),$$

on peut la rendre identique, indépendamment de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Par conséquent on satisfera à cette équation en posant

$$b_i = \varphi_i(b_{l+1}, b_{l+2}, \ldots, b_k, a_1, a_2, \ldots, a_m), \quad (i = 1, 2, \ldots, l),$$

le nombre l étant égal ou inférieur à k; et l'on aura identiquement par supposition

$$\begin{aligned} &f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l, b_{l+1}, b_{l+2}, \ldots, b_k) \\ &\quad = F(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_m). \end{aligned}$$

Dans cette identité les inconnues $b_{l+1}, b_{l+2}, \ldots, b_k$ restées indéterminées ne figurent pas au second membre : donc elles n'entrent au premier qu'en apparence et on peut les y remplacer par des nombres déterminés $b_{l+1}^0, b_{l+2}^0, \ldots, b_k^0$, d'où, en désignant par $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \ldots, \varphi_l^0$ ce que deviennent $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$,

$$\begin{aligned} &f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \varphi_1^0, \varphi_2^0, \ldots, \varphi_l^0, b_{l+1}^0, b_{l+2}^0, \ldots, b_k^0) \\ &\quad = F(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_m), \end{aligned}$$

nouvelle identité qui montre qu'on aura toutes les fonctions particulières comprises dans (1) en donnant à $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \ldots, \varphi_l^0$ toutes les valeurs dont elles sont susceptibles, et pour cela il suffit de laisser arbitraires entre les quantités $a_1, a_2, \ldots, a_m$ un nombre $l < m$.

Ainsi, lorsque les constantes de l'expression (1) ne sont pas distinctes, alors on peut déduire toutes les fonctions particulières comprises dans (1) en laissant au moins à l'une des constantes, soit a_i, une valeur particulière choisie arbitrairement.

Par conséquent, donnant dans (1) à a_i deux valeurs particulières infiniment voisines a_i^0 et $a_i^0 + da_i$,

$$(5) \qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i^0, a_{i+1}, \ldots, a_m),$$

$$(6) \qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i^0 + da_i, a_{i+1}, \ldots, a_m),$$

les deux fonctions trouvées sont équivalentes entre elles, puisque chanune est équivalente à (1).

Réciproquement, si (5) et (6) sont équivalentes entre elles, quelle que soit la valeur particulière a_i^0, alors les constantes dans (1) ne sont pas distinctes.

En effet, donnant dans (1) à a_i une série de valeurs en progression arithmétique de différence da_i, c'est-à-dire toutes les valeurs possibles, on verra de proche en proche que toutes les fonctions obtenues sont équivalentes à (5); donc tout l'ensemble de ces fonctions, c'est-à-dire (1), ne contient aucune fonction particulière qui ne soit comprise dans (5); donc (1) est équivalente à (5) qui a une constante arbitraire de moins, ou, par définition II, les constantes dans (1) ne sont pas distinctes.

Par ce qui précède, la condition nécessaire et suffisante pour que les constantes dans (1) ne soient pas distinctes est que (5) et (6) soient équivalentes entre elles, et pour cela, par définition I, il faut et il suffit qu'en donnant dans (5) aux constantes arbitraires $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_m$ des valeurs particulières quelconques $a_1^0, \ldots, a_{i+1}^0, a_{i-1}^0, \ldots, a_m^0$, le résultat puisse se déduire également de (6) en y assignant à $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_m$ des valeurs infiniment peu différentes $a_1^0 + da_1, \ldots, a_{i-1}^0 + da_{i-1}, a_{i+1}^0 + da_{i+1}, \ldots, a_m^0 + da_m$, et l'on doit avoir, indépendamment de $x_1, \ldots, x_n$

$$\begin{aligned} &F(x_1, \ldots, x_n, a_1^0 + da_1, \ldots, a_i^0 + da_i, \ldots, a_m^0 + da_m) \\ &\quad = F(x_1, \ldots, x_n, a_1^0, a_2^0, \ldots, a_m^0), \end{aligned}$$

se donnant arbitrairement $a_1^0, a_2^0, \ldots, a_m^0$ et déterminant $da_1, da_2, \ldots, da_m$. Négligeant les puissances des différentielles et supprimant les indices zéro, l'équation précédente devient

$$(7) \qquad \frac{dF}{da_1} da_1 + \frac{dF}{da_2} da_2 + \cdots + \frac{dF}{da_m} da_m = 0.$$

Les quantités $da_1, da_2, \ldots, da_m$ sont indépendantes de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et, sous cette réserve, la possibilité de l'équation (7) est la condition nécessaire et suffisante pour que les constantes de l'expression (1) ne soient pas distinctes. Au contraire, pour que ces constantes soient distinctes, il faut et il suffit que l'équation (7) soit impossible, c'est-à-dire, conformément à l'énoncé, qu'il n'existe aucune relation linéaire à coefficients constants entre les fonctions (3).

Pour cela, d'après le théorème I du § I, il faut et il suffit qu'au moins l'un des déterminants R_m formés avec les fonctions (3) soit différent de zéro. Faisant, dans l'expression générale du déterminant R_m au § I,

$$A_1 = \frac{dF}{da_1}, \quad A_2 = \frac{dF}{da_2}, \quad \ldots, \quad A_m = \frac{dF}{da_m},$$

on trouve précisément le déterminant fonctionnel du système (4) par rapport aux constantes $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Par ce qui précède, l'un au moins de ces déterminants de R_m doit être différent de zéro et, en vertu de la proposition de Jacobi sur les déterminants fonctionnels, au moins l'un des systèmes de fonctions, tels que (4), sera indépendant par rapport aux constantes $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

C. Q. F. D.

Remarque. — La limite supérieure $(m-1)$ que le théorème II assigne à l'ordre des dérivées parmi lesquelles doivent nécessairement se trouver les fonctions indépendantes (4) est une limite précise; en effet, la fonction F peut contenir m constantes distinctes sans que, parmi toutes ses dérivées partielles d'ordres ne surpassant pas $(m-2)$, il se trouve un tel système (4).

Par exemple, dans l'expression

$$F = a_1 e^{x_1} + a_2 e^{x_1}(x_2 - x_1) + a_3 e^{x_2}(x_2 - x_1) + a_4 e^{x_2},$$

les $(m = 4)$ constantes sont distinctes, et cependant, parmi les dérivées de F d'ordres ne surpassant pas $(m - 2 = 2)$, il n'existe aucun système (4) de ($m = 4$) fonctions indépendantes. On a en effet

$$F = \frac{dF}{dx_1} + \frac{dF}{dx_2}, \quad \frac{dF}{dx_1} = \frac{d^2F}{dx_1^2} + \frac{d^2F}{dx_1\,dx_2}, \quad \frac{dF}{dx_2} = \frac{d^2F}{dx_2^2} + \frac{d^2F}{dx_1\,dx_2},$$

trois relations entre six fonctions dont quatre ne sauraient être indépendantes.