JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ESCARY

Généralisation des fonctions X_n de Legendre au cas de deux entiers, ou des fonctions qui naissent du développement des expressions $\left[1-2\alpha x+\alpha^2\right]^{\pm\frac{2l+1}{2}}$

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 5 (1879), p. 47-68.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1879_3_5__47_0>

Généralisation des fonctions X_n de Legendre au cas de deux entiers, ou des fonctions qui naissent du développement des expressions

$$[1 - 2\alpha x + \alpha^2]^{\pm\frac{2l+1}{2}};$$

Par M. ESCARY,

Professeur au Lycée de Tarbes.

---

§ I.

Considérons l'expression

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{\frac{2l+1}{2}},$$

dans laquelle on a $\alpha < 1$ et x inférieur à l'unité en valeur absolue. Cette expression est une puissance entière, impaire et négative du potentiel. On est donc naturellement conduit à se demander, tout d'abord, si la propriété caractéristique de cette dernière fonction persiste dans la première, ou à rechercher si son paramètre différentiel du second ordre est nul.

A cet effet, si l'on revient aux coordonnées rectangles, et qu'on pose

$$P = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{\frac{2l+1}{2}},$$

on trouve sur-le-champ

$$\frac{\partial^{2l+1} P}{\partial x^{l+1}} + \frac{\partial^{2l+1} P}{\partial y^{l+1}} + \frac{\partial^{2l+1} P}{\partial z^{2l+1}} = 0.$$

Dans le cas de l'exposant $\frac{2l+1}{2}$ négatif, et en posant

$$\frac{1}{P} = Q,$$

on voit qu'on obtiendra la même équation aux dérivées partielles, de l'ordre $2l+4$, en Q.

Dans le calcul de ces deux équations aux dérivées partielles, on observe que leur existence tient précisément à ce que P est une puissance, *entière, impaire et négative du potentiel.* Cette circonstance nous conduit donc, lors de l'exposant $\frac{2l+1}{2}$ négatif, et en désignant par V l'inverse de la distance de deux points, à poser

$$P = V^{-(2l+1)}.$$

On en conclut

$$\Delta_2 P = V^{2l} \Delta_2 V = 0,$$

en posant, pour abréger,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \Delta_2 F.$$

En posant $U = \frac{1}{V}$, et faisant

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 F}{\partial z^4} = \Delta_4 F,$$

on conclut de même immédiatement

$$\Delta_4 Q = U^{2l} \Delta_4 U = 0.$$

Nous voyons donc ainsi que les diverses puissances impaires de la distance de deux points peuvent se classer en deux catégories. La première catégorie, dont la forme générale est $P = V^{-(2l+1)}$, et dont le paramètre différentiel du second ordre est nul, comprend les puissances impaires et positives du potentiel. La seconde catégorie, dont la forme générale est $Q = U^{2l+1}$, et dont le paramètre différentiel du quatrième ordre est nul, comprend les puissances impaires et négatives de la même fonction.

Sous ce premier point de vue, V et U sont donc les éléments simples auxquels il convient de rattacher toutes les puissances impaires successives de la distance de deux points. Maintenant, il paraît intéressant de rechercher si, dans la généralisation des X_n de Legendre, *au cas de deux entiers,* et qui résulte du développement des expressions

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{\pm\frac{2l+1}{2}},$$

ordonné suivant les puissances ascendantes de α, les analogies de propriétés analytiques avec ces polynômes célèbres se conservent complétement, et, dans le cas contraire, de trouver les inégalités auxquelles l'exposant $\frac{2l+1}{2}$ doit satisfaire pour qu'il en soit ainsi.

§ II.

Nous allons d'abord considérer le développement

$$(a)\quad (1 - 2\alpha x + \alpha^2)^\mu = X_\mu^{(0)} + X_\mu^{(1)}\alpha + X_\mu^{(2)}\alpha^2 + \ldots + X_\mu^{(n)}\alpha^n + \ldots,$$

qui nous sera utile dans la suite, et dans lequel μ est un nombre quelconque positif ou négatif. Le polynôme général $X_\mu^{(n)}$ a pour valeur

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} X_\mu^{(n)} = (-1)^n 2^n &\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3.4\ldots n} \\ \times\Big[x^n &+ \frac{n(n-2)}{2.2(\mu-n+1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2.2.4(\mu-n-1)(\mu-n+2)}x^{n-4} \\ &+ \frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{2^3.2.4.6(\mu-n+1)\ldots(\mu-n+3)}x^{n-6} + \ldots\Big].\end{aligned}\right.$$

Si l'on désigne par γ un angle réel compris entre zéro et π, que l'on pose $x = \cos\gamma$, et qu'on remplace $X_\mu^{(n)}$ par $P_\mu^{(n)}$, la formule (1) prend l'une des quatre formes suivantes, selon la manière dont on dirige le développement :

$$\mathrm{P}_\mu^{(n)}=(-1)^n 2^n \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3.4\ldots n}\left[\cos^n\gamma+\frac{n(n-1)}{2.2(\mu-n+1)}\cos^{n-2}\gamma\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2.2.4(\mu-n+1)(\mu-n+2)}\cos^{n-4}\gamma+\ldots\right],$$

$$\mathrm{P}_\mu^{(n)}=(-1)^n\left[\frac{2\mu(2\mu-1)(2\mu-2)\ldots(2\mu-n+1)}{1.2.3.4\ldots n}-\frac{\mu(2\mu-2)(2\mu-3)\ldots(2\mu-n)}{1\quad 1.2.3\ldots n-1}4\sin^2\frac{\gamma}{2}\right.$$
$$\left.+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\cdot\frac{(2\mu-4)(2\mu-5)\ldots(2\mu-n-1)}{1.2.3\ldots n-2}4^2\sin^4\frac{\gamma}{2}-\ldots\right],$$

$$\mathrm{P}_\mu^{(n)}=\frac{2\mu(2\mu-1)(2\mu-1)\ldots(2\mu-n+1)}{1.2.3.4\ldots n}-\frac{\mu}{1}\frac{(2\mu-2)(2\mu-3)\ldots(2\mu-n)}{1.2.3\ldots n-1}4\cos^2\frac{\gamma}{2}$$
$$+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\frac{(2\mu-4)(2\mu-5)\ldots(2\mu-n-1)}{1.2.3\ldots n-2}4^2\cos^4\frac{\gamma}{2}-\ldots,$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{P}_\mu^{(n)}=(-1)^n\left[\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3.4\ldots n}\cos n\gamma\right.$$
$$+\frac{\mu}{1}\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+2)}{1.2.3\ldots n-1}\cos(n-2)\gamma$$
$$\left.+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+3)}{1.2.3\ldots n-2}\cos(n-4)\gamma+\ldots\right].$$

Enfin, trois fonctions consécutives du développement (a) vérifient la relation linéaire

$$(2)\quad n\mathrm{X}_\mu^{(n)}-(2n-2\mu-2)\mathrm{X}_\mu^{(n-1)}+(n-2\mu-2)\mathrm{X}_\mu^{(n-2)}=0.$$

Cette équation s'obtient aisément, et montre que les polynômes (1) remplissent l'office des fonctions de Sturm quand le nombre μ satisfait à l'inégalité

$$(b)\qquad \mu<\frac{n-2}{2}.$$

§ III.

La différentiation *par rapport à x, l fois répétée,* des deux membres de l'égalité

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{2^n\Gamma(n+1)}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\alpha^n,$$

donne sur-le-champ

$$(3) \qquad (1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{2l+1}{2}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} X^{(n)}_{-\frac{2l+1}{2}} \alpha^n,$$

en posant, pour abréger,

$$(4) \qquad \frac{\Gamma(l+1)}{2^n \Gamma(2l+1)\Gamma(n+l+1)} \frac{d^{n+2l}(x^2-1)^{n+l}}{dx^{n+2l}} = X^{(n)}_{-\frac{2l+1}{2}},$$

et divisant, après chaque différentiation, les deux membres de l'égalité précédente par $(2m-1)\alpha$, m indiquant l'ordre de la dérivation effectuée. Le développement (3) est d'ailleurs évidemment convergent dans la même étendue que celui dont il est déduit par voie de différentiation. Sous cette forme (4), on voit immédiatement, par le théorème de Rolle, que l'équation

$$X^{(n)}_{-\frac{2l+1}{2}} = 0$$

a toutes ses racines réelles, inégales et comprises entre deux nombres moindres que l'unité.

La relation (2) entre trois fonctions consécutives devient, dans le cas actuel,

$$(2\ bis) \quad nX^{(n)}_{-\frac{1}{2}} - (2n + 2l - 1)xX^{(n-1)}_{-\frac{2l+1}{2}} + (n + 2l - 1)X^{(n-2)}_{-\frac{2l+1}{2}} = 0.$$

On trouve encore, sans difficulté, qu'une même fonction et ses deux premières dérivées du développement (3) vérifient l'équation linéaire

$$(5) \qquad (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2(l+1)x\frac{dy}{dx} + n(n+2l+1)y = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$(6) \qquad y = AX^{(n)}_{-\frac{2l+1}{2}} + BX^{(n)}_{-\frac{2l+1}{2}} \int \frac{dx}{\left(X^{(n)}_{-\frac{2l+1}{2}}\right)^2 (1-x^2)^{l+1}},$$

A et B étant deux constantes arbitraires.

Au moyen de l'intégration par parties, on conclut aisément

$$(7) \qquad \int_{-1}^{+1} X^{(\nu)}_{-\frac{2l+1}{2}} X^{(n)}_{-\frac{2l+1}{2}} dx = 0,$$

quand ν est différent de n; et, en se servant de la relation (2 *bis*) entre trois fonctions consécutives, et en ayant égard au théorème précédent (7), on a, dans le cas de $\nu = n$,

$$(8) \qquad \int_{-1}^{+1} \left(X^{(n)}_{-\frac{2l+1}{2}}\right)^2 dx = 2\frac{2l+1}{2n+2l+1} \frac{(n+2l)(n+2l-1)\ldots(2l+1)}{1.2.3.4\ldots n}.$$

Le développement (3) a été donné, pour la première fois, sous une forme équivalente, par M. Heine (*Journal de Crelle*, t. LXII, p. 110). Ce géomètre a encore considéré plusieurs autres cas où l'exposant μ, entier ou fractionnaire, est *toujours négatif*. Nous nous attacherons plus particulièrement aux deux catégories d'expressions que nous avons tout d'abord indiquées, en nous bornant, pour les autres cas, à ce qui nous sera directement nécessaire. L'équation différentielle (5) a été obtenue par Lamé dans le cas où l'on a $y = X^{(n-l)}_{-\frac{2l+1}{2}}$ (*Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et les surfaces isothermes*, p. 233), et l'éminent géomètre en a trouvé l'intégrale particulière entière, laquelle était seule utile pour le but qu'il poursuivait. Il l'a exprimée au moyen d'un polynôme entier. Les autres résultats que nous venons d'obtenir ne paraissent pas avoir été remarqués jusqu'ici, du moins que nous sachions.

§ IV.

L'intégration *entre les limites x et -1, $l+1$ fois répétée*, des deux membres de l'égalité

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{2^n \Gamma(\mu+1)} \cdot \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n},$$

multipliée préalablement par $(2m-1)\alpha dx$, m indiquant l'ordre de l'intégration à effectuer, donne immédiatement

$$(9)\qquad (1-2\alpha x+\alpha^2)^{\frac{2l+1}{2}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} X^{(n)}_{\frac{2l+1}{2}}\alpha^n,$$

en posant, pour abréger et à partir du terme de rang $2l+3$,

$$(10)\qquad (-1)^{l+1}\frac{\Gamma(2l+3)}{2^n\Gamma(l+2)\Gamma(n-l)}\frac{d^{n-2l-2}(x^2-1)^{n-l-1}}{dx^{n-2l-2}} = X^{(n)}_{\frac{2l+1}{2}}.$$

En particulier, le coefficient de α^{2l+2} est

$$(11)\qquad (-1)^{l+1}\frac{\Gamma(2l+3)}{2^{2l+2}\Gamma(l+2)\Gamma(l+2)}(x^2-1)^{l+1} = X^{(2l+2)}_{\frac{2l+1}{2}}.$$

On voit donc ainsi que les coefficients des diverses puissances de α, qui précèdent le terme de rang $2l+3$, ne se trouvent plus représentés par des expressions différentielles. L'inégalité (b) devient, dans le cas actuel,

$$n > 2l+3,$$

et l'on observe encore que la propriété curieuse de ces polynômes de remplir l'office des fonctions de Sturm se perd en même temps que celle d'être représentés par des expressions différentielles.

Sous les formes (10) et (11), on voit que l'équation

$$X^{(2l+2)}_{\frac{2l+1}{2}} = 0$$

a toutes ses racines réelles et égales à l'unité en valeur absolue, et que généralement l'équation

$$X^{(n)}_{\frac{2l+1}{2}} = 0$$

$l+1$ racines égales à $+1$, $l+1$ égales à -1, et $n-2l-2$ réelles, inégales et comprises entre -1 et $+1$.

§ V.

Dans cette hypothèse de $n > 2l + 3$, la relation (2) entre trois fonctions consécutives s'écrit

$$(2\ ter)\quad n X^{(n)}_{\frac{2l+1}{2}} - (2n - 2l - 3) x X^{(n-1)}_{\frac{2l+1}{2}} + (n - 2l - 3) X^{(n-2)}_{\frac{2l+1}{2}} = 0.$$

Une même fonction $X^{(n)}_{\frac{2l+1}{2}}$ et ses deux premières dérivées vérifient l'équation différentielle linéaire

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + 2lx\frac{dy}{dx} + n(n - 2l - 1)y = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$y = M X^{(n)}_{\frac{2l+1}{2}} + N X^{(n)}_{\frac{2l+1}{2}} \int \frac{(1-x^2)^l dx}{\left(X^{(n)}_{\frac{2l+1}{2}}\right)^2},$$

M et N étant deux constantes arbitraires.

L'intégration par parties conduit sur-le-champ au théorème

$$(12)\qquad \int_{-1}^{+1} X^{(\nu)}_{\frac{2l+n}{2}} X^{(n)}_{\frac{2l+1}{2}} d_1 x = 0,$$

pour ν différent de n. En se servant de la relation (2 *ter*) entre trois fonctions consécutives, et en ayant égard au théorème précédent (12), on a, dans le cas de $\nu = n$,

$$(13)\int_{-1}^{+1}\left(X^{(n)}_{\frac{2l+1}{2}}\right)^2 dx = -2\frac{2l+1}{2n-2l-1}\,\frac{(n-2l-2)(n-2l-3)\ldots(-2l-1)}{1.2.3.4\ldots n}.$$

§ VI.

Si nous revenons à la valeur générale (1) du polynôme $X^{(n)}_\mu$ et que nous y fassions $n = \mu$, nous obtenons

$$(14)\quad X^{(\mu)}_\mu = (-1)^\mu 2^\mu\left[x^\mu + \frac{\mu(\mu-1)}{2.2}x^{\mu-2} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{2^2.2.4.1.2}x^{\mu-4} + \ldots\right].$$

Or ce polynôme, ayant tous ses termes de même signe et de même parité, ne peut s'annuler pour aucune valeur réelle de x, sauf pour la valeur zéro quand il est de degré impair. La même conclusion subsiste *a fortiori* lorsque μ, étant supposé entier, est supérieur à n. Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

THÉORÈME I. — *Dans le cas de l'exposant μ entier et positif, l'équation*

$$X_\mu^{(\nu)} = 0,$$

dans laquelle on a $\nu \leqq \mu$, a toutes ses racines imaginaires conjuguées, sauf une racine nulle, quand elle est de degré impair.

A l'inspection de la valeur (14) du polynôme $X_\mu^{(\mu)}$, on voit que ce théorème subsiste dans le cas de μ positif et fractionnaire, pourvu que l'entier n soit inférieur ou égal au plus grand entier contenu dans μ.

Dans le cas de l'exposant μ entier et positif, le développement (a) a un nombre limité de termes ; de plus, le premier et le dernier de ces termes sont du degré zéro en x. Cette dernière remarque conduit à soupçonner l'existence du théorème suivant, qui d'ailleurs est presque évident :

THÉORÈME II. — *Dans le développement de l'expression*

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^\mu,$$

ordonné suivant les puissances ascendantes de α, lors de l'exposant μ entier et positif, les polynômes $X_\mu^{(n)}$ équidistants des extrêmes sont identiquement égaux.

En effet, cela résulte de ce que l'on a identiquement

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^\mu = (\alpha^2 - 2\alpha x + 1)^\mu$$

dans l'hypothèse de μ entier et positif. On en conclut l'identité

$$X_\mu^{(\mu-p)} = X_\mu^{(\mu+p)}.$$

Par conséquent, le développement précédent a toujours un nombre impair de termes et renferme, par suite, un polynôme $X_\mu^{(\mu)}$ de degré plus élevé que tous les autres.

§ VII.

Si maintenant on traite l'exposant μ comme un paramètre arbitraire et qu'on le fasse passer d'une manière continue par toutes les valeurs positives, il résulte du théorème précédent, rapproché de la valeur générale (1) (§ II) du polynôme $X_\mu^{(n)}$, que les polynômes $X_\mu^{(2l)}$ et $X_\mu^{(2l-1)}$, dans lesquels on fait tendre μ, supposé fractionnaire et inférieur à l, vers cet entier, ont chacun à la limite, lorsqu'on les égale à zéro, $2l$ et $2l-2$ racines infinies respectivement, le dernier ayant en outre une racine nulle. Car on sait que, quand une équation algébrique de degré $2l$ s'abaisse au degré zéro, par suite de la variation continue de ses coefficients, toutes ses racines deviennent infinies. Les polynômes $X_\mu^{(2l-2)}$ et $X_\mu^{(2l-3)}$, égalés à zéro, dans la même hypothèse, ont chacun un couple de racines imaginaires conjuguées, avec $2l-4$ et $2l-6$ racines réelles infinies respectivement, le dernier ayant en outre une racine nulle, et ainsi de suite.

Le paramètre μ croissant encore d'une unité, les polynômes $X_\mu^{(n)}$ de degré impair, dont il a été question dans le théorème précédent, deviennent de degré pair ; et ceux dont le degré n est compris entre μ et 2μ se trouvent avoir échangé par cet accroissement, lorsqu'on les égale à zéro, et d'après le théorème II, deux de leurs racines réelles en un couple de racines imaginaires conjuguées. Ils ont acquis en même temps une nouvelle racine réelle. En résumé, par l'accroissement d'une unité de l'entier positif μ, les polynômes $X_\mu^{(n)}$ égalés à zéro, et dont le degré est impair et compris entre μ et 2μ, ont gagné deux racines imaginaires conjuguées et en ont perdu une réelle qui était nulle. Les polynômes dont le degré est pair et compris entre μ et 2μ acquièrent une racine réelle nulle et éprouvent d'ailleurs absolument la même modification que ceux de degré impair.

Il est facile de constater qu'en passant du réel à l'imaginaire par l'infini les racines de ces polynômes égalés à zéro passent par l'égalité. En effet, considérons l'équation du second degré

$$X_\mu^{(2)} = 0,$$

et le cas où μ converge vers l'unité par des valeurs croissantes. En supprimant les facteurs indépendants de x et posant

$$x = \frac{1}{y},$$

on a

$$y^2 - 2(1-\mu) = 0,$$

équation qui a deux racines égales pour $\mu = 1$. Donc les racines de l'équation $X_\mu^{(2)} = 0$ deviennent égales au moment où elles deviennent infinies.

§ VIII.

Nous avons vu que l'équation

$$X_{\frac{2l+1}{2}}^{(2l+2)} = 0$$

a ses racines égales à l'unité en valeur absolue, et que celles de l'équation

$$X_l^{(2l)} = 0$$

sont infinies. Il en résulte que les racines de l'équation

$$X_\mu^{(2l+1)} = 0,$$

dans le cas où μ est compris entre l et $l+\frac{1}{2}$, sont toutes réelles et supérieures à l'unité en valeur absolue.

Enfin il suit encore de cette discussion que, lorsque μ, supposé fractionnaire, est compris entre l et $l+1$, les polynômes $X_\mu^{(2l)}$ et $X_\mu^{(2l-1)}$, égalés à zéro, ont chacun un couple de racines imaginaires conjuguées avec $2l-2$ et $2l-4$ racines réelles et supérieures à l'unité; que les polynômes $X_\mu^{(2l-2)}$, $X_\mu^{(2l-3)}$, ..., égalés à zéro, ont chacun, dans cette même hypothèse, $2l-6$, $2l-8$, ... racines réelles et supérieures à l'unité. Les polynômes de degré impair renferment, en outre, une racine nulle.

Remarque. — Le théorème de Sturm est propre à séparer les racines de l'équation

$$X_\mu^{(n)} = 0,$$

pourvu que l'inégalité (b) soit satisfaite; par conséquent, pour μ entier ou fractionnaire, mais inférieur à $+1$, l'équation précédente a toutes ses racines réelles et inégales.

§ IX.

Il existe encore quelques relations entre deux ou entre trois polynômes consécutifs $X_\mu^{(n)}$, qui ont lieu pour toutes les valeurs de μ, et, par conséquent, quelle que soit la nature des racines de ces polynômes. Voici d'abord une équation entre deux fonctions consécutives:

$$x\frac{dX_\mu^{(n)}}{dx} - \frac{dX_\mu^{(n-1)}}{dx} = nX_\mu^{(n)},$$

qu'on trouve aisément, et qui est indépendante de μ explicitement.

On trouve encore immédiatement

$$\frac{dX_\mu^{(n+1)}}{dx} - 2x\frac{dX_\mu^{(n)}}{dx} + \frac{dX_\mu^{(n-1)}}{dx} + 2\mu X_\mu^{(n)} = 0.$$

Cette équation, combinée avec la précédente, donne

$$\frac{dX_\mu^{(n+1)}}{dx} - \frac{dX_\mu^{(n-1)}}{dx} - 2(n-\mu)X_\mu^{(n)} = 0,$$

relation qui fournit, pour $\mu = n$, une seconde démonstration du théorème II.

Si, dans cette équation, on change successivement n en $n-2, n-4, n-6, \ldots,$ et qu'on ajoute les équations ainsi obtenues, on trouve

$$\frac{dX_\mu^{(n+1)}}{dx} = 2(n-\mu)X_\mu^{(n)} + 2(n-\mu-2)X_\mu^{(n-2)} + 2(n-\mu-4)X_\mu^{(n-4)} + \ldots.$$

§ X.

Résumons. Le développement de la fonction $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^\mu$, ordonné suivant les puissances ascendantes de α, et dans lequel μ peut passer par toutes les valeurs depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, donne naissance, au point de vue de l'espèce des racines, à cinq catégories de polynômes :

La première catégorie, obtenue en attribuant à μ toutes les valeurs inférieures à l'unité, se compose de polynômes dont toutes les racines sont réelles et inégales.

La deuxième catégorie se compose de polynômes dont le degré est inférieur ou égal à μ, supposé positif. Toutes leurs racines sont imaginaires.

La troisième catégorie se compose de polynômes dont le degré est compris entre μ et 2μ, μ étant supposé positif. Leurs racines sont en partie réelles et supérieures à l'unité, et en partie imaginaires.

La quatrième catégorie se compose de polynômes dont le degré est $2l+1$, tandis que μ est compris entre l et $l+\frac{1}{2}$. Leurs racines sont réelles et supérieures à l'unité.

La cinquième catégorie se compose des polynômes dont le degré n'est pas inférieur à $2l+2$, tandis que μ n'est pas supérieur à $\frac{2l+1}{2}$. Leurs racines sont en partie réelles et égales à l'unité en valeur absolue, et en partie réelles, inégales et comprises entre -1 et $+1$.

§ XI.

On aperçoit immédiatement une application intéressante de l'analyse précédente, dans l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre de la théorie analytique de la chaleur, lors de l'état stationnaire. Cette application concerne les problèmes de la sphère et des deux ellipsoïdes de révolution. Le facteur $P_l^{(n)}$ de Lamé relatif à la latitude, dans le probleme de la sphère (*Leçons sur les fonctions inverses*, etc., p. 229), ainsi que ses analogues dans les deux ellipsoïdes de révolution, se met sous la forme d'une expression différentielle. La forme de ce résultat avait été indiquée par M. Liouville en 1846; mais nous donnons ici une génération uniforme de ces expressions, et nous indiquons d'une manière précise la nature des fonctions simples qui les composent.

D'abord, pour la sphère, on a

$$P_l^{(n)} = (1-\mu^2)^{\frac{l}{2}} M^{(n-l)}_{\frac{2l+1}{2}},$$

en posant, pour abréger,

$$M^{(n-l)}_{\frac{2l+1}{2}} = \frac{\Gamma(l+1)}{2^{n-l}\Gamma(2l+1)\Gamma(n+1)} \frac{d^{n+l}(\mu^2-1)^n}{d\mu^{n+l}}.$$

On voit, par cette forme du facteur $M^{(n-l)}_{\frac{2l+1}{2}}$, que l'entier l est essentiellement positif, et toujours inférieur ou égal à n. Trois fonctions consécutives $P_l^{(n)}$, $P_l^{(n-1)}$, $P_l^{(n-2)}$, dans lesquelles l reste constant, satisfont à la relation

$$(1)\quad (1-\mu^2)^{\frac{l}{2}}\left[(n-l)M^{(n-l)}_{\frac{2l+1}{2}} - (2n-1)\mu M^{(n-l-1)}_{\frac{2l+1}{2}} + (n+l-1)M^{(n-l-2)}_{\frac{2l+1}{2}}\right] = 0.$$

L'intégration par parties donne le théorème

$$(2)\qquad \int_{-1}^{+1} P_l^{(n)} P_l^{(\nu)} d\mu = 0,$$

quand ν est différent de n. En se servant de ce théorème (2) et de la relation (1), entre trois fonctions consécutives, on trouve, dans le cas de $\nu = n$, d'abord

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1}[P_l^{(n)}]^2 d\mu &= \int_{-1}^{+1}(1-\mu^2)^l\left[M^{(n-l)}_{\frac{2l+1}{2}}\right]^2 d\mu \\ &= \frac{2l+1}{2n+1}\,\frac{(n+l)(n+l-1)\ldots 2l+1}{1.2.3.4\ldots n-l}\int_{-1}^{+1}(1-\mu^2)^l d\mu;\end{aligned}$$

ensuite, en achevant l'intégration,

$$(3)\quad \int_{-1}^{+1}[P_l^{(n)}]^2 d\mu = 2\,\frac{2l+1}{2n+1}\,\frac{n+l.n+l-1\ldots 2l+1}{1.2.3.4\ldots n-l}\,\frac{2.4.6\ldots 2l}{3.5.7\ldots 2l+1}.$$

Cette valeur (3), que Lamé désigne par la notation $p_l^{(n)}$, est celle qui convient aux expressions des constantes arbitraires $G_l^{(n)}$ et $H_l^{(n)}$, et, par suite, à l'expression V de la température. C'est encore cette valeur de $p_l^{(n)}$ qui entre dans l'expression du développement en série d'une fonction arbitraire $F(\psi, \mu)$ des coordonnées sphériques ψ et μ. On voit, par les considérations précédentes, que les termes de la série capable de représenter cette fonction acquièrent une signification analytique précise et appropriée à l'étude ultérieure des particularités qu'elle peut offrir.

§ XII.

Dans les ellipsoïdes de révolution, Lamé a ramené l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, exprimant l'équilibre de température, à l'intégration d'équations aux différentielles ordinaires. Il a atteint ce résultat au moyen d'un heureux choix de variables ou de coordonnées. Dans l'ellipsoïde de révolution planétaire, il ramène l'intégration à celle des deux équations différentielles

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d(1-x^2)\frac{dP}{dx}}{dx} &= \left[\frac{l^2}{1-x^2} - n(n+1)\right]P,\\ \frac{d(1+x^2)\frac{dR}{dx}}{dx} &= \left[n(n+1) - \frac{l^2}{1+x^2}\right]R, \end{aligned}\right.$$

dans lesquelles on a posé

$$\frac{\lambda'}{c} = x = \frac{\mathcal{E}(\beta)}{E(\beta)}$$

pour la première, et

$$\frac{\rho'}{c} = x = \operatorname{tang}\gamma$$

pour la seconde; β et γ sont les paramètres thermométriques, à savoir :

$$\beta = c\int_0^{\lambda'} \frac{d\lambda'}{c^2-\lambda'^2},$$

$$\gamma = c\int_0^{\rho'} \frac{d\rho'}{\rho'^2+c^2}.$$

Les intégrales générales des équations (4), lorsqu'on y remplace P par $(1-x^2)^{\frac{l}{2}}X$ et R par $(1+x^2)^{\frac{l}{2}}U$, sont

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} y = AX^{(n-l)}_{\frac{2l+1}{2}} + BX^{(n-l)}_{\frac{2l+1}{2}}\displaystyle\int\frac{dx}{\left[X^{(n-l)}_{\frac{2l+1}{2}}\right]^2(1-x^2)^{l+1}} \\ \text{et} \\ y = A'U^{(n-l)}_{\frac{2l+1}{2}} + B'U^{(n-l)}_{\frac{2l+1}{2}}\displaystyle\int\frac{dx}{\left[U^{(n-l)}_{\frac{2l+1}{2}}\right]^2(1+x^2)^{l+1}}. \end{array}\right.$$

Les polynômes $X^{(n-l)}_{\frac{2l+1}{2}}$, qui composent la première intégrale (13), sont les coefficients du développement de l'expression

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{2l+1}{2}},$$

ordonné suivant les puissances croissantes de α. Ce développement est convergent, d'après la règle connue de convergence de la série de Lagrange, tant que l'on a $x < 1$, c'est-à-dire tant que x reste dans le champ de variation assigné par sa définition analytique.

Le facteur P de Lamé a encore ici pour valeur

$$P_l^{(n)} = (1-x^2)^{\frac{l}{2}} X^{(n-l)}_{\frac{2l+1}{2}},$$

et se trouve mis sous forme d'expression différentielle. Les propriétés analytiques sont celles de la fonction $P_l^{(n)}$ relative à la sphère. Le facteur R se met également sous la forme

$$R_l^{(n)} = (1+x^2)^{\frac{l}{2}} U^{(n-l)}_{\frac{2l+1}{2}},$$

et il convient alors aux points intérieurs de l'ellipsoïde. La deuxième intégrale particulière, qui est fractionnaire, ne peut s'annuler pour aucune valeur réelle de x. Elle se rapporte, ainsi que M. Liouville en a fait la remarque (*Lettres à Blanchet, Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XI), à l'occasion de l'ellipsoïde à trois axes inégaux, aux points extérieurs au corps solide. D'ailleurs le polynôme $U^{(n-l)}_{-\frac{2l+1}{2}}$ est le coefficient de α^{n-l} dans le développement de l'expression

$$(1 - 2\alpha i x + \alpha^2)^{-\frac{2l+1}{2}},$$

ordonné suivant les puissances ascendantes de α.

Si, au lieu de prendre pour variables indépendantes des facteurs P et R les paramètres géométriques demi-axes polaires $\lambda' = cx$ et $\rho' = cx$, on prend $\lambda = \sqrt{c^2 - \lambda'^2}$ et $\rho = \sqrt{\rho'^2 - c^2}$, les équations différentielles (4) se transforment en

$$(4\,bis)\quad \begin{cases} (\lambda^4 - c^2\lambda^2)\dfrac{d^2P}{d\lambda^2} + (2\lambda^3 - c^2\lambda)\dfrac{dP}{d\lambda} = (h\lambda^2 - l^2c^2)P, \\ (\rho^4 - c^2\rho^2)\dfrac{d^2R}{d\rho^2} + (2\rho^3 - c^2\rho)\dfrac{dR}{d\rho} = (h\rho^2 - l^2c^2)R. \end{cases}$$

Dans ces équations, on a mis h au lieu de $n(n+1)$, et les paramètres λ et ρ sont les fonctions inverses des transcendantes

$$\beta = c\int_\lambda^c \frac{d\lambda}{\lambda\sqrt{c^2 - \lambda^2}},$$
$$\gamma = c\int_c^\rho \frac{d\rho}{\rho\sqrt{\rho^2 - c^2}}.$$

Les intégrales générales de ces équations (4 *bis*) se déduiront des valeurs (5), en y remplaçant, après avoir effectué les différentiations indiquées, x par $\sqrt{1 - x^2}$ dans la première, et par $\sqrt{x^2 - 1}$ dans la seconde. Les nouvelles variables x ont pour valeurs $x = \frac{\lambda}{c} = \frac{1}{E(\beta)}$ pour la première, et $x = \frac{\rho}{c} = \operatorname{séc}\gamma$ pour la seconde. Les facteurs P et R s'obtiendront en fonction des nouvelles variables, en effectuant sur leurs valeurs, données plus haut, les mêmes changements ou substitutions.

§ XIII.

Le développement, par la formule de Lagrange, de la plus petite des racines de l'équation du second degré

$$u = ix + \alpha \frac{u^2 - 1}{2}$$

donne immédiatement

$$(1 - 2\alpha ix + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{i^{2n-1}}{2^n \Gamma(n+1)} \frac{d^n (x^2+1)^n}{dx^n} \alpha^n.$$

Le module d'une imaginaire étant positif, il résulte, des conditions connues de convergence de la formule de Lagrange, que ce développement est convergent dans toute l'étendue du plan. On peut d'ailleurs observer qu'il est égal à la somme de deux séries à termes alternativement positifs et négatifs, lesquels finissent toujours par être constamment et indéfiniment décroissants, et alors la règle de Leibnitz suffit pour conclure la convergence.

La différentiation *par rapport à x, l fois répétée,* des deux membres de l'équation précédente, conduit au développement suivant :

$$(1 - 2\alpha ix + \alpha^2)^{-\frac{2l+1}{2}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{U}^{(n)}_{-\frac{2l+1}{2}} \alpha^n,$$

également convergent, *a fortiori,* dans toute l'étendue du plan, et où l'on a posé, pour abréger,

$$\mathrm{U}^{(n)}_{-\frac{2l+1}{2}} = \frac{\Gamma(l+1)\, i^{2n+l-1}}{2^n \Gamma(2l+1)\, \Gamma(n+l+1)} \frac{d^{n+2l}(x^2+1)^{n+l}}{dx^{n+2l}}.$$

Sous cette forme, le théorème de Rolle, étendu par M. Liouville aux racines imaginaires des équations (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 2e série, t. IX, p. 84), suffit pour montrer que l'équation

$$\mathrm{U}^{(n)}_{-\frac{2l+1}{2}} = 0$$

a toutes ses racines imaginaires, inégales et comprises dans l'intérieur d'un cercle dont le rayon est inférieur à l'unité. On voit, de plus, que les points racines de cette équation sont tous situés sur la partie de l'axe des y comprise dans l'intérieur du même cercle.

Trois fonctions consécutives de ce dernier développement satisfont à la relation suivante, où l'on a fait disparaître le signe imaginaire i en divisant par i^{2n+l-3} et remplaçant i^2 par -1 :

$$(6)\qquad n\,U^{(n)}_{-\frac{2l+1}{2}} - (2n+2l-1)x\,U^{(n-1)}_{-\frac{2l+1}{2}} - (n+2l-1)\,U^{(n-2)}_{-\frac{2l+1}{2}} = 0.$$

Une même fonction $U^{(n)}_{-\frac{2l+1}{2}}$ et ses deux premières dérivées vérifient l'équation linéaire

$$(7)\qquad (1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + 2(l+1)x\frac{dy}{dx} - n(n+2l+1)y = 0,$$

où le signe imaginaire i a disparu, et dont l'intégrale générale s'obtient en remplaçant, dans la seconde des équations (5), $U^{(n-l)}_{-\frac{2l+1}{2}}$ par $U^{(n)}_{-\frac{2l+1}{2}}$.

L'intégration par parties conduit immédiatement au théorème

$$(8)\qquad \int_{-i}^{+i} U^{(\nu)}_{-\frac{2l+1}{2}}\,U^{(n)}_{-\frac{2l+1}{2}}\,dx = 0,$$

tant que ν diffère de n. Au moyen de la relation (6) entre trois fonctions consécutives, et en ayant égard à ce théorème (8), on trouve, dans le cas de $\nu = n$,

$$\int_{-i}^{+i}\left[U^{(n)}_{-\frac{2l+1}{2}}\right]^2 dx = 2\,\frac{2l+1}{2n+2l+1}\,\frac{(n+2l)(n+2l-1)\ldots(2l+1)}{1.2.3.4\ldots n}\,i^{2n+1}.$$

Revenant au facteur $R_l^{(n)}$ de Lamé, nous trouvons que trois fonctions $R_l^{(n)}$, $R_l^{(n-1)}$, $R_l^{(n-2)}$, dans lesquelles l reste constant, satisfont à la relation

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} &(1+x^2)^{\frac{l}{2}}\Big[(n-l)\,U^{(n-l)}_{-\frac{2l+1}{2}} - (2n-1)x\,U^{(n-l-1)}_{-\frac{2l+1}{2}} \\ &\qquad\qquad - (n+l+1)\,U^{(n-l-2)}_{-\frac{2l+1}{2}}\Big] = 0, \end{aligned}\right.$$

où l'on a $l \leqq n$.

L'intégration par parties conduit au théorème

$$(10)\qquad \int_{-i}^{+i} R_l^{(n)} R_l^{(\nu)}\, dx = 0$$

tant que ν diffère de n. En se servant de ce théorème (10) et de la relation (9) entre trois fonctions consécutives, on trouve, dans le cas de $\nu = n$,

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} \int_{-i}^{+i} (R_l^{(n)})^2\, dx &= \int_{-i}^{+i} (1 + x^2)^l \left(U_{-\frac{2l+1}{2}}^{(n-l)}\right)^2 dx \\ &= 2\,\frac{2l+1}{2n+1}\;\frac{n+l.n+l-1.n+l-2\ldots 2l+1}{1.2.3.4\ldots n-l}\;\frac{2.4.6\ldots 2l}{3.5.7\ldots 2l+1}\, i^{2n-2l+1}. \end{aligned}\right.$$

Ainsi, le facteur $R_l^{(n)}$ se trouve également mis sous forme d'expression différentielle, et ses propriétés analytiques sont encore, comme on le voit, semblables à celles de la fonction $P_l^{(n)}$ relative à la sphère.

§ XIV.

Dans le cas de l'ellipsoïde ovaire, Lamé a ramené l'intégration de l'équation aux dérivées partielles du second ordre régissant l'équilibre de température des points intérieurs du corps supposé homogène, à celle des deux équations

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d(c^2-\nu^2)\frac{dP}{d\nu}}{d\nu} &= \left(\frac{l^2c^2}{c^2-\nu^2} - h\right) P, \\ \frac{d(\rho^2-c^2)\frac{dR}{d\rho}}{d\rho} &= \left(\frac{l^2c^2}{\rho^2-c^2} + h\right) R. \end{aligned}\right.$$

Dans ces deux équations, on a $h = n(n+1)$,

$$\nu = \sqrt{c^2 - \nu'^2} = c\,\frac{\mathcal{E}(\alpha)}{E(\alpha)},$$

$$\rho = \sqrt{\rho'^2 + c^2} = c\,\frac{E(\gamma)}{\mathcal{E}(\gamma)}.$$

Les paramètres thermométriques α et γ sont définis par les intégrales

$$\alpha = c \int_{\nu'}^{c} \frac{d\nu}{\nu' \sqrt{c^2 - \nu'^2}},$$

$$\gamma = c \int_{\rho'}^{\infty} \frac{d\rho'}{\rho' \sqrt{\rho'^2 + c^2}}.$$

Enfin ν' et ρ' sont les fonctions inverses de ces deux transcendantes α et γ. En remplaçant $\frac{\nu}{c}$ et $\frac{\rho}{c}$ par x, dans les équations (12), on voit que les intégrales générales de ces équations ont la forme de la première des intégrales (5) de l'ellipsoïde planétaire. Les facteurs de Lamé, P et R, relatifs à l'ellipsoïde ovaire, ont donc la forme du facteur $P_l^{(n)}$ dans le cas de la sphère, et leurs propriétés analytiques sont encore les mêmes.

Les fonctions au moyen desquelles on exprime les intégrales des équations (12) sont les polynômes en x qui naissent du développement de l'expression $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{2l+1}{2}}$ ordonné suivant les puissances ascendantes de α. D'après la règle de convergence de la série de Lagrange, appliquée au développement de la plus petite des racines de l'équation

$$u = x + \alpha \frac{u^2 - 1}{2},$$

ce développement est convergent tant que l'on a $x < 1$ dans la première, et $x > 1$ dans la seconde, ou bien, tant que x reste, dans les deux cas respectivement, dans le champ de variation assigné par sa définition analytique. Seulement, dans le second cas, on voit, par cette même règle, que, pour la convergence, on doit avoir $\alpha \leqq \frac{1}{2x}$, et que, par conséquent, quand x devient de plus en plus grand, on doit supposer α de plus en plus petit, ce qui est toujours permis.

Si, au lieu de prendre pour variables indépendantes ν et ρ, on prend $\nu' = \sqrt{c^2 - \nu^2}$ et $\rho' = \sqrt{\rho^2 - c^2}$, les équations (12) deviennent

$$(12\,bis)\quad \begin{cases} (\nu'^4 - c^2\nu'^2)\dfrac{d^2P}{d\nu'^2} + (2\nu'^3 - c^2\nu')\dfrac{dP}{d\nu'} = (h\nu'^2 - l^2c^2)\,P, \\ (\rho'^4 + c^2\rho'^2)\dfrac{d^2R}{d\rho'^2} + (2\rho'^3 + c^2\rho')\dfrac{dR}{d\rho'} = (h\rho'^2 + l^2c^2)\,R. \end{cases}$$

Leurs intégrales générales se déduisent de celles des équations (12), en changeant x en $\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{E(\alpha)}$ dans la première, et x en

$$\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{\mathcal{E}(\gamma)}$$

dans la seconde. On obtient les nouveaux facteurs P et R en effectuant sur les anciens les mêmes changements de variables.

On sait que les formes analytiques sous lesquelles nous avons mis les facteurs P et R, que nous venons de trouver, ont été indiquées par M. Liouville dans les mêmes cas de la sphère et des ellipsoïdes de révolution (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XI, p. 275). C'est en comparant les séries de Lamé, ordonnées suivant des produits de fonctions elliptiques, à celles ordonnées suivant les Y_n de la *Mécanique céleste*, que M. Liouville est parvenu à ces indications. On sait aussi, d'un autre côté, que Jacobi avait déjà mis les différents termes dont sont composés les Y_n sous cette même forme de produits d'expressions différentielles (*Journal de Liouville*, t. X, p. 229.)

Enfin, il importe de faire observer que les fonctions simples x, qui entrent dans les expressions des facteurs P et R, sont, dans tous les cas, des fonctions simplement périodiques, ou plus exactement, en ayant égard aux remarques présentées par Lamé dans la neuvième de ses *Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et les surfaces isothermes*, des fonctions doublement périodiques parvenues à cet état limite de déformation continue où une de leurs périodes est infinie.