JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE MATHIEU

Mémoire sur la théorie des perturbations des mouvements des comètes

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 5 (1879), p. 379-404.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1879_3_5__379_0>

Mémoire sur la théorie des perturbations des mouvements des comètes;

PAR M. ÉMILE MATHIEU.

Le problème de Képler consiste à exprimer, dans le mouvement elliptique d'une planète, le temps t, le rayon vecteur r et l'anomalie vraie Φ au moyen d'une même variable, pour laquelle on choisit l'anomalie excentrique. De plus, quand l'excentricité de l'orbite de la planète est très-petite, on déduit de ces formules des séries très-convergentes qui expriment les coordonnées r, Φ au moyen du temps. Lorsque l'excentricité de l'orbite est très-voisine de l'unité, ce qui a lieu pour les comètes, ces séries ne sont plus convergentes. Lagrange et Laplace, pour étudier les mouvements des comètes, partent cependant encore des formules qui expriment t, r, Φ au moyen de l'anomalie excentrique (*OEuvres de Lagrange*, t. VI, p. 403; *Mécanique céleste*, seconde Partie, Livre IX); mais ils ne parviennent à calculer les éléments variables de leurs orbites que par des quadratures mécaniques.

Depuis, on a cherché à diviser l'orbite d'une comète en plusieurs arcs, de manière à pouvoir calculer analytiquement le mouvement sur chacune de ces parties de l'orbite, en adoptant une variable auxiliaire qui change d'un de ces arcs à l'autre. On peut alors intégrer les équations du mouvement à l'aide de séries et l'on obtient des formules variables d'un arc à l'autre pour représenter le mouvement. Mais cette méthode conduit à des calculs très-laborieux et il y a un grand inconvénient à ne pas adopter une variable indépendante unique.

Afin de perfectionner la théorie des perturbations éprouvées par les comètes, je me suis proposé de trouver des séries qui expriment les coordonnées de la comète dans le plan de son orbite et le temps t au moyen d'une même variable et qui, lorsque l'excentricité est très-voisine de l'unité, soient très-convergentes dans toute l'étendue de l'orbite. De plus, de même que les formules connues pour les développements de r et Φ, dans la théorie des planètes, sont très-commodes pour étudier le mouvement troublé dans des orbites presque circulaires, il m'a fallu diriger mes efforts, pour que les formules nouvelles soient appropriées au calcul des perturbations d'un corps qui se meut dans une orbite extrêmement allongée.

Sur les équations du mouvement elliptique.

1. Supposons un corps attiré par un centre fixe en raison inverse du carré de la distance et formons les équations de son mouvement rapportées au plan de l'orbite.

Désignons par m la masse du corps attiré, par l^2 l'attraction du centre fixe sur cette masse à l'unité de distance et par h la constante de l'équation des forces vives; représentons ensuite par r le rayon vecteur mené du centre d'attraction au corps m, et par Φ l'angle de r avec une droite fixe tracée dans le plan de l'orbite. Alors, en désignant par τ, b, b' trois constantes arbitraires, les intégrales du mouvement peuvent s'écrire

$$(1) \qquad t+\tau=\int\frac{mr\,dr}{\sqrt{2ml^2r-b^2+2mhr^2}},$$

$$(2) \qquad \Phi=\int\frac{b\,dr}{r\sqrt{2ml^2r-b^2+2mhr^2}}+b'.$$

Supposons que l'orbite soit fermée et par conséquent elliptique; désignons alors par a le demi-grand axe de cette ellipse, par e son excentricité et par p son demi-paramètre; il conviendra de prendre pour limite des intégrales précédentes le minimum de r ou $a(1-e)$. Nous aurons ensuite

$$-\frac{l^2}{h}=2a, \quad \frac{b^2}{ml^2}=a(1-e^2)=p.$$

Sur la forme à donner aux équations du mouvement, lorsque l'excentricité est très-voisine de l'unité.

2. Si nous posons l'équation du second degré en r

$$2mhr^2 + 2ml^2r - b^2 = 0$$

ou

(3) $$r^2 - 2ar + ap = 0,$$

les racines représenteront les valeurs minimum et maximum du rayon vecteur r; désignons par c la valeur minimum. Alors, si e est très-voisin de l'unité ou $\frac{p}{a}$ très-petit, on pourra facilement développer c suivant les puissances de $\frac{p}{a}$ et l'on aura

$$c = \frac{p}{2} + \frac{p^2}{8a} + \frac{p^3}{16a^2} + \frac{5p^4}{128a^3} + \ldots.$$

La quantité c étant racine de l'équation (3), la seconde racine est égale à $2a - c$, et nous avons par conséquent

$$\begin{aligned} 2mhr^2 + 2ml^2r - b^2 &= 2mh(r-c)(r-2a+c), \\ &= \frac{ml^2}{a}(2a-c)(r-c)\left(1 - \frac{r}{2a-c}\right). \end{aligned}$$

Nous allons transformer les seconds membres des équations (1) et (2). Nous avons d'abord

$$\int \frac{mrdr}{\sqrt{2ml^2r - b^2 + 2mhr^2}} = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{ma}{2a-c}} \int \frac{rdr}{\sqrt{(r-c)\left(1 - \frac{r}{2a-c}\right)}}.$$

Faisons

$$r = u^2 + c,$$

et nous aurons pour la valeur de cette intégrale

$$\frac{2}{l}\sqrt{\frac{ma}{2a-c}}\int\frac{(u^2+c)\,du}{\sqrt{1-\frac{u^2+c}{2a-c}}}$$
$$=\frac{2}{l}\sqrt{\frac{ma}{2a-c}}\int\left[u^2+c+\frac{1}{2}\frac{1}{2a-c}(u^2+c)^2\right.$$
$$\left.+\frac{1.3}{2.4}\frac{1}{(2a-c)^2}(u^2+c)^3+\ldots\right]du.$$

Remarquons ensuite que l'on a

$$\frac{b}{l\sqrt{\frac{m}{a}(2a-c)}}=\sqrt{\frac{pa}{2a-c}}=\sqrt{c},$$

puisque

$$pa=c(2a-c)=a^2(1-e^2);$$

nous obtenons ainsi pour l'intégrale renfermée dans l'équation (2)

$$\int\frac{b\,dr}{r\sqrt{2ml^2r-b^2+2mhr^2}}=2\sqrt{c}\int\frac{du}{(u^2+c)\sqrt{1-\frac{u^2+c}{2a-c}}}$$
$$=2\sqrt{c}\int\left[\frac{1}{u^2+c}+\frac{1}{2}\frac{1}{2a-c}+\frac{1.3}{2.4}\frac{u^2+c}{(2a-c)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{(u^2+c)^2}{(2a-c)^3}+\ldots\right]du.$$

Pour $u=0$, on a $r=c$ et t se réduit à $-\tau$, temps du passage de m au sommet le plus voisin du centre d'attraction. Supposons que l'on compte l'angle Φ à partir du rayon vecteur minimum, Φ représentera l'anomalie vraie et s'annulera pour $u=0$; la constante b' sera donc nulle aussi. D'après cela, les équations (1) et (2) sont remplacées par les suivantes :

$$t+\tau=\frac{2}{l}\sqrt{\frac{ma}{2a-c}}\int_0^u\left[u^2+c+\frac{1}{2}\frac{(u^2+c)^2}{2a-c}+\frac{1.3}{2.4}\frac{(u^2+c)^3}{(2a-c)^2}+\ldots\right]du,$$
$$\Phi=2\,\text{arc tang}\,\frac{u}{\sqrt{c}}+2\sqrt{c}\int_0^u\left[\frac{1}{2}\frac{1}{2a-c}+\frac{1.3}{2.4}\frac{u^2+c}{(2a-c)^2}+\ldots\right]du.$$

Prenons pour la masse attirante la masse M du Soleil supposée d'abord fixe, et pour la masse attirée m celle d'une comète, nous aurons

$$l = \sqrt{\mathrm{M}m};$$

si nous représentons aussi par P_ν le polynome entier

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_\nu &= \int_0^u (u^2+c)^\nu du \\ &= \frac{u^{2\nu+1}}{2\nu+1} + \frac{\nu}{2\nu-1} c u^{2\nu-1} + \frac{\nu(\nu-1)}{1.2(2\nu-3)} c^2 u^{2\nu-3} + \ldots + c^\nu u,\end{aligned}$$

nous aurons enfin pour les équations du mouvement

$$\begin{aligned}r &= u^2 + c, \\ t+\tau &= \frac{2}{\sqrt{\mathrm{M}}}\sqrt{\frac{a}{2a-c}}\left(\mathrm{P}_1 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{P}_2}{2a-c} + \frac{1.3}{2.4}\frac{\mathrm{P}_3}{(2a-c)^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\mathrm{P}_4}{(2a-c)^3} + \ldots\right), \\ \Phi &= 2\operatorname{arctang}\frac{u}{\sqrt{c}} + \frac{2\sqrt{c}}{2a-c}\left(\frac{1}{2}\mathrm{P}_0 + \frac{1.3}{2.4}\frac{\mathrm{P}_1}{2a-c} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\mathrm{P}_2}{(2a-c)^2} + \ldots\right).\end{aligned}$$

Au périhélie u s'annule et nous pouvons supposer que, lorsque t en croissant passe par $-\tau$, u passe du négatif au positif. Alors, sur la moitié de l'orbite renfermée entre les absides, u variera de $-\sqrt{2a-2c}$ à zéro et sur l'autre moitié entre zéro et $+\sqrt{2a-2c}$.

Les trois formules que nous venons d'obtenir sont très-propres à résoudre le problème dit *de Képler* pour des orbites extrêmement excentriques.

Sur l'expression de $t+\tau$.

3. Si nous ordonnons l'expression de $t+\tau$ par rapport aux puissances de la quantité c, qui est généralement très-petite par rapport à $2a$, et si nous posons, pour abréger,

$$\mathrm{A} = 2a - c,$$

nous avons

$$t+\tau = \frac{2}{\sqrt{\mathrm{M}}}\sqrt{\frac{a}{\mathrm{A}}}\left(\mathrm{T}_0 + \mathrm{T}_1 c + \mathrm{T}_2\frac{c^2}{\mathrm{A}} + \mathrm{T}_3\frac{c^3}{\mathrm{A}^2} + \ldots\right),$$

en faisant

$$T_0 = \frac{u^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{A}\frac{u^5}{5} + \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{A^2}\frac{u^7}{7} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{A^3}\frac{u^9}{9} + \ldots,$$

$$T_1 = u + \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{u^3}{A} + \frac{1.3}{2.4}\frac{3}{5}\frac{u^5}{A^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{4}{7}\frac{u^7}{A^3} + \ldots,$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1.3}{2.4}3.2\frac{u^3}{3A} + \frac{1.3.5}{2.4.6}4.3\frac{u^5}{5A^2} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}5.4\frac{u^7}{7A^3} + \ldots\right),$$

$$T_3 = \frac{1}{2.3}\left(\frac{1.3}{2.4}3.2.1u + \frac{1.3.5}{2.4.6}4.3.2\frac{u^3}{3A} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}5.4.3\frac{u^5}{5A^2} + \ldots\right).$$

....

Les séries qui donnent T_0, T_1, T_2, ... sont peu convergentes dans la partie la plus éloignée de l'orbite; nous montrerons plus loin comment de ce développement de $t+\tau$ on peut en déduire un autre, formé de séries extrêmement convergentes à cette extrémité. Mais on pourra aussi, quand on ne jugera pas ces séries assez convergentes, les remplacer au moyen de l'interpolation par des polynômes entiers d'un nombre limité de termes; on pourra même remplacer utilement dans la pratique ces séries par des polynômes entiers impairs dans toute l'étendue de l'orbite, ou lorsque u varie depuis zéro jusqu'à $\sqrt{2a-2c}$; ce qui n'empêchera pas d'avoir égard aux variations de T_0, T_1, ..., provenant des changements de a et c.

Mais, pour pouvoir faire cette substitution, il faudra d'abord sommer ces séries. Or, en les sommant, on trouve

$$T_0 = -\frac{Au}{2}\sqrt{1-\frac{u^2}{A}} + \frac{A\sqrt{A}}{2}\arcsin\frac{u}{\sqrt{A}},$$

$$T_1 = \frac{1}{2}\frac{u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{A}}} + \frac{\sqrt{A}}{2}\arcsin\frac{u}{\sqrt{A}},$$

$$T_2 = \frac{u}{2}\left(1-\frac{u^2}{A}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(1-\frac{3}{4}\frac{u^2}{A}\right),$$

$$T_3 = \frac{u}{24}\left(1-\frac{u^2}{A}\right)^{-\frac{5}{2}}\left(9-\frac{25}{2}\frac{u^2}{A}+5\frac{u^4}{A^2}\right).$$

Avant de terminer ce numéro, faisons une remarque. Les différentielles des éléments troublés seront de cette forme

$$dl = \left(\mathrm{M}\frac{d\mathrm{V}}{da} + \mathrm{N}\frac{d\mathrm{V}}{db} + \ldots\right)dt,$$

$l, a, b, \ldots$ étant les éléments de la comète, M, N,... des fonctions de ces éléments et V la fonction perturbatrice. A l'extrémité de l'orbite, les dérivées de V seront ordinairement très-petites; on voit donc qu'une petite erreur commise sur t ou dt en produira en général une, relativement beaucoup plus petite, sur la valeur du changement de l.

Calcul de $r\sin\Phi$ *et* $r\cos\Phi$.

4. La fonction perturbatrice ne contient de quantités variables relatives à la comète que Φ et r; de plus, elle ne contient l'angle Φ que par les expressions $r\sin\Phi$, $r\cos\Phi$; ce sont donc ces expressions plutôt que l'angle Φ qu'il importe de déterminer en fonction de u.

L'équation de l'orbite est

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\Phi}:$$

on en conclut

$$r\cos\Phi = \frac{-u^2 - c + p}{e};$$

comme on a

$$p = 2c - \frac{c^2}{a}, \quad e = 1 - \frac{c}{a},$$

il en résulte

$$(a) \qquad r\cos\Phi = -\frac{u^2}{1 - \frac{c}{a}} + c.$$

Nous aurons ensuite

$$r^2\sin^2\Phi = r^2 - r^2\cos^2\Phi = (u^2 + c)^2 - \frac{(u^2 + c - p)^2}{\left(1 - \frac{c}{a}\right)^2}$$

$$= \frac{2p}{\left(1 - \frac{c}{a}\right)^2}\left(u^2 - \frac{u^4}{2a} - \frac{c}{a}u^2\right).$$

Nous en tirons

$$(b)\qquad r\sin\Phi = \frac{\sqrt{2p}}{1-\frac{c}{a}}u\left(1-\frac{u^2}{2a}-\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous avons ensuite

$$\left(1-\frac{u^2}{2a}-\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1-\frac{u^2}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\frac{c}{a}}{1-\frac{u^2}{2a}}\right)^{\frac{1}{2}};$$

développons le second facteur suivant la formule du binôme, puis substituons dans la formule (b) et nous aurons

$$r\sin\Phi = \frac{\sqrt{2p}}{1-\frac{c}{a}}\left[u\left(1-\frac{u^2}{2a}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\frac{c}{a}u\left(1-\frac{u^2}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2.4}\frac{c^2}{a^2}u\left(1-\frac{u^2}{2a}\right)^{-\frac{3}{2}} - \frac{1.3}{2.4.6}\frac{c^3}{a^3}u\left(1-\frac{u^2}{2a}\right)^{-\frac{5}{2}} - \ldots\right],$$

où l'on aura encore à développer, suivant la formule du binôme, les puissances de $1-\frac{u^2}{2a}$.

A l'extrémité de la partie supérieure de l'orbite, les développements des puissances de $1-\frac{u^2}{2a}$ seraient peu convergents; nous montrerons plus loin comment on peut dans cette partie représenter $r\sin\Phi$ plus commodément. Mais on pourra aussi à cette extrémité remplacer, au moyen de l'interpolation, les puissances de $1-\frac{u^2}{2a}$ par des polynômes entiers.

Formules de perturbation.

5. Désignons par k la grandeur de l'axe du plan invariable, par β sa projection sur une perpendiculaire au plan de l'écliptique, par α la longitude du nœud de l'orbite, par g la distance angulaire du périhélie au nœud ascendant, comptée du second point vers le premier. Nous aurons cette formule

$$(1)\qquad m\,\delta V\,dt = -dh\,\delta\tau - d\beta\,\delta\alpha - dk\,\delta g + d\tau\,\delta h + d\alpha\,\delta\beta + dg\,\delta k,$$

mV étant l'accroissement de la fonction de forces (*Dynamique analytique*, Section VII, n° **16**).

Désignons par i l'inclinaison de l'orbite sur le plan de l'écliptique, nous aurons

$$(2) \qquad h = -\frac{l^2}{2a}, \quad k = l\sqrt{mp}, \quad \beta = k\cos i;$$

comme le Soleil n'est plus supposé fixe, on a $l^2 = (\mathrm{M} + m)m$; mais, m étant très-petit vis-à-vis de M, on peut laisser comme ci-dessus $l^2 = \mathrm{M}m$.

Aux quantités h, k, β, il convient de substituer les quantités a, p, i. En différentiant les formules (2), on a

$$dh = \frac{l^2}{2a^2}da, \quad dk = \frac{1}{2}\frac{l\sqrt{m}}{\sqrt{p}}dp,$$
$$d\beta = \frac{1}{2}l\sqrt{\frac{m}{p}}\,dp\cos i - l\sqrt{mp}\sin i\,di,$$

et l'on obtient trois autres équations, en changeant dans celles-ci la caractéristique d en δ. D'après cela, l'équation (1) devient

$$m\,\delta\mathrm{V} = -\frac{l^2}{2a^2}\frac{da}{dt}\delta\tau - \left(\frac{1}{2}\frac{l\sqrt{m}}{\sqrt{p}}\frac{dp}{dt}\cos i - l\sqrt{mp}\sin i\frac{di}{dt}\right)\delta\alpha$$
$$-\frac{1}{2}\frac{l\sqrt{m}}{\sqrt{p}}\frac{dp}{dt}\delta g + \frac{l^2}{2a^2}\frac{d\tau}{dt}\delta a$$
$$+\frac{d\alpha}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{l\sqrt{m}}{\sqrt{p}}\delta p\cos i - l\sqrt{mp}\sin i\,\delta i\right) + \frac{1}{2}\frac{dg}{dt}\frac{l\sqrt{m}}{\sqrt{p}}\delta p.$$

Comme le premier membre peut aussi s'écrire

$$m\left(\frac{d\mathrm{V}}{da}\delta a + \frac{d\mathrm{V}}{dp}\delta p + \frac{d\mathrm{V}}{di}\delta i + \frac{d\mathrm{V}}{d\tau}\delta\tau + \frac{d\mathrm{V}}{d\alpha}\delta\alpha + \frac{d\mathrm{V}}{dg}\delta g\right),$$

on obtient, en égalant de part et d'autre les coefficients des variations des éléments,

$$-\frac{l^2}{2a^2}\frac{da}{dt} = m\frac{d\mathrm{V}}{d\tau}, \quad -\frac{l\sqrt{m}}{2\sqrt{p}}\frac{dp}{dt} = m\frac{d\mathrm{V}}{dg},$$
$$\frac{l^2}{2a^2}\frac{d\tau}{dt} = m\frac{d\mathrm{V}}{da}, \quad -\frac{d\alpha}{dt}l\sqrt{mp}\sin i = m\frac{d\mathrm{V}}{di},$$
$$-\frac{l\sqrt{m}}{2\sqrt{p}}\cos i\frac{dp}{dt} + l\sqrt{mp}\sin i\frac{di}{dt} = m\frac{d\mathrm{V}}{d\alpha},$$
$$\frac{d\alpha}{dt}\frac{l\sqrt{m}}{2\sqrt{p}}\cos i + \frac{l\sqrt{m}}{2\sqrt{p}}\frac{dg}{dt} = m\frac{d\mathrm{V}}{dp}.$$

On en tire

$$da = -\frac{2a^2}{M}\frac{dV}{d\tau}dt,\quad dp = -2\sqrt{p}\frac{dV}{dg}\frac{dt}{\sqrt{M}},$$
$$d\tau = \frac{2a^2}{M}\frac{dV}{da}dt,\quad d\alpha = \frac{-1}{\sin i\sqrt{p}}\frac{dV}{di}\frac{dt}{\sqrt{M}},$$
$$di = \frac{1}{\sin i\sqrt{p}}\frac{dV}{d\alpha}\frac{dt}{\sqrt{M}} - \frac{\cos i}{\sin i}\frac{dV}{dg}\frac{dt}{\sqrt{M}},$$
$$dg = 2\sqrt{p}\frac{dV}{dp}\frac{dt}{\sqrt{M}} + \frac{\cos i}{\sin i\sqrt{p}}\frac{dV}{di}\frac{dt}{\sqrt{M}}.$$

Telles sont les formules qui serviront à déterminer les éléments de la comète.

Sur la formation des dérivées de la fonction perturbatrice par rapport aux éléments de la comète.

6. Quand on appliquera les formules précédentes, il faudra y supposer la fonction perturbatrice V exprimée en fonction des six éléments a, p, τ, i, α, g et de t. Mais, comme nous avons calculé les coordonnées r, $r\cos\Phi$, $r\sin\Phi$ au moyen de la variable auxiliaire u, quand nous substituerons leurs expressions dans V, cette fonction se trouvera exprimée au moyen de u, et, pour appliquer les formules du numéro précédent, il faudra concevoir que u est exprimé en fonction de t, d'après l'équation du n° **3** qui fournit $t+\tau$ et que nous représenterons par

$$(1)\qquad t+\tau = \varphi(u, a, p);$$

car le second membre ne renferme que les quantités u, a, p, puisque c est connu au moyen de a et p.

Comme V ne dépend de τ que par u, on aura

$$\frac{dV}{d\tau} = \frac{dV}{du}\frac{du}{d\tau} = \frac{dV}{du}\frac{du}{dt},$$

$\frac{du}{dt}$ étant tiré de l'équation (1), et l'on en conclut

$$(2)\qquad \frac{dV}{d\tau}dt = \frac{dV}{du}du;$$

le second membre représente la différentielle totale de V, en regardant comme constantes les coordonnées de la planète perturbatrice.

Formons ensuite les expressions

$$\frac{dV}{da}dt, \quad \frac{dV}{dp}dt.$$

V renferme a explicitement et il le contient de plus par u d'après l'équation (1). On aura donc, en mettant entre parenthèses la dérivée partielle

$$\frac{dV}{da} = \left(\frac{dV}{da}\right) + \frac{dV}{du}\frac{du}{da}.$$

En différentiant (1) par rapport à a, on a

$$\frac{du}{da} = \frac{\varphi'_a}{-\varphi'_u},$$

φ'_a, φ'_u étant les dérivées de φ par rapport à a et u, et en différentiant t par rapport à la variable

$$dt = \varphi'_u\,du.$$

Nous aurons donc

$$(3) \qquad \frac{dV}{da}dt = \left(\frac{dV}{da}\right)\varphi'_u\,du - \frac{dV}{du}\varphi'_a\,du.$$

On a de même

$$(4) \qquad \frac{dV}{dp}dt = \left(\frac{dV}{dp}\right)\varphi'_u\,du - \frac{dV}{du}\varphi'_p\,du.$$

Comme i, α, g n'entrent pas dans l'équation (1), nous aurons

$$(5) \qquad \frac{dV}{di}dt = \left(\frac{dV}{di}\right)\varphi'_u\,du,$$

$$(6) \qquad \frac{dV}{d\alpha}dt = \left(\frac{dV}{d\alpha}\right)\varphi'_u\,du,$$

$$(7) \qquad \frac{dV}{dg}dt = \left(\frac{dV}{dg}\right)\varphi'_u\,du.$$

On voit donc comment on pourra former les quantités (2), (3), ..., (7), pour les porter dans les formules de perturbation, et l'on voit qu'elles seront fournies par des séries entières par rapport à la variable, si V est lui-même représenté par une série entière.

Fonction perturbatrice.

7. x, y, z étant les coordonnées rectangulaires de la comète, r son rayon vecteur, Φ son anomalie vraie et m sa masse, représentons par $x_1, y_1, z_1, r_1, \Phi_1, m_1$ les mêmes quantités relatives à la planète perturbatrice et aussi par $r_{0,1}$ la distance de ces deux corps.

La fonction perturbatrice qui concerne la comète est

$$V = -\frac{m_1}{r_{0,1}} + \frac{m_1(xx_1 + yy_1 + zz_1)}{r_1^3},$$

et l'on a ensuite

$$r_{0,1}^2 = r^2 + r_1^2 - 2(xx_1 + yy_1 + zz_1),$$
$$\frac{r_1}{a} = 1 - e_1 \cos n_1(t + \tau_1) + \ldots,$$
$$\Phi_1 = n_1(t + \tau_1) + 2e_1 \sin n_1(t + \tau_1) + \ldots,$$

a_1 étant le demi-grand axe de la planète, e_1 son excentricité, n_1 sa vitesse angulaire moyenne et $-\tau_1$ le temps de son passage à son périhélie.

Désignons par i_1, α_1, g_1 les quantités relatives à la planète, analogues à i, α, g et posons

$$\begin{aligned}
p &= -\cos i \sin\alpha \sin g + \cos\alpha \cos g,\\
q &= -\cos i \sin\alpha \cos g - \cos\alpha \sin g,\\
p' &= \cos i \cos\alpha \sin g + \sin\alpha \cos g,\\
q' &= \cos i \cos\alpha \cos g - \sin\alpha \sin g,\\
p'' &= \sin i \sin g,\\
q'' &= \sin i \cos g.
\end{aligned}$$

Soient aussi $p_1, q_1, p'_1, q'_1, p''_1, q''_1$ les mêmes quantités pour la planète; posons de plus

$$\begin{aligned}
pp_1 + p'p'_1 + p''p''_1 &= G_1,\\
pq_1 + p'q'_1 + p''q''_1 &= G_2,\\
p_1q + p'_1q' + p''_1q'' &= G_3,\\
qq_1 + q'q'_1 + q''q''_1 &= G_4;
\end{aligned}$$

G_1, G_2, G_3, G_4 ne dépendront donc que des six éléments $i, \alpha, g, i_1, \alpha_1, g_1$ des deux orbites. Enfin posons encore

$$r(G_1 \cos\Phi \cos\Phi_1 + G_2 \cos\Phi \sin\Phi_1 + G_3 \cos\Phi_1 \sin\Phi + G_4 \sin\Phi \sin\Phi_1) = K;$$

nous aurons

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = r_1 K,$$

et il en résulte

$$\frac{m_1(xx_1 + yy_1 + zz_1)}{r_1^3} = \frac{m_1 K}{r_1^2},$$

$$r_{0,1}^2 = r^2 + r_1^2 - 2r_1 K.$$

Nous avons d'ailleurs calculé ci-dessus les expressions de $r\sin\Phi$, $r\cos\Phi$, qui entrent dans K.

Sur des formules qui peuvent donner $t+\tau$ et $r\sin\Phi$ dans la région supérieure de l'orbite.

8. Les formules que j'ai obtenues (3 et 4) pour $t+\tau$ et $r\sin\Phi$ présentent des séries peu convergentes vers l'extrémité de l'orbite; on peut parer à cet inconvénient par l'interpolation, d'après ce que j'ai indiqué; mais on peut aussi déterminer $t+\tau$ et $r\sin\Phi$ par de nouvelles formules que je vais établir.

Joignons la position m de la comète au foyer non attractif F' de l'orbite; désignons par r' la distance mF' et par Φ' l'angle qu'elle fait avec le prolongement de la ligne qui joint les foyers F, F'; puis posons

$$r' = u'^2 + c.$$

Pour $u' = 0$, nous aurons $t = T$, le temps d'une demi-révolution et nous pouvons supposer que u' soit négatif sur la demi-orbite où u est positif, et par suite soit positif sur celle où u est négatif. Le temps pour lequel la comète passe à l'aphélie est $-\tau + T$; donc $t + \tau - T$ et Φ' s'obtiendront au moyen des séries qui donnent $t+\tau$ et Φ, en y changeant u en u'. D'après cela, si nous remarquons que nous avons

$$T = \frac{\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{M}},$$

nous obtiendrons, d'après les nos 3, 4, les formules suivantes :

$$(1) \qquad t+\tau-\frac{\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{M}}=\frac{2}{\sqrt{M}}\sqrt{\frac{a}{A}}\left(T'_0+T'_1 c+T'_2\frac{c^2}{A}+\cdots\right),$$

avec

$$T'_0=\frac{u'^3}{3}+\frac{1}{2}\frac{1}{A}\frac{u'^5}{5}+\frac{1.3}{2.4}\frac{1}{A^2}\frac{u'^7}{7}+\cdots,$$
$$T'_1=u'+\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{u'^3}{A}+\frac{1.3}{2.4}\frac{3}{5}\frac{u'^5}{A^2}+\cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(2) \qquad r'\cos\Phi'=\frac{-u'^2}{1-\frac{c}{a}}+c,$$

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} r'\sin\Phi'=\frac{\sqrt{2p}}{1-\frac{c}{a}}\Bigg[u'\left(1-\frac{u'^2}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\frac{c}{a}u'\left(1-\frac{u'^2}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ -\frac{1}{2.4}\frac{c^2}{a^2}u'\left(1-\frac{u'^2}{2a}\right)^{-\frac{3}{2}}-\cdots\Bigg], \end{aligned}\right.$$

les puissances de $1-\frac{u'^2}{2a}$ devant être remplacées par leurs développements tirés de la formule du binôme. Il est évident que ces formules seront très-commodes à employer quand u' sera très-petit, c'est-à-dire vers l'extrémité de l'orbite.

Comme on a

$$r+r'=2a,$$

u'^2 s'exprimera au moyen de u^2 par la formule

$$u'^2=2a-2c-u^2.$$

Nous reconnaissons ensuite facilement que l'on a

$$-r\cos\Phi-r'\cos\Phi'=2a-2c, \quad r\sin\Phi=r'\sin\Phi',$$
$$r^2=r'^2+4(a-c)r'\cos\Phi'+4(a-c)^2.$$

Ces trois formules, jointes aux formules (2), (3), permettent donc de calculer d'une manière nouvelle les quantités r^2, $r\cos\Phi$, $r\sin\Phi$.

L'expression de la fonction V contient la distance $r_{0,1}$ de la comète à la planète perturbatrice, qui est donnée par la formule

$$r_{0,1}^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos(r, r_1);$$

$r\cos(r, r_1)$, comme nous avons vu, est de la forme $\mathrm{H}r\cos\Phi + \mathrm{H}_1 r\sin\Phi$, H, H_1 étant indépendants des coordonnées de la comète. On a donc

$$r_{0,1}^2 = r^2 + r_1^2 - 2r_1(\mathrm{H}r\cos\Phi + \mathrm{H}_1 r\sin\Phi)$$

ou

$$\begin{aligned} r_{0,1}^2 = {} & r'^2 + 4(a-c)r'\cos\Phi' + 4(a-c)^2 + r_1^2 \\ & + 2r_1\mathrm{H}(r'\cos\Phi' + 2a - 2c) - 2r_1\mathrm{H}_1 r'\sin\Phi'. \end{aligned}$$

En se servant des formules qui précèdent, on pourra exprimer la fonction perturbatrice V et ses dérivées par rapport aux éléments, au moyen de la variable u' qui est liée d'une manière si simple à la variable u.

Calcul des dérivées de V *par rapport aux éléments de la comète.*

9. Revenons aux expressions des dérivées de la fonction perturbatrice dont il a été déjà question au n° **6**. Posons, pour abréger,

$$r_1 = a_1[1 - e_1\cos n_1(t+\tau_1) + \ldots] = a_1(1+s).$$

Si nous différentions l'expression de V

$$\mathrm{V} = -\frac{m_1}{r_{0,1}} + \frac{m_1\mathrm{K}}{r_1^2},$$

par rapport à α, nous aurons

$$\frac{d\mathrm{V}}{d\alpha} = -\frac{m_1}{r_{0,1}^2}\frac{dr_{0,1}}{d\alpha} + \frac{m_1}{a_1^2}(1+s)^{-2}\frac{d\mathrm{K}}{d\alpha}.$$

Or on a

$$r_{0,1}^2 = a_1^2(1+s)^2 + (u^2+c)^2 - 2a_1(1+s)\mathrm{K},$$

$$r_{0,1}\frac{dr_{0,1}}{d\alpha} = -a_1(1+s)\frac{d\mathrm{K}}{d\alpha};$$

il en résulte

$$(a)\qquad \frac{dV}{d\alpha}=\left[\frac{-m_1}{r_{0,1}^3}a_1(1+s)+\frac{m_1}{a_1^2}(1+s)^{-2}\right]\frac{dK}{d\alpha};$$

on obtient de même

$$(b)\qquad \frac{dV}{dg}=\left[\frac{-m_1}{r_{0,1}^3}a_1(1+s)+\frac{m_1}{a_1^2}(1+s)^{-2}\right]\frac{dK}{dg},$$

$$(c)\qquad \frac{dV}{di}=\left[\frac{-m_1}{r_{0,1}^3}a_1(1+s)+\frac{m_1}{a_1^2}(1+s)^{-2}\right]\frac{dK}{di}.$$

Formons les dérivées de K qui entrent dans ces formules. Pour simplifier l'écriture, posons

$$r\cos\Phi=\rho_1,\quad r\sin\Phi=\rho_2;$$

ρ_1, ρ_2 peuvent, d'après ce que nous avons vu, être exprimés sous forme entière par rapport à u. Nous aurons

$$K=\rho_1 G_1\cos\Phi_1+\rho_1 G_2\sin\Phi_1+\rho_2 G_3\cos\Phi_1+\rho_2 G_4\sin\Phi_1.$$

Il en résulte

$$\frac{dK}{d\alpha}=\rho_1\frac{dG_1}{d\alpha}\cos\Phi_1+\rho_1\frac{dG_2}{d\alpha}\sin\Phi_1+\rho_2\frac{dG_3}{d\alpha}\cos\Phi_1+\rho_2\frac{dG_4}{d\alpha}\sin\Phi_1.$$

En différentiant les expressions de p, q, p', q', p'', q'' données au n° **7**, on obtient

$$\frac{dp}{d\alpha}=-p',\quad \frac{dp'}{d\alpha}=p,\quad \frac{dp''}{d\alpha}=0,$$
$$\frac{dq}{d\alpha}=-q',\quad \frac{dq'}{d\alpha}=q,\quad \frac{dq''}{d\alpha}=0,$$

puis, d'après les valeurs de G_1, G_2, G_3, G_4 données dans le même numéro,

$$\frac{dG_1}{d\alpha}=-p'p_1+pp'_1,\quad \frac{dG_3}{d\alpha}=-q'p_1+qp'_1,$$
$$\frac{dG_2}{d\alpha}=-p'q_1+pq'_1,\quad \frac{dG_4}{d\alpha}=-q'q_1+qq'_1.$$

Nous avons donc en premier lieu

$$
(\mathrm{A})\quad \left\{\begin{aligned}\frac{d\mathrm{K}}{d\alpha} = (-p'p_1 + pp'_1)\rho_1\cos\Phi_1 &+ (-p'q_1 + pq'_1)\rho_1\sin\Phi_1 \\ + (-q'p_1 + qp'_1)\rho_2\cos\Phi_1 &+ (-q'q_1 + qq'_1)\rho_2\sin\Phi_1.\end{aligned}\right.
$$

La recherche de la dérivée de K par rapport à g conduit aux calculs suivants :

$$
\frac{d\mathrm{K}}{dg} = \frac{d\mathrm{G}_1}{dg}\rho_1\cos\Phi_1 + \frac{d\mathrm{G}_2}{dg}\rho_1\sin\Phi_1 + \frac{d\mathrm{G}_3}{dg}\rho_2\cos\Phi_1 + \frac{d\mathrm{G}_4}{dg}\rho_2\sin\Phi_1,
$$

$$
\frac{dp}{dg} = q,\quad \frac{dp'}{dg} = q',\quad \frac{dp''}{dg} = q'',
$$

$$
\frac{dq}{dg} = -p,\quad \frac{dq'}{dg} = -p',\quad \frac{dq''}{dg} = -p''.
$$

$$
\frac{d\mathrm{G}_1}{dg} = \mathrm{G}_3,\quad \frac{d\mathrm{G}_2}{dg} = \mathrm{G}_4,\quad \frac{d\mathrm{G}_3}{dg} = -\mathrm{G}_1,\quad \frac{d\mathrm{G}}{dg} = -\mathrm{G}_2.
$$

Il en résulte en second lieu

$$
(\mathrm{B})\quad \frac{d\mathrm{K}}{dg} = \mathrm{G}_3\rho_1\cos\Phi_1 + \mathrm{G}_4\rho_1\sin\Phi_1 - \mathrm{G}_1\rho_2\cos\Phi_1 - \mathrm{G}_2\rho_2\sin\Phi_1.
$$

Nous obtenons ensuite

$$
\frac{d\mathrm{K}}{di} = \frac{d\mathrm{G}_1}{di}\rho_1\cos\Phi_1 + \frac{d\mathrm{G}_2}{di}\rho_1\sin\Phi_1 + \frac{d\mathrm{G}_3}{di}\rho_2\cos\Phi_1 + \frac{d\mathrm{G}_4}{di}\rho_2\sin\Phi_1;
$$

$$
\frac{dp}{di} = \sin i\sin\alpha\sin g,\quad \frac{dp'}{di} = -\sin i\cos\alpha\sin g,\quad \frac{dp''}{di} = \cos i\sin g,
$$

$$
\frac{dq}{di} = \sin i\sin\alpha\cos g,\quad \frac{dq'}{di} = -\sin i\cos\alpha\cos g,\quad \frac{dq''}{di} = \cos i\cos g.
$$

$$
\frac{d\mathrm{G}_1}{di} = \sin g\,(p_1\sin i\sin\alpha - p'_1\sin i\cos\alpha + p''_1\cos i),
$$

$$
\frac{d\mathrm{G}_2}{di} = \sin g\,(q_1\sin i\sin\alpha - q'_1\sin i\cos\alpha + q''_1\cos i),
$$

$$
\frac{d\mathrm{G}_3}{di} = \cos g\,(p_1\sin i\sin\alpha - p'_1\sin i\cos\alpha + p''_1\cos i),
$$

$$
\frac{d\mathrm{G}_4}{di} = \cos g\,(q_1\sin i\sin\alpha - q'_1\sin i\cos\alpha + q''_1\cos i).
$$

Nous en concluons en troisième lieu

$$(\mathrm{C})\quad \left\{\begin{aligned}\frac{d\mathrm{K}}{di} &= [(p_1 \sin i \sin\alpha - p'_1 \sin i \cos\alpha + p''_1 \cos i)\cos\Phi_1 \\ &\quad + (q_1 \sin i \sin\alpha - q'_1 \sin i \cos\alpha + q''_1 \cos i)\sin\Phi_1] \\ &\quad \times (\rho_1 \sin g + \rho_2 \cos g).\end{aligned}\right.$$

10. Calculons la dérivée $\frac{d\mathrm{V}}{du}$ nécessaire au calcul de l'élément a. Nous aurons

$$(d)\qquad \frac{d\mathrm{V}}{du} = m_1 \frac{2u(u^2+c)}{r_{0,1}^3} + \left[\frac{m_1}{a_1^2}(1+s)^{-2} - m_1 \frac{a_1(1+s)}{r_{0,1}^3}\right]\frac{d\mathrm{K}}{du},$$

avec

$$(\mathrm{D})\quad \frac{d\mathrm{K}}{du} = \mathrm{G}_1 \cos\Phi_1 \frac{d\rho_1}{du} + \mathrm{G}_2 \sin\Phi_1 \frac{d\rho_1}{du} + \mathrm{G}_3 \cos\Phi_1 \frac{d\rho_2}{du} + \mathrm{G}_4 \sin\Phi_1 \frac{d\rho_2}{du}.$$

V, considéré comme fonction de u, renferme a par la quantité c et par K, qui lui-même contient a et c. Nous aurons donc

$$(e)\qquad \left(\frac{d\mathrm{V}}{da}\right) = m_1 \frac{u^2+c}{r_{0,1}^3}\frac{dc}{da} + \left[\frac{m_1}{a_1^2}(1+s)^{-2} - m_1 \frac{a_1(1+s)}{r_{0,1}^3}\right]\frac{d\mathrm{K}}{da},$$

avec

$$(\mathrm{E})\quad \frac{d\mathrm{K}}{da} = \mathrm{G}_1 \cos\Phi_1 \frac{d\rho_1}{da} + \mathrm{G}_2 \sin\Phi_1 \frac{d\rho_1}{da} + \mathrm{G}_3 \cos\Phi_1 \frac{d\rho_2}{da} + \mathrm{G}_4 \sin\Phi_1 \frac{d\rho_2}{da},$$

c étant considéré comme fonction de a dans ρ_1, ρ_2.

On aura de même

$$(f)\qquad \left(\frac{d\mathrm{V}}{dp}\right) = m_1 \frac{u^2+c}{r_{0,1}^3}\frac{dc}{dp} + \left[\frac{m}{a_1^2}(1+s)^{-2} - \frac{m_1 a_1(1+s)}{r_{0,1}^3}\right]\frac{d\mathrm{K}}{dp},$$

$$(\mathrm{F})\quad \frac{d\mathrm{K}}{dp} = \mathrm{G}_1 \cos\Phi_1 \frac{d\rho_1}{dp} + \mathrm{G}_2 \sin\Phi_1 \frac{d\rho_1}{dp} + \mathrm{G}_3 \cos\Phi_1 \frac{d\rho_2}{dp} + \mathrm{G}_4 \sin\Phi_1 \frac{d\rho_2}{dp}.$$

Les formules (a), (A), (b), (B), ..., (f), (F) montrent que les dérivées de la fonction V seront facilement réduites en séries entières, si l'on peut réduire $\frac{1}{r_{0,1}^3}$ en une telle série.

Calculons les dérivées par rapport à a et p, qui se trouvent dans ces dernières formules.

Nous avons d'abord

$$\frac{dc}{da} = -\frac{p^2}{8a^2} - \frac{p^3}{8a^3} - \frac{15}{128}\frac{p^4}{a^4} - \ldots,$$

$$\frac{dc}{dp} = \frac{1}{2} + \frac{p}{4a} + \frac{3p^2}{16a^2} + \frac{5p^3}{32a^3} + \ldots,$$

$$\frac{d\rho_1}{da} = \left(\frac{p}{2a^2} + \frac{3p^2}{4a^3} + \frac{15p^3}{16a^4} + \frac{35p^4}{32a^5} + \ldots\right)u^2 + \frac{dc}{da},$$

$$\frac{d\rho_1}{dp} = -\left(1 + \frac{3p}{2a} + \frac{15p^2}{8a^2} + \frac{35p^4}{16a^3} + \ldots\right)\frac{u^2}{2a} + \frac{dc}{dp}.$$

Pour indiquer les expressions des dérivées de ρ_2, posons

$$\varepsilon = \frac{c}{a},\ \mathrm{A} = \frac{\sqrt{2p}}{1 - \frac{c}{a}},$$

nous aurons

$$\mathrm{A} = \sqrt{2p}\left(1 + \frac{p}{2a} + \frac{3p^2}{8a^2} + \frac{5p^3}{16a^3} + \frac{35}{128}\frac{p^4}{a^4} + \ldots\right),$$

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_2}{da} = \frac{\mathrm{A}u^3}{2a^2}&\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{u^2}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\varepsilon\left(1 - \frac{u^2}{2a}\right)^{-\frac{3}{2}}\right.\\
&\left. + \frac{1}{2.4}\,\frac{3}{2}\,\varepsilon^2\left(1 - \frac{u^2}{2a}\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{1.3}{2.4.6}\,\frac{5}{2}\,\varepsilon^3\left(1 - \frac{u^2}{2a}\right)^{-\frac{7}{2}} + \ldots\right]\\
&+ \frac{d\mathrm{A}}{da}u\left(1 - \frac{u^2}{2a}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\frac{d(\varepsilon\mathrm{A})}{da}u\left(1 - \frac{u^2}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}}\\
&- \frac{1}{2.4}\frac{d(\varepsilon^2\mathrm{A})}{da}u\left(1 - \frac{u^2}{2a}\right)^{-\frac{3}{2}} - \frac{1.3}{2.4.6}\frac{d(\varepsilon^3\mathrm{A})}{da}u\left(1 - \frac{u^2}{2a}\right)^{-\frac{5}{2}}\\
&- \frac{1.3.5}{2.4.6.8}\frac{d(\varepsilon^4\mathrm{A})}{da}u\left(1 - \frac{u^2}{2a}\right)^{-\frac{7}{2}} - \ldots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_2}{dp} = &\frac{d\mathrm{A}}{dp}u\left(1 - \frac{u^2}{2a}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\frac{d(\varepsilon\mathrm{A})}{dp}u\left(1 - \frac{u^2}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}}\\
&- \frac{1}{2.4}\frac{d(\varepsilon^2\mathrm{A})}{dp}u\left(1 - \frac{u^2}{2a}\right)^{-\frac{3}{2}} - \frac{1.3}{2.4.6}\frac{d(\varepsilon^3\mathrm{A})}{dp}u\left(1 - \frac{u^2}{2a}\right)^{-\frac{5}{2}} - \ldots.\end{aligned}$$

Les dérivées de $\varepsilon A, \varepsilon^2 A, \ldots$, par rapport à a et p se formeront immédiatement, sachant que l'on a

$$\varepsilon A = \sqrt{2}\left(\frac{p^{\frac{3}{2}}}{2a} + \frac{3p^{\frac{5}{2}}}{8a^2} + \frac{5p^{\frac{7}{2}}}{16a^3} + \frac{35}{128}\frac{p^{\frac{9}{2}}}{a^4} + \ldots\right),$$

$$\varepsilon^2 A = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{p^{\frac{5}{2}}}{a^2} + \frac{p^{\frac{7}{2}}}{a^3} + \frac{15}{16}\frac{p^{\frac{9}{2}}}{a^4} + \ldots\right),$$

$$\varepsilon^3 A = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\frac{p^{\frac{7}{2}}}{a^2} + \frac{5}{4}\frac{p^{\frac{9}{2}}}{a^4} + \ldots\right),$$

$$\varepsilon^4 A = \frac{\sqrt{2}}{16}\left(\frac{p^{\frac{9}{2}}}{a^4} + \ldots\right).$$

....

Développement de $\frac{1}{r_{0,1}^3}$.

11. L'expression de K est

$$K = \rho_1 G_1 \cos\Phi_1 + \rho_1 G_2 \sin\Phi_1 + \rho_2 G_3 \cos\Phi_1 + \rho_2 G_4 \sin\Phi_1;$$

l'expression de ρ_2 se compose d'une première partie (n° 4)

$$Au\left(1 - \frac{u^2}{2a}\right)^{\frac{1}{2}},$$

qui est le plus considérable et que nous désignerons par ρ_3; nous représenterons par ρ_4 la partie restante de ρ_2, en sorte que

$$\rho_2 = \rho_3 + \rho_4.$$

Faisons encore

$$K_0 = \rho_1 G_1 \cos n_1(t+\tau_1) + \rho_1 G_2 \sin n_1(t+\tau_1) + \rho_3 G_3 \cos n_1(t+\tau_1) + \rho_3 G_4 \sin n_1(t+\tau_1);$$

désignons la quantité $n_1(t+\tau_1)$, qui forme la partie la plus considérable de Φ_1, par φ et la partie restante par L, en sorte que

$$\Phi_1 = n_1(t+\tau_1) + L = \varphi + L;$$

alors, si nous posons

$$K = K_0 + K_1,$$

nous aurons

$$K_1 = \frac{dK_0}{d\rho_3}\rho_4 + \frac{dK_0}{d\varphi}L + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2K_0}{d\rho_3^2}\rho_4^2 + 2\frac{d^2K_0}{d\rho_3 d\varphi}\rho_4 L + \frac{d^2K_0}{d\varphi^2}L^2\right) + \ldots$$

Enfin posons, comme précédemment (n° **9**),

$$r_1 = a_1(1+s)$$

et de plus

$$[a_1^2 - 2K_0 a_1 + (u^2+c)^2]^{-\frac{3}{2}} = \Theta,$$

il en résultera

$$(k)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{r_{0,1}^3} &= \Theta + \frac{d\Theta}{da_1}a_1 s + \frac{d\Theta}{dK_0}K_1 \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\Theta}{da_1^2}a_1^2 s^2 + 2\frac{d^2\Theta}{da_1 K_0}a_1 s K_1 + \frac{d^2\Theta}{dK_0^2}K_1^2\right) \\ &+ \ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Il reste à développer Θ.

Première méthode. — Si nous développons l'expression

$$(1 - 2xy + y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

suivant les puissances de y, nous aurons

$$(l)\qquad (1 - 2xy + y^2)^{-\frac{3}{2}} = 1 + L_1 y + L_2 y^2 + L_3 y^3 + \ldots,$$

en faisant

$$\begin{aligned}
L_1 &= 3x, \\
L_2 &= -\frac{3}{2} + \frac{3.5}{2.4}4x^2, \\
L_3 &= -\frac{3.5}{2.4}2.2x + \frac{3.5.7}{2.4.6}2^3x^3, \\
L_4 &= \frac{3.5}{2.4} - \frac{3.5.7}{2.4.6}3.2^2x^2 + \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}2^4x^4, \\
L_5 &= \frac{3.5.7}{2.4.6}\,\frac{3.2}{1.2}2x - \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}4.2^3x^3 + \frac{3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10}2^5x^5, \\
L_6 &= -\frac{3.5.7}{2.4.6}\,\frac{3.2\ 1}{1.2.3} + \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}\,\frac{4.3}{1.2}2^2x^2 \\
&\quad + \frac{3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10}5.2^4x^4 + \frac{3.5.7.9.11.13}{2.4.6.8.10.12}2^6x^6 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Il est aisé de reconnaître que cette série, procédant suivant les puissances ascendantes de y, est convergente pour toute valeur de y dont le module est inférieur à l'unité, si x est < 1.

Suivant que $u^2 + c$ est plus petit ou plus grand que a_1, écrivons Θ sous l'une de ces deux formes

$$\Theta = a_1^{-3}\left[1 - 2\frac{K_0}{u^2+c}\,\frac{u^2+c}{a_1} + \left(\frac{u^2+c}{a_1}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}},$$

$$\Theta = (u^2+c)^{-3}\left[1 - 2\frac{K_0}{u^2+c}\,\frac{a_1}{u^2+c} + \left(\frac{a_1}{u_2+c}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}.$$

Si $u^2 + c$ est $< a_1$, c'est-à-dire si la comète est plus rapprochée du Soleil que la planète, on pourra développer Θ d'après la formule (l), en faisant

$$x = \frac{K_0}{u^2+c}, \quad y = \frac{u^2+c}{a_1};$$

on aura ainsi

$$\Theta = \frac{1}{a_1^3} + \frac{3}{a_1^4}K_0 + \left[-\frac{3}{2}(u^2+c)^2 + \frac{15}{2}K_0^2\right]\frac{1}{a_1^5} + \left[-\frac{15}{2}K_0(u^2+c) + \frac{35}{2}K_0^3\right]\frac{1}{a_1^6} + \ldots;$$

on formera facilement les dérivées de Θ par rapport à K_0 et a_1, et l'on substituera les séries qui représentent Θ et ses dérivées dans l'équation (k).

Si $u^2 + c$ est $> a_1$ et par suite la comète plus éloignée du Soleil que la planète, on développera Θ d'après la formule (l) en faisant

$$x = \frac{K_0}{u^2+c}, \quad y = \frac{a_1}{u^2+c},$$

et l'on aura

$$\Theta = \frac{1}{(u^2+c)^3} + \frac{3K_0 a_1}{(u^2+c)^5} + \left[-\frac{3}{2}\,\frac{1}{(u^2+c)^5} + \frac{15}{2}\,\frac{K_0^2}{(u^2+c)^7}\right]a_1^2 + \left[-\frac{15}{2}\,\frac{K_0}{(u^2+c)^7} + \frac{35}{2}\,\frac{K_0^3}{(u^2+c)^9}\right]a_1^3 + \ldots.$$

Cette expression de Θ est beaucoup moins commode que la précédente, parce qu'elle n'est pas entière par rapport à u, mais qu'elle renferme, comme dénominateurs de ses différents termes, des puissances de $u^2 + c$.

Seconde méthode. — La méthode précédente a l'inconvénient d'exiger essentiellement la distinction de deux cas; elle est d'une application facile dans le premier cas, mais il n'en est pas de même dans le second, comme nous venons de le dire.

Pour opérer d'une manière plus uniforme et n'avoir pas à distinguer si la comète est plus ou moins éloignée du Soleil que la planète perturbatrice, ce qui sera surtout utile, si l'on veut avoir égard aux perturbations provenant de plusieurs planètes, on procédera de la manière suivante :

On a

$$\Theta = [a_1^2 + (u^2 + c)^2]^{-\frac{3}{2}}\left[1 - \frac{2K_0 a_1}{a_1^2 + (u^2 + c)^2}\right]^{-\frac{3}{2}},$$

et si l'on pose

$$a_1^2 + (u^2 + c)^2 = P,$$

il en résulte

$$\begin{aligned}\Theta &= P^{-\frac{3}{2}}\left(1 - \frac{2K_0 a_1}{P}\right)^{-\frac{3}{2}}\\ &= P^{-\frac{3}{2}} + 3K_0 a_1 P^{-\frac{5}{2}} + \frac{3.5}{1.2} K_0^2 a_1^2 P^{-\frac{7}{2}} + \frac{3.5.7}{1.2.3} K_0^3 a_1^3 P^{-\frac{9}{2}} + \ldots.\end{aligned}$$

Pour développer les puissances de P renfermées dans cette formule, nous pouvons mettre P sous cette forme

$$P = [a_1^2 + (2a - c)^2]\left[1 + \frac{u^4 + 2cu^2 - 4a(a - c)}{a_1^2 + (2a - c)^2}\right];$$

la fonction $\frac{u^4 + 2cu^2 - 4a(a - c)}{a_1^2 + (2a - c)^2}$ est une quantité négative dont la valeur absolue est plus petite que l'unité; on peut donc développer les puissances de P d'après la formule du binôme; mais ces développements ne seront pas ordonnables suivant les puissances de u; ils seraient néanmoins entiers par rapport à u, mais leurs termes seraient très-compliqués.

Aussi ce qu'il y aura de préférable sera-t-il de remplacer $P^{-\frac{3}{2}}, P^{-\frac{5}{2}}, \ldots$

au moyen de l'interpolation par des polynômes entiers en u, et l'on aura ainsi Θ même, sous forme entière.

On calculera de même les dérivées de Θ,

$$\frac{d\Theta}{d\mathrm{K}_0} = 3a_1\left(\mathrm{P}^{-\frac{5}{2}} + 5\mathrm{K}_0 a_1 \mathrm{P}^{-\frac{7}{2}} + \frac{5.7}{1.2}\mathrm{K}_0^2 a_1^2 \mathrm{P}^{-\frac{9}{2}} + \frac{5.7.9}{1.2.3}\mathrm{K}_0^3 a_1^3 \mathrm{P}^{-\frac{11}{2}} + \ldots\right),$$

$$\frac{d\Theta}{da_1} = -3(a_1 - \mathrm{K}_0)\left(\mathrm{P}^{-\frac{5}{2}} + 5\mathrm{K}_0 a_1 \mathrm{P}^{-\frac{7}{2}} + \frac{5.7}{1.2}\mathrm{K}_0^2 a_1^2 \mathrm{P}^{-\frac{9}{2}} + \ldots\right),$$

ainsi que les dérivées des ordres supérieurs ; elles s'obtiendront toutes sous forme entière.

On pourrait aussi développer Θ en série entière par rapport à la variable u', en employant les formules du n° **8**.

Intégration des formules de perturbation.

12. Quand on aura calculé les seconds membres des formules de perturbation du n° **5**, d'après tout ce qui précède, on ne pourra pas encore passer immédiatement à leur intégration ; car, auparavant, il faudra faire disparaître dans ces seconds membres le temps t qui se trouve introduit par les coordonnées de la planète perturbatrice, afin de n'y laisser que la variable u.

D'après les formules qui fournissent (n$^{\text{os}}$ **9**, **10**) les dérivées de V, le temps t entre dans ces dérivées par s, $\sin\Phi_1$, $\cos\Phi_1$ et par $\frac{1}{r_{0,1}^3}$ qui renferme ces trois quantités.

Les expressions des coordonnées de la planète sont

$$r_1 = a_1(1 + s)$$

avec $s = -e_1\cos n_1(t + \tau_1) - \frac{e_1^2}{2}[\cos 2n_1(t + \tau_1) - 1] + \ldots;$

$$\Phi_1 = n_1(t + \tau_1) + \mathrm{L}$$

avec $\mathrm{L} = 2e_1 \sin n_1(t + \tau_1) + \frac{5}{4}e_1^2 \sin 2n_1(t + \tau_1) + \ldots.$

On a

$$n_1 = \sqrt{\mathrm{M}}\, a_1^{-\frac{3}{2}},$$

et d'après la formule qui donne $t+\tau$ (n° 3), si nous posons

$$F = 2a_1^{-\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{a}{A}}\left(\frac{u^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{A}\frac{u^5}{5} + \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{A^2}\frac{u^7}{7} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{A^3}\frac{u^9}{9} + \cdots\right)$$

$$S = 2a_1^{-\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{a}{A}}\left(T_1 c + T_2\frac{c^2}{A} + T_3\frac{c^3}{A^2} + \cdots\right),$$

nous obtiendrons

$$n_1(t+\tau) = F + S,$$
$$n_1(t+\tau_1) = n_1(\tau_1-\tau) + F + S.$$

Si donc on pose

$$J_1 = \sin n_1(\tau_1-\tau)\left(1 - \frac{S^2}{1.2} + \frac{S^4}{1.2.3.4} - \cdots\right) + \cos n_1(\tau_1-\tau)\left(S - \frac{S^3}{1.2.3} + \cdots\right),$$

$$J_2 = \cos n_1(\tau_1-\tau)\left(1 - \frac{S^2}{1.2} + \frac{S^4}{1.2.3.4} - \cdots\right) - \sin n_1(\tau_1-\tau)\left(S - \frac{S^3}{1.2.3} + \cdots\right),$$

on obtiendra

$$\sin n_1(t+\tau_1) = J_1\cos F + J_2\sin F,$$
$$\cos n_1(t+\tau_1) = J_2\cos F - J_1\sin F.$$

En remplaçant la quantité S dans J_1, J_2, on obtiendra J_1, J_2 sous forme de séries entières en u, qu'on ordonnera par rapport aux puissances de c. D'après la formule qui donne F, on peut développer $\sin F$, $\cos F$ en des séries entières par rapport à u; mais il pourra être plus commode dans la pratique de remplacer $\sin F$, $\cos F$ au moyen de l'interpolation par des fonctions entières de u d'un nombre limité de termes.

Connaissant en fonction de u les quantités $\sin n_1(t+\tau_1)$, $\cos n_1(t+\tau_1)$, on en conclura facilement s et L. Enfin, connaissant $\sin n_1(t+\tau_1)$, $\cos n_1(t+\tau_1)$ et L en fonction de u, nous formerons

$\sin\Phi_1$, $\cos\Phi_1$ au moyen des formules

$$\sin\Phi_1 = \sin n_1(t+\tau_1)\left(1-\frac{L^2}{1.2}+\cdots\right)+\cos n_1(t+\tau_1)\left(L-\frac{L^3}{1.2.3}+\cdots\right),$$
$$\cos\Phi_1 = \cos n_1(t+\tau_1)\left(1-\frac{L^2}{1.2}+\cdots\right)-\sin n_1(t+\tau_1)\left(L-\frac{L^3}{1.2.3}+\cdots\right).$$

Si donc Θ a été calculé sous forme entière, ce qui aura lieu lorsqu'on emploiera la seconde méthode (n° **11**), les différentielles des éléments troublés se présenteront sous la forme entière par rapport à u et s'intégreront très-facilement. Les intégrations, quoique sans difficulté, pourraient être assez compliquées, si l'on employait la première méthode de développement de Θ.