JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

H.-A. SCHWARZ

Essai d'une démonstration d'un théorème de Géométrie, rédigé sur l'invitation de M. Charles Hermite

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 6 (1880), p. 111-114.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1880_3_6__111_0>

Essai d'une démonstration d'un théorème de Géométrie, rédigé sur l'invitation de M. Charles Hermite;

PAR M. H.-A. SCHWARZ.

Essai d'une démonstration du théorème :

Les coordonnées d'une courbe plane du degré n qui a précisément

$$\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}-2$$

points doubles différents s'expriment rationnellement par un paramètre et par une racine carrée d'une fonction entière du cinquième ou du sixième degré de ce paramètre.

Prenons une courbe plane C_n irréductible, dont

$$F(x, y) = 0$$

soit l'équation, qui ait précisément $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}-2$ points doubles différents.

Premièrement, il sera toujours possible de faire passer par les points doubles et en outre par un point P_0 de la courbe C_n pris arbitrairement une courbe C_{n-3} du degré $n-3$, car le nombre proposé de points

$$\frac{n^2-3n-2}{2}+1$$

n'est pas plus grand que $\frac{(n-3)n}{2}$.

La courbe C_{n-2} rencontre la courbe C_n aux points doubles et en outre aux deux points P_0 et P'_0.

Prenons sur C_n un point différent des points doubles et des deux points P_0, P'_0, et faisons passer par ce point nouveau et par les points doubles de C_n une courbe C'_{n-3} du degré $n-3$. Cette courbe sera différente de la courbe C_{n-3}. Soient $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ les équations des courbes C_{n-3}, C'_{n-3};

$$\varphi_1 - \lambda\varphi_2 = 0$$

sera l'équation d'un faisceau de courbes du degré $n-3$ passant par les points doubles de la courbe C_n et dont chacune a en commun deux points avec C_n. Donc, *à chaque valeur de la variable* λ *correspondront deux points de* C_n, *ou chacun des points de la courbe* C_n *est* conjugué *à un autre et cet autre est conjugué réciproquement au premier*.

Il est nécessaire que les *deux* points d'intersection de la courbe $\varphi_1 - \lambda\varphi_2 = 0$ avec la courbe $F(x, y) = 0$ soient variables avec λ; si l'un d'eux seulement était variable avec λ, l'autre constant, la courbe C_n ou $F(x, y) = 0$ serait une de celles-ci, dont les coordonnées peuvent être exprimées rationnellement par le paramètre λ, et le nombre des points doubles serait $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Prenons *en second lieu* sur la courbe C_n, arbitrairement, n points qui soient différents des points doubles et dont aucun ne soit *conjugué* à un autre de ces n points.

Soit le point P_0 un de ces points, et désignons les autres par P_1, P_2, ..., P_{n-1}.

Faisons passer par les points doubles et par les points $P_0, \ldots, P_{n-1}$ une courbe C_{n-2} du degré $n-2$, ce qui est toujours possible; cette courbe rencontrera la courbe C_n en outre aux *deux* points P_n et P_{n+1}.

Choisissons les points doubles et les points P_3, P_4, ..., P_n, P_{n+1} pour les points fondamentaux d'un faisceau de courbes du degré $n-2$. Une de ces courbes est C_{n-2}; C'_{n-2} en est une autre. Soient $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 0$ les équations des courbes C_{n-2} et C'_{n-2};

$$\psi_1 - \mu\psi_2 = 0$$

sera l'équation du faisceau de courbes du degré $n-2$, dont chacune a *trois* points en commun avec C_n outre les points fondamentaux, et ces points sont tous les trois variables avec le paramètre μ.

Pour éviter la possibilité que le point P_0 fût commun aux courbes C_{n-2} et C'_{n-2}, on pourrait changer la signification des points P_0, P_1, P_2; si l'on a déterminé la courbe C'_{n-2} par un point différent des points P_0, P_1, P_2, la courbe C'_{n-2}, outre les points fondamentaux, ne peut avoir que *deux* de ces trois points en commun avec la courbe C_{n-2}, et l'on pourrait choisir le troisième pour le point P_0; puis on pourrait déterminer de nouveau la courbe C_{n-3}, $\varphi_1 = 0, \ldots$.

Mais on peut démontrer *a posteriori* que cette possibilité n'a pas lieu, car, dans ce cas, chacune des courbes du faisceau $\psi_1 - \mu\psi_2 = 0$ rencontrerait la courbe C_n seulement dans *un* point variable, les coordonnées s'exprimeraient rationnellement par μ et le nombre des points doubles serait $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Parmi les trois points variables qui sont communs à une courbe du faisceau $\psi_1 - \mu\psi_2 = 0$ et à la courbe C_n, on ne trouve pas, en général, une paire de points conjugués, car, si l'on pose $\lambda = 0$, $\mu = 0$, les trois points sont P_0, P_1, P_2, dont aucun n'est, par hypothèse, conjugué à quelqu'un des deux autres.

On peut donc conclure : *A chaque point de C_n, excepté les points doubles et les points fondamentaux, correspond : 1° une seule valeur de λ; 2° une seule valeur de μ.*

A chaque valeur du paramètre λ correspondent DEUX *points de C_n, et par conséquent* DEUX *valeurs du paramètre μ; à chaque valeur du paramètre μ correspondent* TROIS *points de C_n, et par conséquent* TROIS *valeurs du paramètre λ.*

Cette correspondance est définie par une équation algébrique entre les variables λ et μ, qui est du deuxième degré pour μ et du troisième degré pour λ :

$$G(\lambda, \mu) = \chi_1\mu^2 + 2\chi_2\mu + \chi_3 = 0,$$

où χ_1, χ_2, χ_3 sont des fonctions entières du paramètre λ du troisième degré.

Outre les solutions qui correspondent aux points doubles et qui ne dépendent pas des valeurs des paramètres λ et μ, les équations

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \lambda\varphi_2 &= 0, \\ \psi_1 - \mu\psi_2 &= 0, \\ F(x,y) &= 0, \\ G(\lambda.\,\mu) &= 0, \end{aligned}$$

ont, en général, *une seule solution* (x, y) en commun, car, si l'on pose $\lambda = 0$, $\mu = 0$, le point P_0 est le seul point qui soit commun aux courbes $\varphi_1 = 0$, $\psi_1 = 0$, $F = 0$, outre les points doubles.

Par cette raison, d'après un théorème connu, les coordonnées x, y du seul point variable qui soit commun aux courbes

$$F(x,y) = 0, \quad \varphi_1 - \lambda\varphi_2 = 0, \quad \psi_1 - \mu\psi_2 = 0,$$

où les variables λ, μ sont liées entre elles par l'équation $G(\lambda, \mu) = 0$, s'expriment rationnellement par les paramètres λ et μ, c'est-à-dire par λ et la racine carrée $\sqrt{\chi_2^2 - \chi_1\chi_3}$ d'une fonction entière du cinquième ou du sixième degré, ce qu'il fallait démontrer.