JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PEPIN

Sur l'équation $7x^4 - 5y^4 = 2z^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 5 (1879), p. 405-424.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1879_3_5__405_0>

Sur l'équation $7x^4 - 5y^4 = 2z^2$;

PAR LE P. PEPIN, S. J.

---

1. La résolution en nombres entiers des équations comprises dans la formule générale

$$ax^4 + by^4 = cz^2$$

est le plus souvent impossible; mais, lorsqu'une équation de cette sorte admet une solution, elle en admet une infinité qu'on déduit successivement l'une de l'autre au moyen de diverses formules. Toutefois, il n'est pas toujours possible d'affirmer qu'on ne laisse échapper aucune solution exprimée par des nombres inférieurs à ceux qui forment les solutions calculées. Il est évident qu'en ce cas le problème n'est pas complétement résolu. Je me propose d'étudier, en prenant pour exemple l'équation

$$(1) \qquad 7x^4 - 5y^4 = 2z^2,$$

diverses méthodes que l'on peut employer pour chercher une solution complète, permettant d'obtenir avec certitude toutes les solutions exprimées par des nombres inférieurs à une limite donnée. Il ne faudrait pas se faire illusion sur la généralité de ces méthodes; elles conduisent au résultat cherché dans le cas actuel et dans d'autres cas semblables; mais elles pourraient bien, en certains cas, ne donner qu'une solution incomplète.

2. La méthode de décomposition en facteurs, employée par Fermat, n'est pas immédiatement applicable à l'équation proposée; mais, si l'on en retranche l'identité

$$7x^4 - 5x^4 = 2x^4,$$

on obtient l'équation équivalente

$$5(x^4 - y^4) = 2(z^2 - x^4).$$

Si nous posons

$$x^2 + y^2 = m(x^2 - z),$$

m sera un nombre rationnel et l'on déduira de l'équation précédente

$$5m(y^2 - x^2) = 2(x^2 + z),$$

de sorte que les trois indéterminées x, y, z, considérées comme fonctions du nombre rationnel m, sont assujetties à vérifier les deux équations

$$(1 - m)x^2 + y^2 + mz = 0,$$
$$(5m + 2)x^2 - 5my^2 + 2z = 0,$$

dont la résolution s'obtient par les formules suivantes :

$$\frac{x^2}{5m^2 + 2} = \frac{y^2}{5m^2 + 4m - 2} = \frac{z}{5m^2 - 10m - 2}.$$

Comme les solutions où les indéterminées auraient un facteur commun se déduisent facilement des solutions en nombres entiers et premiers entre eux, nous ne considérons que ces dernières solutions et nous supposons x, y, z premiers entre eux deux à deux. Ces nombres peuvent s'exprimer en fonction de deux nombres entiers et premiers entre eux; il suffit pour cela de poser $m = \frac{p}{q}$ dans les dernières équations, qui deviennent alors

$$\frac{x^2}{5p^2 + 2q^2} = \frac{y^2}{5p^2 + 4pq - 2q^2} = \frac{z}{5p^2 - 10pq - 2q^2}.$$

Comme x, y et z sont premiers entre eux deux à deux, si l'on représente par μ le plus grand diviseur commun des trois dénominateurs, on en déduit

$$(a)\qquad \begin{cases} \mu x^2 = 5p^2 + 2q^2, \\ \mu y^2 = 5p^2 + 4pq - 2q^2, \\ \mu z \;= 5p^2 - 10pq - 2q^2. \end{cases}$$

3. Or le nombre μ n'est susceptible que d'un petit nombre de valeurs faciles à déterminer. D'abord la première formule montre que μ doit être positif; puis, en substituant $5p^2 \equiv -2q^2$ (mod. μ), on déduit des deux autres équations

$$4pq - 4q^2 \equiv 0, \quad 10pq + 4q^2 \equiv 0 \quad (\text{mod. } \mu);$$

d'où l'on conclut

$$(b)\qquad 14pq \equiv 0 \quad (\text{mod. } \mu).$$

D'ailleurs, en considérant que p et q sont premiers entre eux, on déduit de la première des formules (a) que μ ne peut avoir avec p^2 aucun diviseur commun autre que 2, et avec q aucun diviseur commun autre que 5. On doit donc conclure de la formule (b) que le nombre μ doit être un diviseur positif du produit $2.5.7 = 70$.

Supposons d'abord μ non divisible par 5. Il sera donc diviseur positif de 14, de sorte qu'il n'aura que l'une des valeurs 1, 2, 7 ou 14. Mais les deux valeurs extrêmes 1 et 14 sont exclues par la congruence

$$\mu x^2 \equiv 2q^2 \quad (\text{mod. } 5),$$

que l'on déduit de la première des formules (a). Si $\mu = 2$, posons $p = 2p_1$ et divisons par 2 les formules (a). Nous obtenons un premier système de solutions exprimé par les formules

$$(\text{I})\qquad \begin{cases} x^2 = q^2 + 10p_1^2, \\ y^2 = 10p_1^2 + 4p_1q - q^2, \\ z \;= 10p_1^2 - 10p_1q - q^2. \end{cases}$$

Si $\mu = 7$, la deuxième des formules (a), mise sous la forme

$$7y^2 = 7p^2 - 2(p-q)^2,$$

montre que $p - q$ est divisible par 7, de sorte que l'on peut poser $p - q = 7f$, en désignant par f un nombre entier premier avec q. Dans ce cas, les formules (a), débarrassées du facteur 7, deviennent

$$(\text{II}) \quad \begin{cases} x^2 = q^2 + 10fq + 35f^2 = (q + 5f)^2 + 10f^2, \\ y^2 = q^2 + 14fq + 35f^2 = (q + 5f)^2 + 4fq + 10f^2, \\ z = 35f^2 - q^2. \end{cases}$$

Lorsque μ est multiple de 5, le nombre q doit être aussi divisible par 5, de sorte que nous pouvons poser $\mu = 5\alpha$, $q = 5q_1$; les équations (a), débarrassées du facteur 5, deviennent alors

$$(a') \qquad \begin{cases} \alpha x^2 = p^2 + 10q_1^2, \\ \alpha y^2 = p^2 + 4pq_1 - 10q_1^2, \\ \alpha z = p^2 - 10pq_1 - 10q_1^2. \end{cases}$$

On déduit de la première formule que α doit être résidu quadratique de 5, ce qui exclut les valeurs 2 et 7. Comme ce nombre α est un diviseur positif de 14, il ne peut avoir que l'une des deux valeurs 1 ou 14. Dans le premier cas, les formules précédentes deviennent

$$(\text{III}) \qquad \begin{cases} x^2 = p^2 + 10q_1^2, \\ y^2 = p^2 + 4pq_1 - 10q_1^2, \\ z = p^2 - 10pq_1 - 10q_1^2. \end{cases}$$

Si $\alpha = 14$, la seconde formule du groupe (a'), mise sous la forme

$$14y^2 = (p + 2q_1)^2 - 14q_1^2,$$

montre que la somme $p + 2q_1$ est divisible par 14; posant donc

$$p = 14f - 2q_1,$$

et supprimant le facteur 14 après la substitution, on obtient

$$(\text{IV}) \qquad \begin{cases} x^2 = q_1^2 - 4fq_1 + 14f^2, \\ y^2 = 14f^2 - q_1^2, \\ z = q_1^2 - 14fq_1 + 14f^2. \end{cases}$$

4. La résolution de l'équation proposée se trouve ainsi ramenée à celle des quatre systèmes que nous venons d'obtenir. Toutefois, il nous suffira d'en considérer deux, car les systèmes I et IV sont impossibles. L'impossibilité du système (I) est rendue manifeste par la deuxième équation. On peut, en effet, la mettre sous la forme

$$y^2 = 14p_1^2 - (q - 2p_1)^2;$$

si $q - 2p_1$ n'est pas divisible par 7, on en déduit cette conséquence fausse que -1 serait résidu quadratique de 7. Si, au contraire, $q - 2p_1$ est multiple de 7, on obtient pour x et y des valeurs divisibles par 7, tandis que nous supposons ces nombres premiers entre eux. La dernière formule montre immédiatement que, si l'on suppose $q \equiv 2p_1 \pmod{7}$, y est multiple de 7. On le constate pour x en substituant $q^2 \equiv 4p_1^2 \pmod{7}$, ce qui donne $x^2 \equiv 14p_1^2 \pmod{y}$.

On constate de la même manière l'impossibilité du système IV. D'abord on ne peut pas supposer q_1 multiple de 7, parce que les trois nombres x, y, z auraient un diviseur commun, contrairement à l'hypothèse. Mais, q_1 étant premier avec 7, on déduirait de la deuxième équation que -1 serait résidu quadratique de 7, ce qui n'est pas.

Il nous suffit donc de résoudre les deux systèmes II et III. Bien plus, un seul de ces systèmes donne toutes les solutions possibles; car le système II se ramène au système III par la substitution unimodulaire $q = p - 5q_1, f = q_1$; ces deux systèmes sont donc équivalents.

5. Notre problème se trouve ainsi ramené à celui de trouver, en nombres entiers et premiers entre eux, toutes les solutions des deux équations simultanées

$$(c) \qquad \begin{cases} x^2 = p^2 + 10q^2, \\ y^2 = p^2 + 4pq - 10q^2. \end{cases}$$

Pour que les deux nombres x et y soient premiers entre eux, il est nécessaire que p soit impair; et, comme la différence $x^2 - p^2$ ne peut être paire sans être divisible par 8, il faut que le nombre q soit pair. Nous pouvons donc poser $q = 2mn$ et déduire de la première des équations (c), par la décomposition en facteurs,

$$x \pm p = 2m^2 \quad \text{ou} \quad 4m^2,$$
$$x \mp p = 20n^2 \quad \text{ou} \quad 10n^2,$$

de sorte que les trois nombres p, q, x seront exprimés par l'un des deux systèmes d'équations

$$x = m^2 + 10n^2, \quad \pm p = m^2 - 10n^2, \quad q = 2mn;$$
$$x = 2m^2 + 5n^2, \quad \pm p = 2m^2 - 5n^2, \quad q = 2mn.$$

La valeur de y^2 sera exprimée dans le premier cas par la formule

$$y^2 = (m^2 + 4mn - 10n^2)^2 - 56m^2n^2,$$

et, dans le second cas, par la formule

$$y^2 = (2m^2 + 4mn - 5n^2)^2 - 56m^2n^2.$$

C'est à la résolution de ces deux équations que notre problème se trouve ramené. Mais, avant d'aller plus loin, nous remarquerons que l'emploi des nombres complexes donne beaucoup plus simplement le résultat que nous venons d'obtenir.

6. Comme il n'existe que deux classes de formes quadratiques dont le déterminant soit égal à -10, on déduit des principes exposés dans notre Mémoire sur les nombres complexes $a + b\sqrt{-c}$ (t. I de ce Journal, p. 317) que les solutions en nombres entiers et premiers entre eux de l'équation

$$5x^4 + 2z^2 = 7x^4$$

sont données par les deux formules

$$\pm\sqrt{5}y^2 \pm \sqrt{-2}z = (\sqrt{5} + \sqrt{-2})(p + q\sqrt{-10})^4,$$
$$\pm\sqrt{5}y^2 \pm \sqrt{-2}z = (\sqrt{5} + \sqrt{-2})(p\sqrt{5} + q\sqrt{-2})^4,$$

dont la première fournit les solutions où le nombre x est de la forme $p^2 + 10q^2$, et l'autre celles où ce nombre est de la forme $5p^2 + 2q^2$. En effectuant les calculs indiqués, puis en égalant entre eux les coefficients de $\sqrt{5}$ et de $\sqrt{-2}$, et en déterminant le signe de y^2

par la considération du module 4, on trouve que les deux groupes de solutions sont exprimés respectivement par les deux systèmes d'équations

$$(2)\quad \begin{cases} x = p^2 + 10q^2, \\ y^2 = p^4 - 60p^2q^2 + 100q^4 - 8pq\,(p^2 - 10q^2), \\ z = p^4 - 60p^2q^2 + 100q^4 + 20pq(p^2 - 10q^2), \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} x = 5p^2 + 2q^2, \\ y^2 = 25p^4 - 60p^2q^2 + 4q^4 - 8pq(5p^2 - 2q^2), \\ z = 25p^4 - 60p^2q^2 + 4q^4 + 20pq(5p^2 - 2q^2). \end{cases}$$

Nous ne prenons dans ces formules qu'une seule des deux valeurs de z égales et de signes contraires, parce que les signes des indéterminées sont indifférents pour le but que nous avons en vue. Les deux nombres p et q peuvent recevoir toutes les valeurs premières entre elles, capables de vérifier la deuxième équation de chacun des deux systèmes. Ces équations peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$(\mathrm{A})\quad \begin{cases} (1)\quad y^2 = (p^2 - 4pq - 10q^2)^2 - 56p^2q^2, \\ (2)\quad y^2 = (5p^2 - 4pq - 2q^2)^2 - 56p^2q^2. \end{cases}$$

Elles ne diffèrent que par les notations de celles que nous avons obtenues dans le numéro précédent. Nous allons les résoudre successivement.

7. On déduit de la première de ces équations, par la décomposition en facteurs,

$$\pm(p^2 - 4pq - 10q^2) \pm y = 2s^2 \quad \text{ou} \quad 4s^2,$$
$$\pm(p^2 - 4pq - 10q^2) \mp y = 28t^2 \quad \text{ou} \quad 14t^2,$$

de sorte que la résolution de cette équation est ramenée à celle des deux systèmes

$$\pm(p^2 - 4pq - 10q^2) = s^2 + 14t^2, \quad pq = st, \quad \pm y = s^2 - 14t^2;$$
$$\pm(p^2 - 4pq - 10q^2) = 2s^2 + 7t^2, \quad pq = st, \quad \pm y = 2s^2 - 7t^2.$$

Comme on a identiquement $p^2 - 4pq - 10q^2 = (p - 2q)^2 - 14q^2$, on voit immédiatement, par la considération du module 7, que l'on doit exclure le signe inférieur dans la première équation de chacun de ces deux systèmes; car avec ce signe on serait amené à cette conclusion absurde que -1 ou -2 seraient résidus quadratiques de 7.

Ainsi on aurait dans le second système

$$(p-2q)^2-7t^2=2(s^2+7q^2);$$

ce qui est impossible; car, le nombre p étant impair, t doit l'être également; de sorte que l'on déduit de l'équation $pq=st$ que les deux nombres s et q sont tous deux pairs ou tous deux impairs. Le second membre de la dernière formule est donc nécessairement multiple de 8, tandis que le premier membre est de la forme $8l+2$. La résolution de l'équation (A, 1) est donc ramenée à celle du système unique

$$(4)\quad pq=st,\quad p^2-4pq-10q^2=s^2+14t^2,\quad \pm y=s^2-14t^2.$$

De même, en appliquant à l'équation (A, 2) la décomposition en facteurs, on obtient les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
pq=st,\quad & \pm(5p^2-4pq-2q^2)\pm y=2s^2 \quad \text{ou}\quad 4s^2,\\
& \pm(5p^2-4pq-2q^2)\mp y=28t^2 \quad \text{ou}\quad 14t^2,\\
pq=st,\quad & \pm(5p^2-4pq-2q^2)=s^2+14t^2,\quad \pm y=s^2-14t^2,\\
pq=st,\quad & \pm(5p^2-4pq-2q^2)=2s^2+7t^2,\quad \pm y=2s^2-7t^2.
\end{aligned}$$

On conclut d'abord de l'identité $5p^2-4pq-2q^2=7p^2-2(p+q)^2$ qu'on doit prendre le signe inférieur dans la deuxième équation de chacun de ces deux systèmes; car avec le signe supérieur on aurait ce résultat absurde que -2 serait résidu quadratique de 7. De plus, on doit rejeter le premier système. On aurait en effet

$$2(p+q)^2-7p^2=s^2+14t^2;$$

or, p étant impair, il faut que s le soit aussi, de sorte que l'équation $pq=st$ exige que les deux nombres q et t soient de même parité, de sorte que des deux nombres t et $(p+q)$ l'un est nécessairement pair tandis que l'autre est impair. Si donc nous mettons la dernière équation sous la forme

$$2(p+q)^2-14t^2=s^2+7p^2,$$

nous voyons que le premier membre est de la forme $8l + 2$, tandis que le second est multiple de 8. Il suffit donc de considérer le second système.

Les résultats obtenus jusqu'ici peuvent se résumer de la manière suivante. Les solutions de l'équation proposée se partagent en deux groupes, suivant la forme quadratique de la première indéterminée x, et sont déterminées en fonction de p, q, s et t, au moyen des deux systèmes de formules

$$(5)\qquad \begin{cases} x = p^2 + 10q^2, \quad y = s^2 - 14t^2, \\ z = p^4 + 20p^3q - 60p^2q^2 - 200pq^3 + 100q^4, \\ pq = st, \quad p^2 - 10q^2 = s^2 + 4st + 14t^2; \end{cases}$$

$$(6)\qquad \begin{cases} x = 5p^2 + 2q^2, \quad y = 2s^2 - 7t^2, \\ z = 25p^4 + 100p^3q - 60p^2q^2 - 40pq^3 + 4q^4, \\ pq = st, \quad 2p^2 - 5q^2 = 2s^2 - 4st + 7t^2. \end{cases}$$

8. L'équation $pq = st$, commune aux deux systèmes, est résolue d'une manière complète par les formules

$$(7)\qquad p = \lambda h, \quad q = \mu k, \quad s = \lambda\mu, \quad t = hk,$$

où λ, μ, h et k désignent des nombres entiers quelconques, assujettis à la condition unique de rendre premiers entre eux les deux nombres p et q, ainsi que les deux nombres s et t. Cette condition est remplie en prenant les quatre nombres λ, μ, h et k premiers entre eux deux à deux, et elle ne peut l'être que de cette manière.

La substitution des expressions (7) dans la dernière formule du système (5) donne entre les quatre nombres λ, μ, h et k l'équation

$$(8)\qquad 2(7h^2 + 5\mu^2)k^2 + 4h\mu.\lambda k + \lambda^2(\mu^2 - h^2) = 0;$$

en la résolvant successivement par rapport aux deux quotients $\frac{k}{\lambda}$ et $\frac{h}{\mu}$, on trouve

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{k}{\lambda} = \dfrac{-\mu h \pm \frac{1}{2}\sqrt{2(7h^4 - 5\mu^4)}}{7h^2 + 5\mu^2}, \\[2ex] \dfrac{h}{\mu} = \dfrac{-2\lambda k \pm \sqrt{\lambda^4 - 140k^4}}{14k^2 - \lambda^2}. \end{cases}$$

On voit, par la première de ces formules, que les nombres h, μ forment une solution de l'équation proposée, car, pour déterminer une valeur rationnelle du rapport $\frac{k}{\lambda}$, ils doivent vérifier la condition

$$(10) \qquad 7h^2 - 5\mu^2 = 2l^2,$$

l désignant un nombre entier. Ainsi toute solution de l'équation proposée dans laquelle la première indéterminée, x, est de la forme $p^2 + 10q^2$, dépend d'une solution $x = h$, $y = \mu$ de la même équation, et on la déduit de cette solution au moyen des formules (9), (7) et (5). Inversement, de toute solution de l'équation (1) on déduit deux solutions de l'équation (8); car, si les nombres $x = h$, $y = \mu$ satisfont à l'équation (1), la première des formules (9) donne deux valeurs rationnelles du rapport $\frac{k}{\lambda}$. En les réduisant à des fractions irréductibles, on aura deux systèmes de valeurs des nombres k et λ, lesquelles formeront avec les deux nombres h et μ deux solutions de l'équation (8). Chacun de ces systèmes de valeurs de k et de λ satisfait à l'équation

$$(11) \qquad \lambda^4 - 140k^4 = g^2,$$

car autrement les valeurs du rapport $\frac{h}{\mu}$, déterminées par la seconde des formules (9), ne seraient pas rationnelles.

9. Dans le second groupe de solutions de l'équation (1), la dernière équation donne entre les quatre nombres λ, μ, h, k la condition

$$(12) \qquad (5\mu^2 + 7h^2)k^2 - 4h\mu.\lambda k + 2(\mu^2 - h^2)\lambda^2 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{k}{\lambda} &= \frac{2h\mu \pm \sqrt{2(7h^4 - 5\mu^4)}}{7h^2 + 5\mu^2}, \\ \frac{h}{\mu} &= \frac{2k\lambda \pm \sqrt{4\lambda^4 - 35k^4}}{7k^2 - 2\lambda^2}. \end{aligned} \right.$$

Il résulte de ces formules que les deux nombres h et μ forment une solution de l'équation proposée, et les nombres λ, k une solution de l'équation

$$(14) \qquad 4\lambda^4 - 35k^4 = f^2.$$

Ainsi toute solution de l'équation (1) fournit deux nombres h, μ propres à vérifier l'équation (12); on en déduit, par la première des formules (13), deux systèmes de valeurs de λ et de k qui satisfont à l'équation (14). De même, toute solution de l'équation (14) donne deux nombres λ, k, d'où l'on déduit, par la seconde des formules (13), deux systèmes de valeurs de h et μ, formant deux solutions de l'équation (1); en associant les nombres λ, k avec ces deux systèmes de valeurs, on obtient deux solutions de l'équation (12) et, par les formules (7), deux solutions de l'équation (1). Le lien qui unit entre elles les solutions des trois équations (1), (12) et (14) fait qu'on est assuré de les résoudre complétement toutes trois, pourvu qu'on résolve complétement l'une d'elles. Il faut en dire autant des équations (1), (8) et (10), de sorte qu'en résolvant complétement l'une quelconque des cinq équations (1), (8), (10), (12) et (14), nous sommes assurés d'obtenir pour chacune des autres toutes les solutions formées par des nombres inférieurs à une limite donnée.

10. Pour calculer les solutions des équations (8) et (12), nous poserons

$$\frac{k}{\lambda} = \xi, \quad \frac{h}{\mu} = \eta. \tag{15}$$

L'équation (8) deviendra

$$2(7\eta^2 + 5)\xi^2 + 4\xi\eta + (1 - \eta^2) = 0. \tag{8'}$$

A chaque valeur de η correspondent deux valeurs de ξ et réciproquement. Désignons par ξ et ξ' les deux valeurs de ξ que l'on peut associer à une même valeur de η, de manière à vérifier cette équation; la somme de ces deux valeurs sera déterminée par la formule

$$\xi + \xi' = \frac{-2\eta}{7\eta^2 + 5}. \tag{a}$$

De même, les deux valeurs de η que l'on peut associer dans l'équation (8') à une même valeur de ξ ont leur somme exprimée par la formule

$$\eta + \eta' = \frac{-4\xi}{14\xi^2 - 1}. \tag{b}$$

Au moyen de la solution évidente $\xi = 0$, $\eta = -1$, on obtient, par la formule (a), $\xi_1 = \frac{1}{6}$. Cette valeur de ξ peut être associée à deux valeurs de η, dont l'une nous est déjà connue, savoir $\eta = -1$; nous obtenons la seconde par la formule (b), qui devient

$$\eta_1 - 1 = \frac{-4.6}{14-36}, \quad \eta_1 = \frac{23}{31}.$$

Puis faisant $\eta = \frac{23}{11}$, $\xi' = \frac{1}{6}$, nous déduisons de la formule (a) $\xi_2 = -\frac{102}{359}$. Cette solution $\xi = -\frac{102}{359}$, $\eta' = \frac{23}{11}$ donne, par la formule (b), $\eta_2 = \frac{10127}{1525}$, et ainsi de suite. De cette manière, par l'emploi alternatif des formules (a) et (b), nous formons une suite de valeurs de ξ et de η, dans laquelle chaque valeur de η se trouve comprise entre les deux seules valeurs de ξ qu'on puisse lui associer pour vérifier l'équation (8). Cette suite est

$$(c) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \xi = 0, & \eta = -1, & \xi_1 = \frac{1}{6}, \\ \eta_1 = \frac{23}{11} & \xi_2 = -\frac{102}{359}, & \eta_2 = \frac{10127}{1525}, \quad \ldots \end{array} \right.$$

Si, au lieu de partir de la formule (a), nous employons d'abord la formule (b) avec la même solution primitive $\eta = -1$, $\xi = 0$, nous formons une autre suite

$$\eta = -1, \quad \xi = 0, \quad \eta_1 = 1, \quad \xi_1 = -\tfrac{1}{6}, \quad \eta_2 = -\tfrac{23}{11}, \quad \ldots,$$

que l'on peut considérer comme le prolongement vers la gauche de la suite (c). Mais, dans le cas actuel, elle n'offre aucun intérêt, parce qu'elle ne présente que les termes de la suite (c) changés de signes.

11. L'équation (12) peut se résoudre de la même manière. Après l'avoir mise sous la forme

$$(12') \qquad (7\eta^2 + 5)\xi^2 - 4\eta\xi + 2(1 - \eta^2) = 0,$$

en faisant les substitutions indiquées par les formules (15), on en déduit les deux formules

$$(a') \qquad \xi + \xi' = \frac{4\eta}{7\eta^2 + 5},$$

$$(b') \qquad \eta + \eta' = \frac{4\xi}{7\xi^2 - 2},$$

dont l'emploi alternatif, à partir de la solution primitive, $\eta = 1$, $\xi = 0$, donne une suite indéfinie de solutions

$$(d) \quad \xi = 0, \quad \eta = 1, \quad \xi_1 = \tfrac{1}{3}, \quad \eta_1 = -\tfrac{23}{11}, \quad \xi_2 = -\tfrac{204}{359}, \quad \ldots.$$

Les valeurs de η sont les mêmes que dans le cas précédent, et celles de ξ sont doublées. On pouvait le prévoir, car il suffit de remplacer dans les formules (a'), (b') les nombres ξ, ξ' par 2ξ, $2\xi'$ et les nombres η, η' par $-\eta$ et $-\eta'$, pour identifier ces formules avec les formules (a) et (b).

La méthode que nous venons d'indiquer pour résoudre les équations $(8')$ et $(12')$ revient au fond à celle qu'Euler a donnée dans un Mémoire posthume, publié en 1830 par l'Académie impériale de Saint-Pétersbourg (*Mémoires*..., t. XI, p. 69).

Les solutions de l'équation proposée se déduisent de ce calcul en égalant le rapport $\frac{h}{\mu}$ aux diverses valeurs de η comprises dans l'une des suites (c) ou (d). Comme les deux nombres h et μ sont premiers entre eux, ils se trouvent par là complétement déterminés. Cette méthode est très-simple, mais on n'est pas assuré d'obtenir, de cette manière, toutes les solutions possibles; car il n'est pas démontré que toutes les solutions de l'équation $(8')$ se déduisent successivement des solutions primitives $\eta = \pm 1$, $\xi = 0$, par l'emploi alternatif des formules (a) et (b). Il pourrait exister quelque autre solution primitive, donnant lieu à une suite de solutions non comprises dans la suite (c).

12. Notre problème est pourtant susceptible d'une solution complète, que l'on déduit des formules (5), (6), (7), (8) et (12). En effet, quelle que soit la solution considérée de l'équation (1), solution que nous désignons par (x_1, y_1, z_1), tant que la première indéterminée x_1 est supérieure à l'unité, on peut, par la décomposition en facteurs de celle des formules A qui correspond à cette solution, la ramener à une autre solution en nombres moindres, et l'exprimer en fonction de cette nouvelle solution, soit au moyen des formules (5) et (8), si x_1 est de la forme $p^2 + 10q^2$, soit au moyen des formules (6) et (12), si x_1 est de la forme $5p^2 + 2q^2$. En remplaçant les nombres h, μ par x, y, on déduit des formules citées les expressions suivantes de la solution

(x_1, y_1, z_1) :

$$
(\mathrm{I}). \left\{\begin{array}{lll}
(1) & x_1 = \lambda^2 x^2 + 10k^2y^2, & \pm y_1 = \lambda^2 y^2 - 14k^2x^2, \\
(2) & z_1 = (\lambda^2 x^2 + 10\lambda kxy - 10k^2y^2)^2 - 140\lambda^2k^2x^2y^2, & \\
(3) & \dfrac{k}{\lambda} = \dfrac{-xy \pm z}{7x^2+5y^2}, & 7x^4 - 5y^4 = 2z^2.
\end{array}\right.
$$

$$
(\mathrm{II}) \left\{\begin{array}{lll}
(1) & x_1 = 5\lambda^2 x^2 + 2k^2y^2, & \pm y_1 = 2\lambda^2 y^2 - 7k^2x^2, \\
(2) & z_1 = (5\lambda^2 x^2 + 10\lambda kxy - 2k^2y^2)^2 - 140\lambda^2k^2x^2y^2, & \\
(3) & \dfrac{k}{\lambda} = \dfrac{2xy \pm 2z}{7x^2+5y^2}, & 7x^4 - 5y^4 = 2z^2.
\end{array}\right.
$$

On a le premier système quand x_1 est de la forme $p^2 + 10q^2$, le second quand x_1 est de la forme $5p^2 + 2q^2$. Inversement, de toutes solutions (x, y, z) de l'équation (1) on en déduit deux autres en nombres plus grands, une par chacun des deux systèmes (I) et (II). A cause du double signe de z dans la formule qui détermine le rapport $\frac{k}{\lambda}$ on pourrait croire qu'une même solution peut en fournir quatre autres; mais, comme les nombres x_1, y_1 doivent être premiers entre eux, le signe de z se trouve complétement déterminé. Dans les formules (I), λ doit être un nombre impair; d'ailleurs le dénominateur est de la forme $8l + 4$; il faut donc choisir le signe de z de manière à rendre le numérateur $-xy \pm z$ divisible par 4. Dans les formules (II), au contraire, le nombre k devant être impair, il faut choisir le signe de z de telle sorte que la somme $xy \pm z$ soit de la forme $4l + 2$.

La nouvelle solution (x, y, z) pourra de même se ramener à une solution en nombres moindres, pourvu que x soit supérieur à l'unité. Elle sera exprimée en fonction de la nouvelle solution par les formules (I) ou par les formules (II), suivant la forme quadratique de x. Comme les valeurs de x sont positives, elles ne peuvent pas décroître indéfiniment. On parviendra donc nécessairement à la solution (1, 1, 1) dans laquelle, x étant égal à 1, les formules (c) du n° 5 ne sont possibles qu'en faisant $q = 0$, et dans ce cas la décomposition en facteurs cesse d'être applicable. On formera ainsi, à partir de la solution (x_1, y_1, z_1), une suite de solutions dans lesquelles la première indéterminée x présente des valeurs positives et décroissantes; le dernier terme de cette suite est la solution évidente (1, 1, 1), et chaque terme est exprimé en fonction du suivant par l'un des deux groupes de formules (I) ou (II). Si donc nous appliquons ces formules dans un ordre inverse, nous obtiendrons, à partir du terme (1, 1, 1), tous les termes de cette suite, et conséquemment le premier, qui est la solution considérée (x_1, y_1, z_1).

En appliquant les formules (I) à la solution (1, 1, 1) et en prenant le signe de manière à obtenir une valeur impaire de λ, on trouve $k = 0$, et l'on retombe sur la même solution (1, 1, 1). Les formules (II) donnent la solution (23, 11, 971). Cette nouvelle solution en donne deux autres, dont l'une figure nécessairement parmi les solutions décroissantes qui composent la suite que nous venons de considérer, à partir de la solution (x_1, y_1, z_1). Désignons-la par $(x_{n-2}, y_{n-2}, z_{n-2})$. L'application des formules (I) et (II) à la solution $(x_{n-2}, y_{n-2}, z_{n-2})$ donnera de même deux nouvelles solutions en nombres plus grands, dont l'une $(x_{n-3}, y_{n-3}, z_{n-3})$ fait partie de la suite en question. En réitérant ainsi un nombre suffisant de fois l'application des formules (I) et (II), on trouvera nécessairement, entre autres solutions, tous les termes de la suite considérée et par conséquent la solution (x_1, y_1, z_1), qui en est le premier terme. On est donc assuré d'obtenir par les formules (I) et (II), à partir de la solution primitive (1, 1, 1), toutes les solutions possibles de l'équation considérée, rangées suivant l'ordre croissant des valeurs de x.

13. Nous avons considéré les deux systèmes (I) et (II) afin de rendre notre démonstration plus rigoureuse. En pratique, un seul suffit pour donner toutes les solutions possibles, pourvu que l'on prenne successivement dans la formule (3) les deux signes de z, et que, dans celle des deux solutions où x_1 et y_1 sont divisibles par 2, on supprime ce facteur 2 ainsi que le facteur 4 dans la valeur correspondante de z_1. Considérons, en effet, dans le système (I) la solution étrangère qui correspond à une valeur paire de λ. Supposons que l'on ait

$$\frac{k}{\lambda} = \frac{-xy + z}{7x^2 + 5y^2} = \frac{k}{2\lambda_1},$$

k étant impair et λ pair, égal à $2\lambda_1$. Si l'on supprime le facteur commun 2 de x_1 et de y_1, on trouve

$$x_1 = 2\lambda_1^2 x^2 + 5k^2 y^2, \quad y_1 = 2\lambda_1^2 y^2 - 7k^2 x^2.$$

Dans le même cas, on déduit des formules (II)

$$\frac{k'}{\lambda'} = \frac{2(xy - z)}{7x^2 + 5y^2},$$
$$x_1 = 2\lambda'^2 x^2 + 5k'^2 y^2, \quad y_1 = 2\lambda'^2 y^2 - 7k'^2 x^2.$$

Il suffit de comparer les valeurs des deux rapports $\frac{k}{\lambda}$, $\frac{k'}{\lambda'}$ pour reconnaître que l'on a

$$\frac{k'}{\lambda'} = -\frac{2k}{\lambda} = -\frac{k}{\lambda_1},$$

et par conséquent $k' = -k$, $\lambda' = \lambda_1$. Il en résulte que les valeurs de x_1 et de y_1 déterminées par les formules (II) se déduisent des formules (I) en prenant le signe auquel correspond une valeur paire de λ et en supprimant le facteur commun 2.

On peut donc remplacer les deux systèmes (I) et (II) par le système unique

$$\text{(III)} \quad \left\{ \begin{aligned} & \theta x_1 = \lambda^2 x^2 + 10k^2 y^2, \\ & \pm \theta y_1 = \lambda^2 y^2 - 14k^2 x^2, \\ & \theta^2 z_1 = (\lambda^2 x^2 + 10\lambda k x y - 10k^2 y^2)^2 - 140\lambda^2 k^2 x^2 y^2, \\ & \frac{k}{\lambda} = \frac{-xy \pm z}{7x^2 + 5y^2}, \\ & 7x^4 - 5y^4 = 2z^2. \end{aligned} \right.$$

On prendra $\theta = 2$ ou $\theta = 1$, suivant que λ sera pair ou impair.

Si l'on applique ces formules à la solution (23, 11, 971), on trouve pour le rapport $\frac{k}{\lambda}$ deux valeurs $\frac{1}{6}$ et $-\frac{102}{359}$. La première valeur devrait être rejetée dans les formules (I), parce qu'elle correspond à une solution dont les termes ne sont pas premiers entre eux. Mais, en faisant $\theta = 2$ dans les formules précédentes, on obtient

$$x_1 = 10127, \quad y_1 = 1525,$$

ce qui est précisément le résultat que l'on déduirait des formules (II). La seconde valeur du rapport $\frac{k}{\lambda}$ donne la solution

$$x_2 = 80766889, \quad y_2 = 61457423.$$

14. Afin d'apprécier la rapidité avec laquelle croissent les solutions successives, formons le produit des deux valeurs de x_1 qui correspondent à une même solution (x, y, z). Dans les formules (III) on a $\theta = 1$ pour l'une de ces valeurs et $\theta = 2$ pour l'autre, de sorte que le produit cherché est exprimé par la formule

$$2x_1 x'_1 = (\lambda\lambda')^2\left[x^4 + 10\left(\frac{k^2}{\lambda^2} + \frac{k'^2}{\lambda'^2}\right)x^2 y^2 + \frac{(kk')^2}{(\lambda\lambda')^2}y^4\right].$$

D'ailleurs, en remplaçant h et μ par x et y dans l'équation (8), on trouve

$$(10y^2 + 14x^2)\left(\frac{k}{\lambda}\right)^2 + 4xy\left(\frac{k}{\lambda}\right) + y^2 - x^2 = 0,$$

et l'on en déduit $\frac{kk'}{\lambda\lambda'} = \frac{y^2 - x^2}{10y^2 + 14x^2}$. Comme les deux nombres x et y sont premiers entre eux, les deux termes

$$\frac{y^2 - x^2}{24}, \quad \frac{10y^2 + 14x^2}{24}$$

ont aussi des valeurs entières et premières entre elles, de sorte que l'on peut poser

$$kk' = m\frac{y^2 - x^2}{24}, \quad \lambda\lambda' = m\frac{10y^2 + 14x^2}{24},$$

en désignant par m un nombre entier. La valeur numérique du produit $\lambda\lambda'$ est donc supérieure à $\frac{x^2}{2}$, et par conséquent $x_1 x'_1$ est $> \frac{x^8}{8}$. Ce produit $x_1 x'_1$ est du huitième ordre de grandeur par rapport à x. On voit d'ailleurs, par les formules (III), que le plus petit des deux facteurs x_1, x'_1 est compris entre le deuxième et le quatrième ordre de grandeur; l'autre facteur est donc compris entre le quatrième ordre et le sixième. Ainsi le produit des deux valeurs de x dans les deux solutions que l'on peut déduire de celle que nous avons désignée ci-dessus par x_2, y_2 serait exprimé par un nombre de plus de soixante chiffres; la plus petite des deux valeurs de x aurait plus de seize chiffres.

15. On peut encore résoudre l'équation proposée en lui faisant subir une transformation très-simple, qui permet d'appliquer immédiatement la décomposition en facteurs. Elle consiste à poser

$$x = m + n, \quad y = m - n,$$

ce qui est permis dans le cas actuel, puisque les deux nombres x et y sont tous deux impairs. En supprimant le facteur 2 dans le résultat de la substitution, on obtient l'équation

$$(16) \qquad z^2 = (m^2 + 12mn + n^2)^2 - 140\, m^2 n^2,$$

qui se décompose de l'une des deux manières suivantes :

$$\begin{aligned} mn &= pq, \quad \pm(m^2 + 12mn + n^2) \pm z = 2p^2 \text{ ou } 10p^2, \\ mn &= pq, \quad \pm(m^2 + 12mn + n^2) \mp z = 70q^2 \text{ ou } 14q^2; \end{aligned}$$

de sorte que la résolution de l'équation proposée se trouve ramenée à celle des deux systèmes suivants :

$$\begin{aligned} pq &= mn, \quad \pm(m^2 + 12mn + n^2) = p^2 + 35q^2, \\ pq &= mn, \quad \pm(m^2 + 12mn + n^2) = 5p^2 + 7q^2. \end{aligned}$$

Mais on doit rejeter le second système. On a, en effet,

$$m^2 + 12mn + n^2 = (m + 6n)^2 - 35n^2,$$

de sorte que la dernière équation peut se mettre sous la forme

$$\pm(m + 6n)^2 \mp 35n^2 = 5p^2 + 7q^2,$$

qui en manifeste l'impossibilité; car on en conclut, ou bien que 7 est résidu quadratique de 5, ce qui n'est pas, ou bien que les deux nombres $(m + 6n)$ et q sont multiples de 5; mais, dans ce dernier cas, on déduirait de l'équation $pq = mn$ que l'un des deux nombres m ou n doit être multiple de 5, de sorte que la somme $m + 6n$ ne pourrait l'être sans que les deux nombres m et n le fussent également. Comme il en résulterait pour x et pour y des valeurs divisibles par 5, la seconde conclusion est également inadmissible.

Quant au premier système, on voit, par la considération du module 7, qu'il n'est possible qu'avec le signe supérieur. La résolution de l'équation (1) se trouve ainsi ramenée à celle du système

$$(17)\qquad pq = mn, \quad m^2 + 12mn + n^2 = p^2 + 35q^2.$$

Les solutions de l'équation (1) sont exprimées par les formules

$$(18)\qquad x = m + n, \quad y = m - n, \quad z = p^2 - 35q^2.$$

16. L'équation $pq = mn$ est résolue par les formules

$$m = \lambda h, \quad n = \mu k, \quad p = \lambda\mu, \quad q = hk,$$

où λ, μ, h, k désignent quatre nombres entiers, premiers entre eux deux à deux. En substituant ces expressions dans la deuxième des équations (17), on trouve

$$(19)\qquad (\mu^2 - 35h^2)k^2 + 12\,\mu h.\lambda k + (h^2 - \mu^2)\lambda^2 = 0.$$

En résolvant cette équation successivement par rapport aux deux quotients $\frac{k}{\lambda}$, $\frac{h}{\mu}$, on obtient les formules

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{k}{\lambda} &= \frac{-6\mu h \pm \sqrt{\mu^4 + 35h^4}}{\mu^2 - 35h^2}, \\ \frac{h}{\mu} &= \frac{-6\lambda k \pm \sqrt{\lambda^4 + 35k^4}}{\lambda^2 - 35k^2}; \end{aligned}\right.$$

d'où l'on voit que les nombres (λ, k) ainsi que (μ, h) forment autant de solutions de l'équation

$$(21)\qquad X^4 + 35Y^4 = Z^2.$$

Ainsi chaque solution de l'équation proposée est exprimée par les formules (18) en fonction de deux solutions de l'équation (21) assujetties à vérifier ensemble l'équation (19). Comme chaque solution de l'équation (21) peut être associée à deux autres solutions, de manière à vérifier l'équation (19), elle détermine deux solutions de l'équation (1). Il ne faudrait pas en conclure que cette équation admette au-dessous d'une limite donnée deux fois plus de solutions que celle-là ; car il faut deux solutions de l'équation (21) pour une solution de l'équation (1).

17. Les solutions de l'équation (21) s'obtiennent aisément par la méthode posthume d'Euler. Posons pour cela $\frac{k}{\lambda} = \xi$, $\frac{h}{\mu} = \eta$; cette équation deviendra

$$(19') \qquad (1 - 35\eta^2)\xi^2 + 12\eta\xi + (\eta^2 - 1) = 0,$$

et l'on en déduira les deux formules

$$(a'') \qquad \xi + \xi' = \frac{12\eta}{35\eta^2 - 1},$$

$$(b'') \qquad \eta + \eta' = \frac{12\xi}{35\xi^2 - 1},$$

dont l'emploi alternatif fera connaître toutes les solutions que l'on peut déduire de la solution primitive $\xi = 0$, $\eta = 1$. On obtiendra ainsi la suite indéfinie

$$\xi = 0, \quad \eta = 1, \quad \xi_1 = \frac{6}{17}, \quad \eta_1 = \frac{253}{971}, \quad \xi_2 = \frac{73236}{38161}, \quad \ldots.$$

Chaque terme de cette suite détermine une solution de l'équation (21), et deux termes consécutifs donnent une solution de l'équation proposée. Au moyen des deux termes $\eta = 1$, $\xi_1 = \frac{6}{17}$, on obtient $\lambda = 17$, $k = 6$, $\mu = h = 1$, et l'on déduit des formules (18) $x = 23$, $y = 11$, $z = 971$.

Les deux termes $\xi_1 = \frac{6}{17}$, $\eta_1 = \frac{253}{971}$ donnent le système $\lambda = 17$, $k = 6$, $h = 253$, $\mu = 971$, d'où l'on déduit

$$x = 10127, \quad y = 1525;$$

et ainsi de suite. Cette méthode a l'inconvénient de n'offrir aucun moyen pour reconnaître avec certitude si l'on a obtenu, oui ou non, toutes les solutions exprimées par des nombres inférieurs à une limite donnée. La série précédente donne bien toutes les solutions de l'équation (19') que l'on peut déduire de la solution primitive $\xi = 0$, $\eta = 1$; mais il n'est pas démontré qu'il n'existe pas quelque autre solution primitive, donnant une suite distincte de la précédente. Si donc les formules du n° **13** exigent une discussion plus longue, cette complication est compensée par l'avantage qu'elles ont de donner une solution complète du problème proposé.