

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

H. RESAL

**Note sur les conditions de résistance d'un tube elliptique, dont l'épaisseur est faible, soumis à l'action d'une pression uniforme intérieure**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 3<sup>e</sup> série*, tome 5 (1879), p. 319-328.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1879\\_3\\_5\\_319\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1879_3_5_319_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

---

*Note sur les conditions de résistance d'un tube elliptique, dont l'épaisseur est faible, soumis à l'action d'une pression uniforme intérieure;*

PAR M. H. RESAL.

---

Le profil de la section droite du tube est déterminé par deux courbes parallèles à une ellipse dont elles sont équidistantes. L'équidistance ou la demi-épaisseur est censée assez faible pour que l'on puisse supposer que la pression est répartie sur la surface du cylindre elliptique moyen.

Nous ne considérerons d'ailleurs que des éléments de la pièce suffisamment éloignés de ses extrémités pour que le mode d'agencement des fonds n'ait aucune influence appréciable sur leurs déplacements transversaux, ce qui revient théoriquement à considérer ces éléments comme appartenant à une chaudière dont la longueur serait infinie.

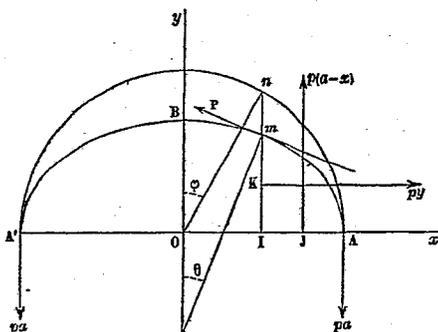
Concevons que l'on détache de la pièce un tronçon d'une longueur égale à l'unité et limité par deux sections droites; la considération de ce tronçon se ramène évidemment à celle de l'une de ces sections, en supposant que la pression normale soit uniformément répartie sur l'ellipse moyenne.

Soient (*fig. 1*)

O le centre de l'ellipse;

ABA' l'une des demi-ellipses, A et A' étant les sommets du grand axe et B celui du demi-petit axe;

$OAx, OBy$  les parties positives des axes des  $x$  et des  $y$  ;  
 $2a, 2b, e$  le grand axe, le petit axe et l'excentricité relative de la  
 courbe ;



$x = OI, y = Im$  les coordonnées d'un point  $m$  du quart d'ellipse  $AB$   
 considéré en particulier ;

$\theta$  et  $\varphi$  les angles formés avec  $Oy$  par la normale en  $m$  et par le  
 rayon  $Om$  mené à l'intersection du cercle circonscrit avec la direc-  
 tion de  $Im$  ;

$s$  l'arc  $Bm$  de l'ellipse ;

$p$  la pression par unité de longueur d'arc ;

$2e$  l'épaisseur.

En se rappelant que l'on a  $mI = \frac{b}{a}nI = nI\sqrt{1-c^2}$ , la figure donne

$$(a) \quad \begin{cases} x = a \sin \varphi, \\ y = a\sqrt{1-c^2} \cos \varphi. \end{cases}$$

On déduit de là

$$(b) \quad \begin{cases} y^2 + x^2 = a^2(1-c^2 + c^2 \sin^2 \varphi), \\ dx = a \cos \varphi d\varphi, \\ dy = -a\sqrt{1-c^2} \sin \varphi d\varphi, \\ ds = a\sqrt{1-c^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \\ \cos \theta = \frac{dx}{ds} = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1-c^2 \sin^2 \varphi}}, \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{1-c^2} \sin \varphi}{\sqrt{1-c^2 \sin^2 \varphi}}. \end{cases}$$

Les tractions égales exercées en A et en A', par l'autre demi-moitié de l'ellipse, ont pour valeur  $pa$ , puisqu'elles doivent faire équilibre à la résultante  $2pa$  des pressions élémentaires qui agissent sur A'BA. La pression totale sur Am a pour composantes

$$p \cdot AI = p(a - x), \quad p \cdot mI = py,$$

respectivement parallèles à Oy et à Ox; la direction de la première passe par le milieu J de AI, et celle de la seconde par le milieu K de Im.

*Résultante des forces élastiques normales à une section.* — Si nous projetons sur la tangente mP en m les forces qui sollicitent l'arc Am, on trouve, pour cette résultante,

$$P = pa \sin \theta - p(a - x) \sin \theta + py \cos \theta = p(x \sin \theta + y \cos \theta),$$

ou, en remplaçant  $x, y, \sin \theta, \cos \theta$  par leurs valeurs en fonction de  $\varphi$  que donnent les formules (a) et (b),

$$(1) \quad P = pa \frac{\sqrt{1 - c^2}}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}}.$$

*Moment fléchissant.* — Le moment du couple élastique développé dans la section A est une constante dont la valeur ne peut résulter que de la solution du problème. En prenant les moments par rapport à m des forces  $pa, p(a - x), py$ , la première étant la seule qui tende à augmenter la courbure, et ajoutant à la somme obtenue une constante pour représenter le moment du couple élastique en A, on a, pour le moment fléchissant,

$$\pi = p \left[ a(a - x) - \frac{y^2}{2} - \frac{(a - x)^2}{2} + \text{const.} \right] = -\frac{p}{2}(y^2 + x^2 + \text{const.}),$$

ou, en ayant égard à la première des formules (b) et désignant par C une constante arbitraire,

$$(2) \quad \pi = \frac{pa^2 c^2}{2} (C - \sin^2 \varphi).$$

*Équation de condition.* — En se reportant à la formule (1) du n° 44, on voit que, pour exprimer que l'angle  $\gamma Ox$  reste droit après la déformation, il faut poser

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi \frac{ds}{d\varphi} d\varphi = 0,$$

ou, en vertu de la quatrième des formules (b) et eu égard à la valeur ci-dessus de  $\pi$ ,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = 0,$$

d'où

$$(3) \quad C = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi} d\varphi}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi} d\varphi}.$$

Chacun des éléments de l'intégrale du numérateur étant plus petit que l'élément correspondant de l'intégrale du dénominateur, la valeur de la première intégrale est inférieure à celle de l'autre, d'où il suit que  $C$  est plus petit que l'unité. Dans les cas extrêmes où  $c = 0$  et  $c = 1$ , les intégrations peuvent s'effectuer, et l'on trouve  $C = \frac{1}{2}$ ,  $C = \frac{1}{3}$ , d'où l'on peut déjà conclure que, pour une valeur quelconque  $c$ ,  $C$  sera compris entre  $\frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{3}$ .

En développant suivant la formule du binôme, on a

$$(c) \quad (1 - c^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \dots (2m-3)}{2 \cdot 4 \dots 2m} c^{2m} \sin^{2m} \varphi;$$

d'ailleurs

$$(d) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} \varphi d\varphi = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1) \pi}{2 \cdot 4 \dots 2m} \frac{\pi}{2}.$$

Maintenant nous avons, en nous reportant au développement (c),

$$\sin^2 \varphi (1 - c^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \dots (2m-1)}{2 \cdot 4 \dots 2m} c^{2m} \sin^{2m+2} \varphi;$$

mais, en remplaçant  $2m$  par  $2m + 2$ , la formule (d) nous donne

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+2} \varphi \, d\varphi = \frac{1.3.5 \dots (2m+1) \pi}{2.4 \dots (2m+2) 2}.$$

On a donc, par suite,

$$(d) \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi \right. \\ \left. = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{1}{2} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m+1}{(2m-1)(2m+1)} \left[ \frac{1.3 \dots (2m-1)}{2.4.6 \dots 2m} e^m \right]^2 \right\} \right\}.$$

La formule (3) devient alors

$$(4) \quad C = \frac{\frac{1}{2} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m+1}{(2m-1)(2m+1)} \left[ \frac{1.3 \dots (2m-1)}{2.4.6 \dots 2m} e^m \right]^2}{1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} \left[ \frac{1.3 \dots (2m-1)}{2.4.6 \dots 2m} e^m \right]^2}.$$

Lorsque l'excentricité est un peu grande, cette formule exige des calculs assez pénibles, en raison du nombre des termes que l'on est obligé de prendre dans chacune des deux séries pour obtenir une approximation suffisante.

Ce qu'il y aurait de mieux à faire serait de calculer au moyen d'une formule de quadrature, par approximation, les valeurs approchées des intégrales (c) et (d) correspondant à des valeurs de  $c^2$  suffisamment rapprochées les unes des autres, et de former une Table donnant les valeurs correspondantes de C fournies par la formule (3). Nous nous sommes borné, en opérant ainsi, à calculer les éléments suivants [\*] :

$$\begin{array}{lll} C = 0,464 & \text{pour } c^2 = \frac{7}{16} & \text{ou pour } \frac{b}{a} = \frac{3}{4}, \\ C = 0,419 & \text{» } c^2 = \frac{3}{4} & \text{» } \frac{b}{a} = \frac{1}{2}, \\ C = 0,368 & \text{» } c^2 = \frac{15}{16} & \text{» } \frac{b}{a} = \frac{1}{4}. \end{array}$$

[\*] Nous avons employé la formule de Poncelet, parce qu'elle offre sur les autres le double avantage d'exiger le calcul d'un nombre moindre d'ordonnées et de donner

Au moyen de ces valeurs, nous avons été conduit à poser par approximation

$$(5) \quad c = 0,333 + 0,167\sqrt{1-c^2}.$$

L'erreur relative commise en appliquant cette formule est nulle pour  $c = 0, c = 1$ ; elle est de  $\frac{1}{77}$  pour  $\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$ , et de  $\frac{1}{53}$  pour  $\frac{b}{a} = \frac{1}{4}$ , approximation qui est bien suffisante dans les applications.

Comme  $C$  est essentiellement positif et inférieur à l'unité quel que soit  $c$ , nous pourrions poser

$$(e) \quad C = \sin^2 \alpha,$$

$\alpha$  ne pouvant varier avec  $c$  qu'entre les limites  $46^\circ 30'$  et  $34^\circ 30'$ , correspondant à  $c = 0$  et  $c = 1$ . La formule (2) prend alors la forme

$$(6) \quad \pi r = \frac{pa^2 c^2}{2} (\sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi).$$

On voit ainsi que, par suite de la déformation, la courbure de la fibre moyenne a diminué de  $A$  au point  $m_1$  correspondant à  $\varphi = \alpha$ , point pour lequel il n'y a pas de variation de courbure; entre ce point et  $B$ , la courbure a augmenté. En d'autres termes, l'ovalisation a diminué, ce qui est conforme à l'observation et même au sentiment.

*Conditions de résistance.* — En vertu de la formule (1), la dilatation de la fibre moyenne est donnée par

$$(7) \quad \delta_0 = \frac{P}{2Ee} = \frac{pa}{2Ee} \frac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{1-c^2 \sin^2 \varphi}}.$$

une limite supérieure de l'erreur commise. Nous avons pris  $\Delta = \frac{1}{10} \frac{\pi}{2}$  pour l'équidistance. La limite supérieure de l'erreur relative n'a atteint qu'une seule fois  $\frac{1}{1000}$  dans l'évaluation de l'intégrale (c) et  $\frac{23}{1000}$  dans celle de l'intégrale (d). Nous avons ainsi obtenu une approximation bien suffisante.

Si  $\rho_0, \rho$  sont les rayons de courbure de la fibre moyenne avant et après la déformation, on a, en remarquant que  $I = \frac{2}{3} e^3$ ,

$$\frac{2}{3} E e^3 \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) = \frac{\rho a^2 c^2}{2} (\sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi),$$

d'où, pour la dilatation maximum développée dans une section,

$$(8) \quad \mp e \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) = \frac{3}{4} \frac{\rho a^2 c^2}{e^2 E} (\sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi),$$

le signe supérieur et le signe inférieur se rapportant respectivement aux arcs  $Am_1, m_1B$ .

En multipliant par  $E$  la somme des deux expressions (7) et (8), on obtient, pour l'effort élastique maximum développé dans la section,

$$(9) \quad S = \frac{\rho a}{2e} \left[ \frac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{1-c^2 \sin^2 \varphi}} \mp \frac{3ac^2}{2e} (\sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi) \right].$$

La dérivée de cette expression par rapport à  $\varphi$  s'annule pour

$$\varphi = 90^\circ \quad \text{et} \quad \varphi = 0,$$

et les valeurs maxima correspondantes de  $S$  sont respectivement

$$S' = \frac{\rho a}{2e} \left( 1 + \frac{3ac^2}{2e} \cos^2 \alpha \right),$$

$$S'' = \frac{\rho a}{2e} \left( \sqrt{1-c^2} + \frac{3ac^2}{2e} \sin^2 \alpha \right).$$

Si l'on exprime que la première est inférieure à la seconde, on trouve

$$\frac{3}{2} \frac{a}{e} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) > \frac{1}{1 + \sqrt{1-c^2}},$$

inégalité qui sera toujours satisfaite, attendu que  $\sin^2 \alpha > \cos^2 \alpha$  et que le rapport  $\frac{3}{2} \frac{a}{e}$  est très-grand; d'où il suit que le point B est le point

dangereux, et que l'on a, pour déterminer  $e$ , l'équation  $S'' = \Gamma$ , d'où

$$(9) \quad e = \frac{pa\sqrt{1-c^2} + \sqrt{p^2a^2(1-c^2) + 12pa^2c^2\Gamma \sin^2\alpha}}{4\Gamma}.$$

Cette valeur sera supérieure à celle de

$$\frac{pa\sqrt{1-c^2} + \sqrt{pa^2(1-c^2) + 4pa^2\Gamma c^2}}{\Gamma},$$

que l'on obtient en remplaçant  $\sin^2\alpha$  par sa limite inférieure  $\frac{1}{3}$ . Il est facile de reconnaître que le minimum de cette expression par rapport à  $c$  correspond à  $c = 0$ .

Ainsi donc, en se plaçant au point de vue de l'économie, la forme circulaire doit être préférée pour une chaudière à la forme elliptique, parce que : 1° pour une même capacité, le périmètre de la section est plus petit; 2° l'épaisseur est plus faible; 3° le travail de chaudronnerie est plus facile.

Quoique la recherche des variations éprouvées par les coordonnées ne présente qu'un médiocre intérêt, nous nous y arrêterons cependant quelques instants. Nous remarquerons d'abord que l'on a

$$\Delta x = -\frac{1}{EI} \int dy \int \pi ds,$$

$$\Delta y = \frac{1}{EI} \int dx \int \pi ds,$$

formules indépendantes du choix de la variable au moyen de laquelle on est conduit, suivant les circonstances, à exprimer  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et  $\pi$ .

Revenant à notre forme elliptique, nous avons

$$\int \pi ds = \frac{pa^2c^2}{2} \left( \sin^2\alpha \int_0^\varphi \sqrt{1-c^2 \sin^2\varphi} d\varphi - \int_0^\varphi \sin^2\varphi \sqrt{1-c^2 \sin^2\varphi} d\varphi \right),$$

et, comme  $\Delta x$  et  $\Delta y$  sont respectivement nuls pour  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , il

vient

$$\Delta x = \frac{pa^3c^2}{2} \sqrt{1-c^2} \left( \sin^2 \alpha \int_0^\varphi \sin \varphi \, d\varphi \int_0^\varphi \sqrt{1-c^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi \right. \\ \left. - \int_0^\varphi \sin \varphi \, d\varphi \int_0^\varphi \sin^2 \varphi \sqrt{1-c^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi \right),$$

$$\Delta y = \frac{pa^3c^2}{2} \left( \sin^2 \alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^\varphi \cos \varphi \, d\varphi \int_0^\varphi \sqrt{1-c^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi \right. \\ \left. - \int_{\frac{\pi}{2}}^\varphi \cos \varphi \, d\varphi \int_0^\varphi \sin^2 \varphi \sqrt{1-c^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi \right);$$

mais, en intégrant par parties, on trouve

$$\int_0^\varphi \sin \varphi \, d\varphi \int_0^\varphi \sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi \\ = -\cos \varphi \int_0^\varphi \sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi + \int_0^\varphi \sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi} \, d \sin \varphi,$$

$$\int_0^\varphi \sin \varphi \, d\varphi \int_0^\varphi \sin^2 \varphi \sqrt{1-c^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi \\ = -\cos \varphi \int_0^\varphi \sin^2 \varphi \sqrt{1-c^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi + \int_0^\varphi \sin^2 \varphi \sqrt{1-c^2 \sin^2 \varphi} \, d \sin \varphi,$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\varphi \cos \varphi \, d\varphi \int_0^\varphi \sqrt{1-c^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi \\ = \sin \varphi \int_0^\varphi \sqrt{1-c^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-c^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi \\ + \int_{\frac{\pi}{2}}^\varphi \sqrt{1-c^2 + c^2 \cos^2 \varphi} \, d \cos \varphi,$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos \varphi \, d\varphi \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi \\
&= \sin \varphi \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi \\
&+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{1 - c^2 + c^2 \cos^2 \varphi} \, d\cos \varphi - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 \varphi \sqrt{1 - c^2 + c^2 \cos^2 \varphi} \, d\cos \varphi.
\end{aligned}$$

On voit ainsi que la solution du problème se ramène uniquement à l'introduction des deux transcendentes

$$\int \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi, \quad \int \sin^2 \varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi,$$

et que, par suite, elle doit être considérée comme complète.