JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. LAURENT

Mémoire sur les équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre à une seule fonction inconnue

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 5 (1879), p. 249-284.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1879_3_5__249_0>

Mémoire sur les équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre à une seule fonction inconnue;

PAR M. H. LAURENT.

I.

Dans ce Mémoire, je me propose de faire connaître une nouvelle méthode pour l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre à une seule fonction inconnue.

Étant donné un pareil système, il n'admet pas toujours une solution. Bour, en suivant l'analyse développée par Jacobi pour l'intégration d'une équation unique, a fait voir (XXXIX^{e} Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*) que, lorsque certaines conditions dites d'*intégrabilité complète* étaient remplies, le système admettait une solution renfermant un nombre de constantes arbitraires égal à $m - n + 1$, m désignant le nombre des variables dont dépend la fonction inconnue, et n le nombre des équations du système. Cette solution est ce que l'on appelle une *solution complète;* quand un système possède une solution complète, on dit qu'il est *complétement intégrable.*

Par la méthode de la variation des constantes, on peut déduire de l'intégrale complète toutes les autres solutions du système, à savoir : une solution renfermant une fonction arbitraire qui dépend de n variables et que l'on appelle la *solution générale,* et d'autres solutions, moins générales, que l'on appelle *solutions singulières.* Bour a également fait voir que, quand les conditions d'intégrabilité complète ne sont pas satisfaites, le système peut néanmoins admettre une solution; cette solution, quand elle existe, est la solution complète d'un nouveau système renfermant, outre les équations proposées, de nouvelles équations que l'analyse de Bour apprend à y adjoindre. Dans ce qui va suivre, il ne sera question que de systèmes complétement intégrables.

L'analyse développée dans ce Mémoire reposant sur la théorie des équations simultanées aux différences totales du premier ordre, je crois utile de résumer cette théorie.

Le système

$$(1)\quad \begin{cases} dx_1 = X_{11}dt_1 + X_{12}dt_2 + \ldots + X_{1n}dt_n, \\ dx_2 = X_{21}dt_1 + X_{22}dt_2 + \ldots + X_{2n}dt_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dx_m = X_{m1}dt_1 + X_{m2}dt_2 + \ldots + X_{mn}dt_n, \end{cases}$$

dans lequel les X_{ij} sont des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_m, t_1, t_2, \ldots, t_n$, peut être considéré comme définissant m fonctions $x_1, x_2, \ldots, x_m$ de $t_1, t_2, \ldots, t_n$; il est alors équivalent au système des équations dont le type est

$$\frac{dx_i}{dt_j} = X_{ij}.$$

On dit que le système (1) est aux différentielles totales. Pour que ce système admette une solution, il est nécessaire que les seconds membres des équations (1) soient des différentielles exactes quand on y suppose les x remplacées par les fonctions de $t_1, t_2, \ldots, t_n$ qui sont précisément les inconnues de ces équations; il faut donc que l'on ait en général, quels que soient i, j, k,

$$\frac{dX_{ik}}{dt_j} = \frac{dX_{ij}}{dt_k},$$

la lettre d, employée comme caractéristique différentielle, indiquant que l'on regarde les t comme seules variables indépendantes, les x devant être considérés comme fonctions des t. Cette formule peut s'écrire

$$\frac{\mathrm{d}X_{ik}}{\mathrm{d}t_j} + \sum_\mu \frac{\mathrm{d}X_{ik}}{\mathrm{d}x_\mu}\frac{dx_\mu}{dt_j} = \frac{\mathrm{d}X_{ij}}{\mathrm{d}t_k} + \sum_\mu \frac{\mathrm{d}X_{ij}}{\mathrm{d}x_\mu}\frac{dx_\mu}{dt_k}.$$

Mais, si les équations (1) sont satisfaites, cette dernière sera satisfaite en remplaçant $\frac{dx_\mu}{dt_j}$ et $\frac{dx_\mu}{dt_k}$ par $X_{\mu j}$ et $X_{\mu k}$; si donc les formules (1) sont satisfaites, il est nécessaire que l'on ait

$$(2) \qquad \frac{dX_{ik}}{dt_j}+\sum_\mu \frac{dX_{ik}}{dx_\mu}X_{\mu j}=\frac{dX_{ij}}{dt_k}+\sum_\mu \frac{dX_{ij}}{dX_\mu}X_{\mu k}.$$

Cette condition, nécessaire pour que le système (1) admette une solution, est suffisante. Cette proposition a été établie par M. Méray dans son *Précis d'Analyse*, et par M. Bouquet dans le *Bulletin des Sciences mathématiques;* mais les démonstrations données par ces deux auteurs reposent sur l'emploi des séries et ne s'appliquent qu'à des fonctions X_{ij} dans lesquelles on peut supposer les variables imaginaires; d'ailleurs il resterait à montrer comment on peut effectuer l'intégration sans avoir recours aux séries. Dans les *Mathematischen Annalen*, t. V, et le *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XI, M. Mayer a prouvé que les conditions (2) étaient toujours suffisantes, en montrant comment on pouvait intégrer alors le système (1). L'analyse de M. Mayer repose sur un théorème de M. Liouville; il m'a semblé que l'on pouvait éviter l'emploi de ce théorème et simplifier, au point de vue didactique, comme il suit l'exposition de M. Mayer.

Que le système (1) soit ou ne soit pas intégrable, on pourra toujours intégrer le système d'équations ordinaires

$$(a) \qquad \frac{dx_1}{dt_1}=X_{11}, \quad \frac{dx_2}{dt_1}=X_{21}, \quad \ldots, \quad \frac{dx_m}{dt_1}=X_{m1},$$

en y considérant $t_2, t_3, \ldots, t_n$ comme des constantes et en prenant pour constantes d'intégration les valeurs $x_1^0, x_2^0, \ldots$ de $x_1, x_2, \ldots$ pour $t_1=t_1^0$. Si le système (1) admet une solution, il est clair qu'on l'obtiendra en choisissant convenablement $x_1^0, x_2^0, \ldots$ dans les expressions de $x_1, x_2, \ldots$ fournies par les intégrales de (a). Ces constantes devront être telles que l'on ait encore

$$(a') \qquad \frac{dx_1}{dt_2}=X_{21}, \ldots, \quad \frac{dx_i}{dt_j}=X_{ij}, \quad \ldots;$$

les intégrales de (a) étant résolues par rapport à $x_1^0, x_2^0, \ldots$, différentions-les, nous aurons des équations telles que

$$dx_\mu^0 = \left(\frac{dx_\mu^0}{dt_1} + \sum_i \frac{dx_\mu^0}{dx_i}\frac{dx_i}{dt_1}\right) dt_1 + \left(\frac{dx_\mu^0}{dt_2} + \sum_i \frac{dx_\mu^0}{dx_i}\frac{dx_i}{dt_2}\right) dt_2 + \ldots;$$

or $\frac{dx_i}{dt_1}$ est égal, en vertu de (a), à X_{i1}, et, à cause que x_μ^0 est une intégrale de (a), le coefficient de dt_1 dans cette formule est nul, et l'on a

$$(b) \qquad \frac{dx_\mu^0}{dt_1} + \sum_i \frac{dx_\mu^0}{dx_i} X_{i1} = 0;$$

la formule précédente se réduit à

$$dx_\mu^0 = \left(\frac{dx_\mu^0}{dt_2} + \sum_i \frac{dx_\mu^0}{dx_i}\frac{dx_i}{dt_2}\right) dt_2 + \left(\frac{dx_\mu^0}{dt_3} + \sum_i \frac{dx_\mu^0}{dx_i}\frac{dx_i}{dt_3}\right) dt_3 + \ldots.$$

Si l'on veut que les équations (a') soient satisfaites, il faudra que cette formule ait encore lieu quand à $\frac{dx_i}{dt_j}$ on substituera X_{ij}; on obtiendra ainsi un système d'équations aux différentielles totales à $n-1$ variables

$$(c) \qquad dx_\mu^0 = \left(\frac{dx_\mu^0}{dt_2} + \sum_i \frac{dx_\mu^0}{dx_i} X_{i2}\right) dt_2 + \left(\frac{dx_\mu^0}{dt_3} + \sum_i \frac{dx_\mu^0}{dx_i} X_{i3}\right) dt_3 + \ldots,$$

de sorte que, si le système (1) est intégrable, les quantités $x_1^0, x_2^0, \ldots$ seront données par les équations (c). Je vais prouver que, si les conditions (2) sont satisfaites identiquement, les formules (c) ne contiendront pas t_1. En effet, désignons par G le coefficient de dt_2 par exemple. Nous avons, en ayant égard aux équations (a),

$$(p) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dG}{dt_1} = \frac{d^2 x_\mu^0}{dt_1 dt_2} &+ \sum_j \frac{d^2 x_\mu^0}{dt_2 dx_j} X_{j1} + \sum_i \left[\frac{d^2 x_\mu^0}{dt_1 dx_i} + \sum_j \frac{d^2 x_\mu^0}{dx_i dx_j} X_{j1}\right] X_{i2} \\ &+ \sum_i \left[\frac{dX_{i2}}{dt_1} + \sum_j \frac{dX_{i2}}{dx_j} X_{j1}\right] \frac{dx_\mu^0}{dx_i}; \end{aligned} \right.$$

d'un autre côté, en désignant pour un instant par E le premier membre de la formule (b), qui est identiquement nul, on a identiquement

$$\frac{dE}{dt_2} + \frac{dE}{dx_1} X_{12} + \frac{dE}{dx_2} X_{22} + \ldots + \frac{dE}{dx_m} X_{m2} = 0;$$

en remplaçant E par sa valeur (b), on obtient l'identité suivante :

$$
(q)\qquad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{o} = \frac{\mathrm{d}^2 x_\mu^0}{\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2} &+ \sum_j \frac{\mathrm{d}^2 x_\mu^0}{\mathrm{d}x_j\,\mathrm{d}t_2}\mathrm{X}_{j1} + \sum_i \frac{\mathrm{d}x_\mu^0}{\mathrm{d}x_i}\frac{\mathrm{d}\mathrm{X}_{i1}}{\mathrm{d}t_2} \\
&+ \sum_i \left(\frac{\mathrm{d}^2 x_\mu^0}{\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}x_i} + \sum_j \frac{\mathrm{d}^2 x_\mu^0}{\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j}\mathrm{X}_{j1} \right)\mathrm{X}_{i2} \\
&+ \sum_i \sum_j \frac{\mathrm{d}x_\mu^0}{\mathrm{d}x_j}\frac{\mathrm{d}\mathrm{X}_{j1}}{\mathrm{d}x_i}\mathrm{X}_{i2}.
\end{aligned}\right.
$$

Si l'on a alors égard aux formules (2), les deux équations (p) et (q) donnent par soustraction

$$\frac{\mathrm{dG}}{\mathrm{d}t_1} = \mathrm{o},$$

ce qui montre bien que les formules (c) ne contiennent pas t_1.

Cela posé, pour que le système (1) soit intégrable, il faut que l'on puisse satisfaire aux équations (a') à l'aide des intégrales du système (a). Ces intégrales étant résolues par rapport à $x_1, x_2, \ldots$, on en déduit

$$
(d)\qquad \left\{\begin{aligned}
dx_1 &= \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t_1}dt_1 + \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t_2}dt_2 + \ldots + \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_1^0}dx_1^0 + \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_2^0}dx_2^0 + \ldots \\
dx_2 &= \ldots
\end{aligned}\right.
$$

$\Big(\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t_1}$ désigne la dérivée de x_1 considéré comme fonction de $x_1^0, x_2^0, \ldots$, $t_1, t_2, \ldots$; il ne faut pas la confondre avec la dérivée $\frac{dx_1}{dt_1}$ qui est prise en faisant varier les t partout$\Big)$. Mais on doit avoir

$$dx_1 = \frac{dx_1}{dt_1}dt_1 + \frac{dx_2}{dt_2}dt_2 + \ldots$$

ou, ce qui revient au même, puisque les formules (a') ou (1) doivent avoir lieu,

$$dx_1 = \mathrm{X}_{11}dt_1 + \mathrm{X}_{12}dt_2 + \ldots,$$

et, par suite, (d) deviendra

$$\left(\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t_1} - \mathrm{X}_{11}\right)dt_1 + \left(\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t_2} - \mathrm{X}_{12}\right)dt_2 + \ldots + \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_1^0}dx_1^0 + \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_2^0}dx_2^0 + \ldots = \mathrm{o},$$

....

Ces équations sont sous une autre forme les équations (d) : elles ne contiennent donc pas t, et l'on peut y faire $t_1 = t_1^0$; mais alors elles deviennent

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} dx_1^0 = X_{12}^0 dt_2 + X_{13}^0 dt_3 + \ldots + X_{1n}^0 dt_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Réciproquement, si ces équations (3) peuvent être satisfaites, elles expriment que $dx_1, dx_2, \ldots$ tirés des intégrales de (a) peuvent être identifiés avec les $dx_1, dx_2, \ldots$ tirés de (1), et par suite, si le système (3) est intégrable, le système (1) l'est aussi.

Supposons le nombre des variables t égal à deux, dans le système (3) le nombre des variables t sera égal à un. Donc, dans ce cas, le système (3) est intégrable, et, quand les formules (2) ont lieu, le système (1) est également intégrable.

Supposons le nombre des variables t égal à trois; le système (3) dépendra de deux variables t et, pour ce système, les conditions d'intégrabilité seront satisfaites si les formules (2) le sont. En effet, les conditions d'intégrabilité du système (3) s'obtiennent en faisant $t_1 = t_1^0$ dans (2). Donc le système (3) est intégrable, et, par suite, (1) l'est aussi.

Si le nombre des variables t est égal à quatre, on démontrera que le système (3) à trois variables est intégrable, et, par suite, (1) le sera aussi, et ainsi de suite.

Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que le système (1) soit intégrable est que les formules (2) aient lieu identiquement. La marche à suivre pour effectuer l'intégration est celle que nous venons d'indiquer.

Toutefois M. Mayer a montré que, par un changement de variables convenables, on peut toujours faire en sorte que les X_{ij}^0 soient nuls et, par suite, l'intégration du système (1) se ramène à l'intégration d'un système ordinaire, à savoir le système (a).

Nous indiquerons plus loin le perfectionnement apporté par M. Mayer à la méthode précédente.

II.

Avant d'aller plus loin, nous ferons encore quelques observations au sujet des équations aux différentielles totales.

Quand on donne un système d'équations différentielles ordinaires à intégrer, il peut se faire que parmi ces équations il y en ait qui forment un système d'équations aux différentielles totales intégrables. Cette circonstance sera généralement avantageuse, car le système d'équations aux différentielles totales en question pourra s'intégrer séparément et à l'aide d'un système d'équations différentielles ordinaires beaucoup plus simple que le système proposé. Si donc, en faisant subir aux équations proposées certaines transformations algébriques, on peut en déduire des équations aux différentielles totales, on se placera dans des conditions propres à simplifier l'intégration.

Peut-être sera-t-il bon, à cette occasion, de faire observer que, si l'on a un système d'équations du premier degré par rapport aux différentielles des fonctions et des variables, que ce système soit aux différentielles totales ou ordinaires,

$$(m) \qquad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \ldots, \quad \omega_m = 0,$$

il existe toujours un système de multiplicateurs λ_{ij}, tels que

$$\lambda_{i1}\omega_1 + \lambda_{i2}\omega_2 + \ldots + \lambda_{im}\omega_m$$

soit une différentielle exacte. Pour démontrer cette assertion, désignons par

$$(m') \qquad \Omega_1 = \alpha_1, \quad \Omega_2 = \alpha_2, \quad \ldots, \quad \Omega_m = \alpha_m$$

les intégrales des équations (m) résolues par rapport aux constantes d'intégration $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$; les équations

$$d\Omega_1 = 0, \quad d\Omega_2 = 0, \quad \ldots, \quad d\Omega_m = 0$$

qui résultent de la différentiation des équations (m') doivent être identiques à (m), sans quoi l'élimination des différentielles des variables principales entre ces équations et (m) fourniraient des relations entre ces variables; $d\Omega_1, d\Omega_2, \ldots$ doivent donc être des combinaisons linéaires de $\omega_1, \omega_2, \ldots$, ce qui démontre l'existence des multiplicateurs λ_{ij}.

La recherche directe des facteurs λ sera, en général, impraticable, mais on conçoit qu'ils puissent se deviner dans des cas particuliers. Quand les équations (m) seront intégrées, il sera facile de trouver les multiplicateurs, et alors même leur considération peut n'être pas dénuée d'intérêt. En effet, soit :

$$\begin{gathered}\lambda_{11}\omega_1 + \lambda_{12}\omega_2 + \ldots + \lambda_{1m}\omega_m = d\Omega_1,\\ \lambda_{21}\omega_1 + \lambda_{22}\omega_2 + \ldots + \lambda_{2m}\omega_m = d\Omega_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{gathered}$$

On aura, en appelant Λ le déterminant $\Sigma \pm \lambda_{11}\lambda_{22},\ldots,\lambda_{mm}$,

$$\begin{gathered}\omega_1 = \left(\frac{d\Lambda}{d\lambda_{11}}d\Omega_1 + \frac{d\Lambda}{d\lambda_{21}}d\Omega_2 + \ldots + \frac{d\Lambda}{d\lambda_{m1}}d\Omega_m\right) : \Lambda,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;\end{gathered}$$

de sorte que les équations (m) pourront être satisfaites, non-seulement pour $d\Omega_1 = 0, d\Omega_2 = 0,\ldots,$ ou $\Omega_1 = \alpha_1, \Omega_2 = \alpha_2,\ldots,$ mais encore pour $\Lambda = \infty$; mais la solution qui pourra résulter de cette équation $\Lambda = \infty$ ne sera jamais prise en considération dans ce qui va suivre.

En général, pour intégrer le système (1), la marche la plus simple consistera à poser

$$(n) \qquad t_1 = \chi_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, t), \quad t_2 = \chi_2 \ldots, \quad t_n = \chi_n \ldots,$$

$\chi_1, \chi_2,\ldots$ désignant des fonctions de t et de $n-1$ paramètres α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, que l'on assujettira à s'annuler à la fois pour $t = t^0$ quels que soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, ou au moins à se réduire pour $t = t^0$ à des quantités indépendantes de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$. Les équations (1) se réduiront alors à des équations différentielles ordinaires dans lesquelles la variable indépendante sera t; on profitera en général de l'indétermination des fonctions χ pour faciliter l'intégration des équations transformées. Lorsque ces équations auront été intégrées, il suffira d'éliminer entre les intégrales et les équations (n) les paramètres α pour obtenir les intégrales des équations aux différentielles totales (1).

On peut se rendre compte de ce fait de plusieurs manières. On peut, par exemple, supposer qu'aux variables $t_1, t_2, \ldots, t_n$ on substitue les variables $t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$. Les équations (1) deviennent alors

$$
\begin{aligned}
dx_i = & \left(X_{i1}\frac{dt_1}{dt} + X_{i2}\frac{dt_2}{dt} + \ldots + X_{in}\frac{dt_n}{dt}\right)dt \\
& + \left(X_{i1}\frac{dt_1}{d\alpha_1} + X_{i2}\frac{dt_2}{d\alpha} + \ldots + X_{in}\frac{dt_n}{d\alpha}\right)d\alpha \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

ou, pour abréger,

$$dx_i = \Theta_{i1}\,dt + A_{i1}\,d\alpha_1 + \ldots + A_{in-1}\,d\alpha_{n-1}.$$

Pour intégrer ces équations, on commencera par intégrer le système ordinaire, comme le prescrit la règle énoncée,

$$dx_i = \Theta_i dt;$$

puis, faisant $t = t^0$, on déterminera les x_i^0 qui sont nos constantes d'intégration ou les valeurs des x_i pour $t = t^0$ au moyen des équations

$$dx_i^0 = A_{i1}^0\,d\alpha_1 + A_{i2}^0\,d\alpha_2 + \ldots + A_{in-1}^0\,d\alpha_{n-1};$$

mais $A_{i1}^0, A_{i2}^0, \ldots$ sont nuls; en effet, on a

$$A_{i1}^0 = X_{i1}^0 = \frac{dt_1^0}{d\alpha_1} + X_{i2}^0\frac{dt_2^0}{d\alpha} + \cdots;$$

or $t_1^0, t_2^0, \ldots$ ont été choisis indépendants des α : donc $\frac{dt_1^0}{d\alpha_1}, \cdots$ sont nuls, donc $A_{i1}^0, A_{i2}^0, \ldots$ sont nuls; les dx_i^0 sont nuls et, par suite, les x_i^0 sont des constantes absolues. Les intégrales des équations (1) sont donc les intégrales mêmes des équations $dx_i = \Theta_i dt$, et il ne reste plus qu'à y remplacer les nouvelles variables $t_1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ par les anciennes $t_1, t_2, \ldots$.

Supposons qu'il s'agisse d'intégrer l'équation

$$yz\,dx - xy\,dz - xz\,dy = 0;$$

on pourra poser

$$y = t, \quad z = \alpha t;$$

mais, en procédant ainsi, on est conduit à intégrer l'équation

$$x\,dt - 2t\,dx = 0,$$

qui donne

$$x = kt^2$$

pour $t = 0$; x ne peut pas prendre la valeur arbitraire x_0 : la méthode tombe alors en défaut, et il faut prendre

$$y = y_0 + t, \quad z = z_0 + \alpha t.$$

On trouve alors l'équation en t

$$(y_0 + t)(z_0 + \alpha t)dx - (2\alpha t + z_0 + \alpha y_0)x\,dt = 0,$$

d'où l'on tire, en appelant k une constante,

$$x = k(y_0 + t)(z_0 + \alpha t);$$

pour $t = 0$, x prend une valeur arbitraire x_0 et l'on a

$$\frac{x}{x_0} = \frac{(y_0 + t)(z_0 + \alpha t)}{y_0 z_0}.$$

L'élimination de t et α donne l'intégrale cherchée

$$\frac{x}{x_0} = \frac{yz}{y_0 z_0}.$$

III.

Dans la plupart des questions où l'on rencontre des équations simultanées aux dérivées partielles, la fonction inconnue n'entre pas explicitement dans ces équations : c'est ce qui arrive toujours dans les équations que fournissent les problèmes de Mécanique, pour lesquels le théorème des forces vives a lieu.

Mais, lors même que la fonction inconnue apparaît dans les équations données, il est facile de la faire disparaître et de remplacer le système de ces équations par un autre qui ne contienne plus la fonction inconnue. Si l'on désigne, en effet, par

$$\varphi = \text{const.}$$

une intégrale non singulière des équations proposées, on peut prendre la fonction φ comme inconnue, et l'on sait alors que chaque équation du système donné ne contiendra que les dérivées partielles de la fonction φ; l'ancienne fonction inconnue figurera comme simple variable indépendante dans les équations transformées. Cette manière de faire disparaître la fonction inconnue présente quelques inconvénients, très-légers, il est vrai : ainsi elle fait disparaître les solutions qui ne renferment point de constantes arbitraires, et les équations homogènes auxquelles elle conduit ne se prêtent pas à une méthode d'intégration que nous indiquerons plus loin, et qui peut parfois être la plus simple.

Jacobi a indiqué une autre méthode qu'il n'a pas développée et qui, appliquée à la lettre, conduirait à des résultats absurdes. Voici comment on peut la présenter. Soit

$$(x) \quad f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_m = 0$$

le système à intégrer, x_1, $x_2, \ldots$ désignant les variables, u la fonction inconnue, $p_1, p_2, \ldots$ les dérivées relatives à $x_1, x_2, \ldots$ respectivement. Posons $v = ut$, d'où

$$\frac{dv}{dt} = u, \quad \frac{1}{t}\frac{dv}{dx_1} = p_1, \quad \frac{1}{t}\frac{dv}{dx_2} = p_2, \quad \ldots;$$

les formules (x) deviendront

$$(y) \; f_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{dv}{dt}, \frac{1}{t}\frac{dv}{dx_1}, \ldots, \frac{1}{t}\frac{dv}{dx_n}\right) = 0, \; f_2 = 0, \; \ldots, \; f_m = 0,$$

et il est clair que, u désignant une solution de (x), ut sera une solution de (y); mais, $v = ut$ étant une solution de (y), $u = \frac{v}{t}$ ne sera pas nécessairement une solution de (x), car $\frac{v}{t}$ pourra contenir t et l'on n'aura pas $\frac{dv}{dt} = u$, mais bien $\frac{dv}{dt} = u + t\frac{du}{dt}$.

Quoi qu'il en soit, désignons par v une solution du système (y); en remplaçant v par sa valeur dans le système (y), celui-ci se réduira à des identités, c'est-à-dire sera satisfait quels que soient $x_1, x_2, \ldots, t$ et, par suite, il le sera encore si l'on y suppose t fonction des x et en parti-

33..

culier si t est défini en fonction des x par le moyen de l'équation

$$(z)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{t}\right)=0 \quad \text{ou} \quad \frac{du}{dt}=0.$$

Mais, quand on fera cette supposition, on obtiendra les mêmes identités que si l'on avait remplacé $\frac{dv}{dt}$ par u, ce qui revient à dire que les équations (x) seront satisfaites en prenant $u=\frac{v}{t}$ et en supposant t défini par la relation (z).

En d'autres termes, connaissant une intégrale $F=0$ de (y), pour en déduire une de (x), il suffira d'éliminer t entre cette intégrale et (z) ou l'équation suivante, obtenue en différentiant cette intégrale $F=0$:

$$\frac{du}{dt}\frac{dF}{du}+\frac{dF}{dt}=0.$$

IV.

Nous allons maintenant exposer notre méthode d'intégration des équations simultanées aux dérivées partielles, non linéaires.

Désignons par $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des fonctions données des variables x_1, $x_2, \ldots, x_m, t_1, t_2, \ldots, t_n$, et des dérivées partielles $\frac{du}{dx_1}, \frac{du}{dx_2}, \ldots, \frac{du}{dx_m}$ d'une fonction inconnue u, prises par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Tout système d'équations aux dérivées partielles simultanées à une seule fonction inconnue u, ne contenant pas explicitement la fonction u elle-même, pourra être présenté sous la forme

$$(4)\qquad \frac{du}{dt_1}=f_1,\quad \frac{du}{dt_2}=f_2,\quad \ldots,\quad \frac{du}{dt_n}=f_n.$$

Nous désignerons par $p_1, p_2, \ldots, p_m$ les dérivées $\frac{du}{dx_1}, \frac{du}{dx_2}, \ldots, \frac{du}{dx_m}$. Si les équations (4) admettent une solution commune, cette solution devra satisfaire à l'équation

$$(5)\quad Du = p_1 Dx_1 + p_2 Dx_2 + \ldots + p_m Dx_m + f_1 Dt_1 + \ldots + f_n Dt_n,$$

le symbole Du désignant la différentielle totale de u, prise en donnant à $x_1, x_2, \ldots, x_m, t_1, t_2, \ldots, t_n$ les accroissements arbitraires $Dx_1, Dx_2, \ldots, Dx_m, Dt_1, \ldots, Dt_n$. Réciproquement d'ailleurs, si l'on peut trouver des fonctions $p_1, p_2, \ldots, p_m$ des x et des t telles que le second membre de l'équation (5) soit une différentielle exacte, l'intégrale u de cette différentielle sera une solution commune aux équations (4).

Désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ des fonctions actuellement indéterminées de $x_1, x_2, \ldots, x_m, t_1, t_2, \ldots, t_n$ et effectuons le changement de variables qui consiste à substituer les α aux x. Si nous convenons de représenter par δF la différentielle totale d'une fonction F prise en faisant varier les α, mais en laissant les t constants, et par dF la différentielle totale de la même fonction prise en faisant varier les t, mais en laissant les α constants, l'équation (5) pourra évidemment être remplacée par les deux suivantes :

$$du = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_m dx_m + f_1 dt_1 + \ldots + f_n dt_n,$$
$$\delta u = p_1 \delta x_1 + p_2 \delta x_2 + \ldots + p_m \delta x_m,$$

que nous écrirons

$$(6) \qquad du = \Sigma p dx + \Sigma f dt,$$
$$(7) \qquad \delta u = \Sigma p \delta x.$$

Si l'on suppose que les équations (4) aient une solution commune, les équations (6) et (7) seront satisfaites, et en différentiant la première avec la caractéristique δ, la seconde avec la caractéristique d, on aura

$$\delta du = \Sigma p \delta dx + \Sigma \delta p dx + \Sigma \delta f dt,$$
$$d\delta u = \Sigma p \delta dx + \Sigma dp \delta x,$$

et, en observant que $d\delta u$ est égal à δdu, on aura par soustraction

$$(8) \qquad \Sigma \delta p\, dx - \Sigma dp\, \delta x + \Sigma \delta f\, dt = 0;$$

d'ailleurs la fonction u sera donnée par la formule

$$(9) \qquad u = u^0 + \int (\Sigma p dx + \Sigma f dt),$$

l'indice o placé en haut d'une lettre indiquant, une fois pour toutes, que l'on doit remplacer dans la quantité représentée par cette lettre t_1 par t_1^0, t_2 par $t_2^0, \ldots, t_n$ par t_n^0; u^0 est alors la valeur que prend u pour $t_1 = t_1^0, \ldots$. Cette valeur pourra dépendre des α, mais elle sera indépendante des t. Enfin l'intégrale doit être prise entre des limites telles, qu'elle s'annule pour $t_1 = t_1^0, \ldots, t_n = t_n^0$.

Différentions la formule (9) par rapport aux α, nous aurons

$$\delta u = \delta u^0 + \int (\Sigma \delta p dx + \Sigma p \delta dx + \Sigma \delta f dt),$$

ou, en intégrant par parties les termes $p \delta dx$,

$$\delta u = \delta u^0 + \Sigma p \delta x - \Sigma p^0 \delta x^0 + \int (\Sigma \delta p dx - \Sigma dp \delta x - \Sigma \delta f dt),$$

c'est-à-dire, en vertu de (8) et (7),

$$\delta u^0 - \Sigma p^0 \delta x^0 = 0. \tag{10}$$

On satisfera à l'équation (8) en posant

$$\tag{11} \left\{ \begin{aligned} -dx_1 &= \frac{df_1}{dp_1} dt_1 + \frac{df_2}{dp_1} dt_2 + \ldots + \frac{df_n}{dp_1} dt_n, \\ -dx_2 &= \frac{df_1}{dp_2} dt_1 + \frac{df_2}{dp_2} dt_2 + \ldots + \frac{df_n}{dp_2} dt_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ -dx_m &= \frac{df_1}{dp_m} dt_1 + \frac{df_2}{dp_m} dt_2 + \ldots + \frac{df_n}{dp_m} dt_n, \end{aligned} \right.$$

$$\tag{12} \left\{ \begin{aligned} dp_1 &= \frac{df_1}{dx_1} dt_1 + \frac{df_2}{dx_1} dt_2 + \ldots + \frac{df_n}{dx_1} dt_n, \\ dp_2 &= \frac{df_1}{dx_2} dt_1 + \frac{df_2}{dx_2} dt_2 + \ldots + \frac{df_n}{dx_2} dt_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dp_m &= \frac{df_1}{dx_m} dt_1 + \frac{df_2}{dx_m} dt_2 + \ldots + \frac{df_n}{dx_m} dt_n, \end{aligned} \right.$$

et à la formule (10) en posant

$$u^0 = \varpi(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0), \tag{13}$$

$$p_1^0 = \frac{d\varpi}{dx_1^0}, \quad p_2^0 = \frac{d\varpi}{dx_2^0}, \quad \ldots, \quad p_m^0 = \frac{d\varpi}{dx_m^0}, \tag{13 bis}$$

ϖ désignant une fonction arbitraire de x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0 [*].

Supposons les équations (11) et (12) complétement intégrables, et intégrons-les; les $2m$ constantes d'intégration devront être considérées comme des fonctions des α et nous prendrons pour ces $2m$ constantes les valeurs $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0, p_1^0, p_2^0, \ldots, p_m^0$ de $x_1, x_2, \ldots, x_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ pour $t_1 = t_1^0, \ldots, t_n = t_n^0$. Supposons en outre que les valeurs des x et des p tirées des intégrales de (11) et (12) substituées dans l'équation (6) la rendent intégrable; si les constantes $u^0, x_1^0, x_2^0, \ldots, p_1^0, p_2^0, \ldots, p_m^0$ sont choisies de manière à satisfaire aux relations (13) et (13 *bis*), la valeur de u calculée au moyen de l'équation (9), en remplaçant les x et les p par leurs valeurs en fonction des t, satisfera évidemment aux équations (6) et (7); l'élimination des α fournira alors u et les p en fonction des x et des t.

Si donc, entre les intégrales du système (11) et (12), l'équation (9) et les équations (13) et (13 *bis*), au nombre de $3m+2$, on élimine les $2m+1$ constantes $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0, p_1^0, p_2^0, \ldots, p_m^0, u^0$, il restera $m+1$ équations ne contenant plus les α et qui feront connaître $p_1, p_2, \ldots, p_m$ et u en fonction des x et des t.

On peut aussi, entre ces mêmes équations, éliminer non-seulement les x^0, les p^0 et u, mais aussi $p_1, p_2, \ldots, p_m$, et la résultante fera connaître la fonction inconnue u. En résumé :

Si les équations dont le type est

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} du &= p_1 dx_1 + \ldots + p_m dx_m + f_1 dt_1 + \ldots + f_n dt_n,\\ -dx_i &= \frac{df_1}{dp_i} dt_1 + \frac{df_2}{dp_i} dt_2 + \ldots + \frac{df_n}{dp_i} dt_n,\\ dp_i &= \frac{df_1}{dx_i} dt_1 + \frac{df_2}{dx_i} dt_2 + \ldots + \frac{df_n}{dp_i} dt_n \end{aligned}\right.$$

forment un système d'équations aux différentielles totales que l'on puisse intégrer de telle sorte que pour $t_1 = t_1^0, \ldots, t_n = t_n^0$, les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$, u se réduisent à $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0$, $p_1^0, p_2^0, \ldots, p_m^0$, u^0 respectivement, les équations (4) *seront satisfaites*

[*] Il résultera de notre analyse que le système (11) et (12) est complétement intégrable en même temps que le système (4), et qu'il l'est encore quand on y adjoint l'équation (6).

par la valeur de u que l'on obtiendra en éliminant $x_1^0, \ldots, x_m^0, p_1^0, \ldots, p_m^0, u^0, p_1, p_2, \ldots, p_m$ entre les intégrales du système (14) *et les équations* (13) *et* (13 *bis*), *dans lesquelles ϖ désigne une fonction arbitraire.*

Pour éliminer les quantités $x_1^0, \ldots, x_m^0, p_1^0, \ldots, p_m^0, u^0, p_1, \ldots, p_m$ entre les intégrales des équations (14) et les équations (13 et 13 *bis*), on peut résoudre les équations intégrales de (14) et les équations (13 *bis*) par rapport aux x^0, aux p^0, aux p et à u^0 et porter les valeurs de u^0, $x_1^0, \ldots, x_m^0$ dans (13). Supposons que l'on ait trouvé

$$\begin{aligned} x_i^0 &= \lambda_i(t_1, t_2, \ldots, t_n, x_1, x_2, \ldots, x_m, u) = \lambda_i, \\ u^0 &= \mu(t_1, t_2, \ldots, t_n, x_1, x_2, \ldots, x_m, u) = \mu; \end{aligned}$$

en faisant dans ces formules $t_1 = t_1^0, t_2 = t_2^0, \ldots, t_n = t_n^0$, on aura

$$\begin{aligned} x_1^0 &= \lambda_i(t_1^0, \ldots, t_n^0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0, u^0), \\ u^0 &= \mu(t_1^0, \ldots, t_n^0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0, u^0); \end{aligned}$$

mais, les x^0 et u^0 étant tout à fait arbitraires, ces formules sont des identités et l'on peut y remplacer les x^0 et u^0 par les x et par u. On a donc identiquement

$$(15) \qquad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \lambda_i(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_n^0, x_1, x_2, \ldots, x_m, u) = \lambda'_i, \\ u &= \mu(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_n^0, x_1, x_2, \ldots, x_m, u) = \mu'. \end{aligned} \right.$$

La résultante qui fait connaître u peut s'écrire

$$\mu = \varpi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$$

et, si l'on fait dans cette équation $t_1 = t_1^0, t_2 = t_2^0, \ldots, t_n = t_n^0$, elle devient, en vertu des formules (15),

$$\mu' = \varpi(\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_m)$$

ou

$$u = \varpi(x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

La solution u que l'on trouve par le procédé que nous venons d'indiquer se réduit donc à la fonction arbitraire $\varpi(x_1, \ldots, x_m)$, quand on y fait $t_1 = t_1^0, t_2 = t_2^0, \ldots, t_m = t_m^0$.

On peut trouver, d'une autre manière, une solution commune aux équations (4); il suffit pour cela de poser $\delta x_1^0 = 0, \ldots, \delta x_m^0 = 0$ et $\delta u^0 = 0$; l'équation (10) sera alors satisfaite, et si entre les intégrales des équations (14) on élimine les p^0, qui seuls contiennent $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, on aura les p et u en fonction des x et des t; en éliminant aussi les p, on aura u. Mais il faudra que ces éliminations soient possibles, ce qui n'aura pas toujours lieu.

La nouvelle solution est une solution complète, puisqu'elle renferme les arbitraires $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0, u^0$.

V.

Réciproquement : *Si l'on connaît une solution des équations* (4) *renfermant, outre la constante additive que l'on peut toujours introduire, m autres constantes* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$: 1° *le système des équations* (11) *et* (12) *sera intégrable et les intégrales de ce système seront données par les formules*

$$(16) \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dx_1} = p_1, & \dfrac{du}{dx_2} = p_2, & \dfrac{du}{dx_m} = p_m, \\ \dfrac{du}{d\alpha_1} = -\beta_1, & \dfrac{du}{d\alpha_2} = -\beta_2, & \dfrac{du}{d\alpha_m} = -\beta_m. \end{cases}$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ *désignant de nouvelles constantes arbitraires;* 2° *les valeurs de* $x_1, x_2, \ldots, x_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ *tirées de ces équations* (15) *et portées dans l'équation*

$$(16\ bis) \quad du = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_m dx_m + f_1 dt_1 + \ldots + f_n dt_n,$$

rendront cette équation intégrable, et la valeur de u que l'on en déduira sera précisément la solution complète en question.

En effet, désignons par δF la différentielle d'une fonction F des variables $t_1, t_2, \ldots, t_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$, prise en faisant varier $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ seuls, et en laissant $t_1, t_2, \ldots, t_n$ constants, et par dF la différentielle de la même fonction prise en faisant varier $t_1, t_2, \ldots, t_n$, mais en laissant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_m$ constants, on aura, en différentiant la fonction u avec la caractéristique δ et en ayant égard aux formules (16),

$$\delta u = \Sigma p\, dx - \Sigma \beta\, \delta\alpha$$

et, en différentiant cette équation avec la caractéristique d,

$$(17) \qquad d\delta u = \Sigma dp\,\delta x + \Sigma p\,\delta dx.$$

D'un autre côté, en différentiant la fonction u avec la caractéristique d et en faisant usage des équations (4) pour calculer $\frac{du}{dt_1}, \frac{du}{dt_2}, \dots, \frac{du}{dt_n}$ et des formules (16) pour calculer $\frac{du}{du_1}, \dots, \frac{dx}{dx_m}$, on a

$$du = \Sigma p\,dx + \Sigma f\,dt$$

et, en différentiant cette formule avec la caractéristique δ,

$$\delta\,du = \Sigma\,\delta p dx + \Sigma p\,\delta\,dx + \Sigma\,\delta f dt;$$

en retranchant de cette formule la formule (17), on a

$$0 = \Sigma\delta p dx - \Sigma\,\delta x\,dp + \Sigma\,\delta f\,dt.$$

Mais, les $\delta\alpha$ et les $\delta\beta$ étant arbitraires, les δp et les δx le sont aussi; en égalant alors leurs coefficients à zéro, on retrouve précisément les équations (11) et (12): celles-ci sont donc des conséquences de (16) et, par suite, forment un système intégrable dont les intégrales sont bien représentées par ces équations (16). Il reste à faire voir que l'équation

$$du = \Sigma p\,dx + \Sigma f\,dt$$

est également intégrable; or cette équation, en vertu des équations (4) et (16), se réduit à

$$du = \sum \frac{du}{dx}dx + \sum \frac{du}{dt}dt,$$

et le second membre est manifestement une différentielle exacte.

Ainsi, en faisant usage d'une locution abrégée et dont le sens a été expliqué au début de ce Mémoire, on peut dire que :

Les conditions d'intégrabilité complète du système (4) *et du système* (16), (16 *bis*) *sont les mêmes.*

VI.

Pour trouver les conditions d'intégrabilité complète du système (4), il suffit donc de chercher celles du système (11), (12) ou plutôt (14) ; or ces dernières conditions sont fournies très-simplement par la théorie des équations aux différences totales et peuvent s'écrire immédiatement.

Sans doute, on peut établir, en suivant la marche indiquée par Jacobi et par Bour, les conditions d'intégrabilité complète des équations (4), mais peut-être d'une façon moins élémentaire. Il n'est d'ailleurs pas sans intérêt de poursuivre ces analogies entre les intégrales des équations différentielles ordinaires et les équations aux dérivées partielles du premier ordre, qui ont été tout d'abord signalées par Jacobi et qui sont telles qu'à un théorème sur les équations aux dérivées partielles correspond un théorème relatif aux équations ordinaires ou aux différentielles totales.

Si nous appliquons le théorème exprimé par les équations (2) aux équations (11) et (12), nous trouvons que les conditions d'intégrabilité complète de ces équations sont données par les formules

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt_i}\frac{df_j}{dp_k}+\sum_\mu\left(\frac{d^2f_j}{dp_k dp_\mu}\frac{df_i}{dx_\mu}-\frac{d^2f_j}{dp_k dx_\mu}\frac{df_i}{dp_\mu}\right)\\ &=\frac{d}{dt_j}\frac{df_i}{dp_k}+\sum_\mu\left(\frac{d^2f_i}{dp_k dp_\mu}\frac{df_j}{dx_\mu}-\frac{d^2f_i}{dp_k dx_\mu}\frac{df_j}{dp_\mu}\right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt_i}\frac{df_j}{dx_k}+\sum_\mu\left(\frac{d^2f_j}{dx_k dp_\mu}\frac{df_i}{dx_\mu}-\frac{d^2f_j}{dp_k dx_\mu}\frac{df_i}{dp_\mu}\right)\\ &=\frac{d}{dt_j}\frac{df_i}{dx_k}+\sum_\mu\left(\frac{d^2f_i}{dx_k dx_\mu}\frac{df_i}{dx_\mu}-\frac{d^2f_j}{dx_k dx_\mu}\frac{df_j}{dp_\mu}\right).\end{aligned}$$

Ces deux équations peuvent s'écrire

$$(18)\qquad\left\{\begin{aligned}&\frac{d}{dp_k}\left(\frac{df_j}{dt_i}-\frac{df_i}{dt_j}\right)+\left(\frac{df_i}{dp_k},f_j\right)+\left(f_i,\frac{df_j}{dp_k}\right)=0,\\ &\frac{d}{dx_k}\left(\frac{df_j}{dt_i}-\frac{df_i}{dt_j}\right)+\left(\frac{df_i}{dx_k},f_j\right)+\left(f_i,\frac{df_j}{dx_k}\right)=0.\end{aligned}\right.$$

En faisant usage de la notation de Poisson (α, β) pour représenter la somme

$$\sum\left(\frac{d\alpha}{dp_\mu}\frac{d\beta}{dx_\mu}-\frac{d\alpha}{dx_\mu}\frac{d\beta}{dp_\mu}\right),$$

les formules (18) reviennent aux suivantes :

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dp_k}\left[\frac{df_j}{dt_i}-\frac{df_i}{dt_j}+(f_i,f_j)\right]=0,\\ &\frac{d}{dx_k}\left[\frac{df_j}{dt_i}-\frac{df_i}{dt_j}+(f_i,f_j)\right]=0.\end{aligned}\right.$$

Ainsi, pour que les équations (11) et (12) soient complétement intégrables, il faut et il suffit que les quantités de la forme

$$\frac{df_j}{dt}-\frac{df_i}{dt_j}+(f_i,f_j)$$

ne contiennent ni les p ni les x. Lorsque les fonctions f ne contiendront pas les t, ce qui arrivera fréquemment dans les applications, les conditions d'intégrabilité complète des formules (11) et (12) se réduiront à

$$(f_i,f_j)=\text{const.}$$

Pour trouver les conditions d'intégrabilité complète du système (14), il ne reste plus qu'à exprimer que la première équation (14), à savoir

$$du=\Sigma p\,dx+\Sigma f\,dt,$$

est intégrable en y supposant les dx exprimés à l'aide des dt. Si l'on remplace les dx par leurs valeurs tirées de (11), on trouve

$$du=\left(f_1-\sum_\mu p_\mu\frac{df_1}{dp_\mu}\right)dt_1+\left(f_2-\sum_\mu p_\mu\frac{df_2}{dp_\mu}\right)dt_2+\ldots.$$

Pour que cette équation soit intégrable, il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt_j}\left(f_i-\sum_\mu p_\mu\frac{df_i}{dp_\mu}\right)-\left(f_i-\sum_\mu p_\mu\frac{df_i}{dp_\mu},f_j\right)\\ &\quad=\frac{d}{dt_i}\left(f_j-\sum_\mu p_\mu\frac{df_j}{dp_\mu}\right)-\left(f_j-\sum_\mu p_\mu\frac{df_j}{dp_\mu},f_i\right)\end{aligned}$$

ou

$$\frac{df_i}{dt_j} - \frac{df_j}{dt_i} - \sum_\mu p_\mu \frac{d}{dp_\mu}\left(\frac{df_i}{dt_j} - \frac{df_j}{dt_i}\right) - (f_i, f_j)$$
$$+ (f_i, f_j) + \sum_\mu p_\mu \left[\left(\frac{df_i}{dp_\mu}, f_j\right) + \left(f_i, \frac{df_j}{dp_\mu}\right)\right]$$
$$+ \sum_\mu \frac{df_i}{dp_\mu}(p_\mu, f_j) - \sum_\mu \frac{df_j}{dp_\mu}(p_\mu, f_i) = 0,$$

ou, en vertu des relations (19),

$$(20) \qquad \frac{df_i}{dt_j} - \frac{df_j}{dt_i} - (f_i, f_j) = 0.$$

En donnant dans cette formule à i et à j toutes les valeurs entières depuis 1 jusqu'à n, on aura les conditions d'intégrabilité complète du système (14), c'est-à-dire du système (4).

VII.

Avant d'aller plus loin, faisons une application des théories précédentes au système des équations linéaires :

$$(21) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt_1} = X_{11} p_1 + X_{21} p_2 + \ldots + X_{m1} p_m, \\ \dfrac{du}{dt_2} = X_{12} p_1 + X_{22} p_2 + \ldots + X_{m2} p_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{du}{dt_n} = X_{1n} p_1 + X_{2n} p_2 + \ldots + X_{mn} p_m, \end{cases}$$

X_{ij} désignant en général une fonction des x et des t ne contenant aucune des quantités p. Pour intégrer les équations (21), il faudra former les équations (11), (12), lesquelles deviennent, dans le cas actuel,

$$(22) \qquad \begin{cases} -dx_1 = X_{11}\,dt_1 + X_{12}dt_2 + \ldots + X_{1n}\,dt_n, \\ -dx_2 = X_{21}\,dt_1 + X_{22}dt_2 + \ldots + X_{2n}\,dt_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ -dx_m = X_{m1}\,dt_1 + X_{m2}dt_2 + \ldots + X_{mn}dt_n, \end{cases}$$

$$(23) \qquad \begin{cases} dp_1 = \left(p_1 \dfrac{dX_{11}}{dx_1} + p_2 \dfrac{dX_{21}}{dx_1} + \ldots\right) dt_1 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

On intégrera ces équations en prenant pour constantes d'intégration les x^0 et les p^0, on portera les valeurs des p et des x résultant de cette intégration dans l'équation

$$u = u_0 + \int (\Sigma p\,dx + \Sigma f\,dt), \tag{24}$$

puis, l'intégration effectuée, on éliminera les p^0, les x^0, u^0 et les p entre les intégrales de (22) et (23), l'équation (24) et les équations

$$u^0 = \varpi(x_1^0, x_2^0, \ldots), \quad p_1^0 = \frac{d\varpi}{dx_1^0}, \quad p_2^0 = \frac{d\varpi}{dx_2^0}, \quad \cdots \tag{25}$$

Or 1°, les p n'entrant pas dans les équations (22), celles-ci forment un système intégrable; 2° si dans (24) on remplace les lettres f par leurs valeurs, le coefficient de p_i sera

$$X_{i1}\,dt_1 + X_{i2}\,dt_2 + \ldots \quad \text{ou} \quad -dx_i;$$

de sorte que l'équation (24) se réduira à $u = u^0$. Or, les p^0 n'entrant ni dans les intégrales de (22) ni dans cette équation $u = u^0$, l'élimination des p et des p^0 sera toute faite si on laisse de côté les intégrales de (23) et les équations

$$p_1^0 = \frac{d\varpi}{dx_1^0}, \quad p_2^0 = \frac{d\varpi}{dx_2^0}, \quad \cdots$$

L'intégrale complète du système linéaire (21) s'obtiendra donc tout simplement en posant

$$u = \varpi(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$$

et en remplaçant dans cette formule x_1^0, x_2^0, ... par leurs valeurs tirées des intégrales du système (22). Mais ϖ est une fonction arbitraire des x^0 : c'est donc aussi une fonction arbitraire des constantes d'intégration du système (22), quelles que soient ces constantes. On peut donc dire sous une forme abrégée que :

La solution complète commune aux équations (21), *quand elle existe, est une fonction arbitraire des constantes d'intégration du système* (22).

La forme de ce résultat montre d'ailleurs que toute intégrale ou, si l'on veut, que toute fonction qui, égalée à une constante, constitue une intégrale du système (22) sera une intégrale du système (21). Réciproquement d'ailleurs, toute solution non singulière des équations (21) étant de la forme $\varpi(x_1^0, x_2^0, \ldots)$ sera une intégrale des équations (22).

D'après ce que nous venons de voir, les équations (11) et (12) pourront être remplacées dans le cas général par le système des équations linéaires aux dérivées partielles

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\nu}{dt_1} = {} & \frac{df_1}{dp_1}\frac{d\nu}{dx_1} + \frac{df_1}{dp_2}\frac{d\nu}{dx_2} + \ldots + \frac{df_1}{dp_m}\frac{d\nu}{dx_m} \\ & - \frac{df_1}{dx_1}\frac{d\nu}{dp_1} - \frac{df_1}{dx_2}\frac{d\nu}{dx_1} - \ldots - \frac{df_1}{dx_m}\frac{d\nu}{dp_m}, \\ \frac{d\nu}{dt_2} = {} & \frac{df_2}{dp_1}\frac{d\nu}{dx_1} + \ldots - \frac{df_2}{dx_1}\frac{d\nu}{dp_1} - \ldots, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

en ce sens que, dès que l'on connaîtra une intégrale α de ce système (26), on aura une intégrale $\alpha =$ const. du système (11), (12). Or, en faisant usage de la notation de Poisson, déjà employée plus haut, on pourra mettre les équations (26) sous la forme

$$(27)\qquad \frac{d\nu}{dt_1} = (f_1, \nu), \quad \frac{d\nu}{dt_2} = (f_2, \nu), \quad \ldots, \quad \frac{d\nu}{dt_n} = (f_n, \nu).$$

Désignons par ν_1 et ν_2 deux intégrales de ce système (27), ou, ce qui revient au même, deux intégrales du système (11), (12) (nous supposons que ν_1, ν_2 ne sont pas des solutions singulières), en vertu du théorème de Donkin, on a

$$[\nu_1, (f_1, \nu_2)] + [\nu_2, (\nu_1, f_1)] + [f_1, (\nu_2, \nu_1)] = 0,$$

ou, en vertu de (27),

$$\left(\nu_1, \frac{d\nu_2}{dt_1}\right) + \left(\frac{d_1}{dt_1}, \nu_2\right) + [f_1, (\nu_2, \nu_1)] = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$\frac{d(\nu_2, \nu_1)}{dt_1} = [f_1, (\nu_2, \nu_1)];$$

on trouverait de même

$$\frac{d(v_2, v_1)}{dt_2} = [f_2, (v_2, v_1)],$$

$$\frac{d(v_2, v_1)}{dt_3} = [f_3, (v_2, v_1)],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

L'expression (v_1, v_2) est donc une intégrale des équations (27), et par suite $(v_1, v_2) =$ const. est une nouvelle intégrale des équations (11), (12). Toutefois, ce théorème, comme celui de Poisson, tombera en défaut si (v_1, v_2) est une constante numérique ou une fonction des intégrales déjà connues. Ainsi donc:

Si v_1, v_2 sont des fonctions qui, égalées à des constantes, fournissent des intégrales de (11) *et* (12), (v_1, v_2) *égalé à une constante fournira une nouvelle intégrale du système* (11), (12), *à moins que* (v_1, v_2) *soit identiquement constant ou fonction des intégrales déjà trouvées* [*].

VIII.

Revenons maintenant sur notre analyse, afin de bien préciser l'ordre de difficulté des opérations que l'on aura à effectuer pour résoudre le système (4). En définitive, l'intégration du système (4) se ramène à l'intégration du système (11), (12). Pour intégrer ce système, il faudra d'abord intégrer les équations canoniques

$$(27) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} -dx_1 = \dfrac{df_1}{dp_1} dt_1, & -dx_2 = \dfrac{df_1}{dp_2} dt_1 \quad \ldots, \\ dp_1 = \dfrac{df_1}{dx_1} dt_1, & dp_2 = \dfrac{df_1}{dx_2} dt_1, \quad \ldots, \end{array} \right.$$

au nombre de $2m$. Si pour $t_1 = t_1^0$ les dérivées des fonctions $f^2, f_3, \ldots$ s'annulaient, les intégrales des équations (27), dans lesquelles on aurait

[*] Le cas où l'on a $(v_1, v_2) = 0$ identiquement permet de simplifier l'intégration des équations (4); en effet, les équations $v_1 =$ const., $v_2 =$ const. sont de nouvelles équations pouvant servir avec (4) à la définition de la fonction u.

pris pour constantes d'intégration les valeurs des x et des p pour

$$t_1 = t_1^0,$$

seraient les intégrales de (11) et (12); le reste du calcul se composerait alors d'une quadrature et d'une élimination. Or, nous allons voir que par un changement de variable, indiqué par M. Mayer, on peut toujours faire en sorte qu'il en soit ainsi.

Posons

$$t_i = \tau_i + (\theta_1 - \theta_1^0)\theta_i;$$

τ_i désignant une constante et $\theta_1, \theta_2, \ldots$ désignant de nouvelles variables, on aura

$$dt_i = (\theta_1 - \theta_1^0)\,d\theta_i + \theta_i\,d\theta_1,$$
$$dt_1 = (2\theta_1 - \theta_1^0)\,d\theta_1;$$

les équations (11) et (12) deviendront alors

$$-dx_1 = d\theta_1\left[\frac{df_1}{dp_2}(2\theta_1 - \theta_0) + \frac{df_2}{dp_1}\theta_2 + \frac{df_3}{dp_1}\theta_3 + \ldots\right]$$
$$+ d\theta_2\left[\frac{df_2}{dp_1}(\theta_1 - \theta_1^0)\right] + d\theta_3\left[\frac{df_3}{dp_1}(\theta_1 - \theta_1^0)\right] + \ldots,$$

. . . .

$$dp_1 = d\theta_1\left[\frac{df_1}{dx_1}(2\theta_1 - \theta_1^0) + \frac{df_1}{dx_1}\theta_2 + \frac{df_3}{dx_1}\theta_3 + \ldots\right]$$
$$+ d\theta_2\frac{df_2}{dp_1}(\theta_1 - \theta_1^0) + d\theta_3\frac{df_2}{dp_1}(\theta_1 - \theta_1^0),$$

. . . .

Les équations différentielles à intégrer sont alors

$$-dx_1 = d\theta_1\left[\frac{df_1}{dp_1}(2\theta_1 - \theta_1^0) + \frac{df_2}{dp_1}\theta_2 + \frac{df_3}{dp_1}\theta_3 + \ldots\right],$$

. . . . ,

$$dp_1 = d\theta_1\left[\frac{df_1}{dx_1}(2\theta_1 - \theta_1^0) + \frac{df_2}{dx_1}\theta_2 + \frac{df_3}{dp_1}\theta_3 + \ldots\right],$$

. . . .

Si l'on pose

$$\text{H} = f_1(2\theta_1 - \theta_1^0) + f_2\theta_2 + f_3\theta_3 + \ldots,$$

elles peuvent s'écrire

$$-dx_1 = \frac{dH}{dp_1}\,d\theta_1, \quad -dx_2 = \frac{dH}{dp_2}\,d\theta_1, \quad \ldots,$$
$$dp_1 = \frac{dH}{dx_1}\,d\theta_1, \quad dp_2 = \frac{dH}{dx_2}\,d\theta_1, \quad \ldots;$$

et il est remarquable qu'elles ont conservé la forme canonique. Ainsi, en résumé :

L'intégration d'un système de n équations aux dérivées partielles du premier ordre à une seule fonction inconnue de $m+n$ variables, ne contenant pas explicitement cette fonction inconnue, dépend de l'intégration d'un seul système d'équations canoniques contenant $2m$ équations.

Si le système canonique auquel on est ainsi ramené s'intègre sans difficulté, ou encore, si l'on peut facilement découvrir les intégrales du système (11), (12), la méthode précédente donnera très-simplement la solution des équations (4); sinon il faudra avoir recours à la méthode de Bour et de Jacobi, que l'on pourra d'abord combiner avec celle que nous venons d'exposer.

IX.

Étant donné un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, on pourra toujours faire disparaître la fonction inconnue elle-même, par l'un des procédés indiqués par Jacobi pour le cas d'une seule équation; nous pouvons donc supposer que la fonction inconnue n'entre pas explicitement dans les équations du système donné; pour trouver les conditions d'intégrabilité complète de ce système et pour l'intégrer, il n'est pas nécessaire de le ramener à la forme (4), ce qui pourrait d'ailleurs être impossible à effectuer. Considérons en effet les équations

$$(28) \qquad F_1 = h_1, \quad F_2 = h_2, \quad \ldots, \quad F_n = h_n,$$

dans lesquelles $h_1, h_2, \ldots, h_n$ désignent des constantes que nous supposerons d'abord déterminées (nulles si l'on veut) et dans lesquelles $F_1, F_2, \ldots, F_n$ désignent des fonctions des $m+n=\mu$ variables x_1,

$x_2, \ldots, x_m, \ldots, x_\mu$ et des dérivées $p_1 = \frac{du}{dx}, p_2 = \frac{du}{dx^2}, \ldots, p_\mu = \frac{du}{dx_\mu}$ de la fonction inconnue u. Posons $x_{m+1} = t_1, \ldots, x_{m+n} = t_n$ et supposons les équations (28) résolues par rapport à $\frac{du}{dt_1}, \ldots, \frac{du}{dt_n}$, elles prendront la forme (4) et les conditions de leur intégrabilité complète seront les formules (20). Or si, changeant de notation, on pose en général

$$(\alpha, \beta) = \sum_{s=1}^{s=m+n} \left(\frac{d\alpha}{dp_s}\frac{d\beta}{dx_s} - \frac{d\alpha}{dx_s}\frac{d\beta}{dp_s}\right),$$

les formules (20) prendront la forme

$$(p_{m+i}; p_{m+j}) = 0. \tag{29}$$

On a, en effet,

$$\frac{df_i}{dt_j} = \frac{dp_{m+i}}{dx_{m+j}} = \frac{dp_{m+j}}{dp_{m+j}}\frac{dp_{m+i}}{dx_{m+j}} - \frac{dp_{m+j}}{dx_{m+i}}\frac{dp_{m+i}}{dp_{m+j}}.$$

Or on a, comme l'on sait et comme il est bien facile de le vérifier,

$$(\alpha, \beta) = \sum_{i,j} \left(\frac{d\alpha}{d\gamma_i}\frac{d\beta}{d\gamma_j} - \frac{d\alpha}{d\gamma_j}\frac{d\beta}{d\gamma_i}\right)(\gamma_i, \gamma_j), \tag{30}$$

α, β désignant des fonctions des quantités γ et $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ désignant des fonctions des variables x et p. Si dans cette formule on suppose que les γ soient les fonctions p_{m+i} et que α et β soient deux des fonctions F, on aura

$$(F_\mu, F_\nu) = \sum \left(\frac{dF_\mu}{dp_{m+i}}\frac{dF_\nu}{dp_{m+j}} - \frac{dF_\mu}{dp_{m+j}}\frac{dF_\nu}{dp_{m+i}}\right)(p_{m+i}, p_{m+j}),$$

d'où l'on conclut, en vertu de (29),

$$(F_\mu, F_\nu) = 0; \tag{31}$$

réciproquement, d'ailleurs, si les (F_μ, F_ν) sont nuls, les formules (29) auront lieu; car on a, toujours en vertu du théorème contenu dans l'équation (30),

$$(p_{m+i}, p_{m+j}) = \sum \left(\frac{dp_{m+i}}{dF_\mu}\frac{dp_{m+j}}{dF_\nu} - \frac{dp_{m+j}}{dF_\mu}\frac{dp_{m+i}}{dF_\nu}\right)(F_\mu, F_\nu).$$

Ainsi les formules (31) sont les conditions d'intégrabilité complète du système (28). Ces relations (31) ne sont plus des identités, mais elles deviennent identiques quand on y suppose $p_{m+1}, \ldots, p_{m+n}$ remplacés par leurs valeurs tirées des équations (28). Toutefois, si les constantes h étaient arbitraires, les formules (31) seraient identiques, parce que, ayant lieu quels que soient les h, on pourrait donner à ces constantes des valeurs choisies de telle sorte que les p_{m+i} prissent des valeurs arbitraires. Les formules $(F_\mu, F_\nu) = 0$, qui ont lieu quels que soient les h, auraient donc lieu aussi quels que soient les p_{m+i}.

Pour résoudre les équations (28), il faudrait pouvoir former les équations (11) et (12) et pour cela il faudrait calculer les valeurs des dérivées partielles $\frac{df_i}{dp_j}, \frac{df_i}{dx_j}$. Or, en différentiant les formules (28) par rapport à p_i, on a

$$\frac{dF_1}{dp_i} + \frac{dF_1}{df_1}\frac{df_1}{dp_i} + \frac{dF_1}{df_2}\frac{df_2}{dp_i} + \ldots + \frac{dF_1}{df_n}\frac{df_n}{dp_i} = 0,$$
$$\frac{dF_2}{dp_i} + \frac{dF_2}{df_1}\frac{df_1}{dp_i} + \frac{dF_2}{df_2}\frac{df_2}{dp_i} + \ldots + \frac{dF_2}{df_n}\frac{df_n}{dp_i} = 0;$$

de là on pourrait tirer $\frac{df_1}{dp_i}, \frac{df_2}{dp_i}, \ldots$, et par suite on pourrait former la $i^{\text{ème}}$ équation (11) en portant ces valeurs de $\frac{df_1}{dp_i}, \frac{df_2}{dp_i}, \ldots$ dans (4); mais, au lieu de faire cette substitution, on peut éliminer par tout autre moyen les $\frac{df_k}{dp_i}$ entre les équations précédentes et les équations (11). On trouve alors m équations dont le type est

$$\begin{vmatrix} dx_i & dt_1 & dt_2 & \ldots & dt_n \\ \frac{dF_1}{dp_i} & \frac{dF_1}{df_1} & \frac{dF_1}{df_2} & \ldots & \frac{dF_1}{df_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{dF_n}{dp_i} & \frac{dF_n}{df_1} & \frac{dF_n}{df_2} & \ldots & \frac{dF_n}{df_n} \end{vmatrix} = 0.$$

De même, les équations (12) peuvent être remplacées par m équations dont le type est

$$\begin{vmatrix} -dp_i & dt_1 & dt_2 & \dots & dt_n \\ \dfrac{dF_1}{dx_i} & \dfrac{dF_1}{df_1} & \dfrac{dF_1}{df_2} & \dots & \dfrac{dF_1}{df_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{dF_n}{dx_i} & \dfrac{dF_n}{df_1} & \dfrac{dF_n}{df_2} & \dots & \dfrac{dF_n}{df_n} \end{vmatrix} = 0.$$

En tout cas, il faudra adjoindre à ces nouvelles équations les équations proposées elles-mêmes (28).

X.

Maintenant nous allons mettre à profit les remarques précédentes pour améliorer la méthode d'intégration que nous venons d'exposer. Désignons par u la fonction inconnue, par $x_1, x_2, \dots, x_{m+n}$ les variables et posons

$$\frac{du}{dx_1} = p_1, \quad \frac{du}{dx_2} = p_2, \quad \dots, \quad \frac{du}{dx_{m+n}} = p_{m+n}$$

Si nous supposons que la fonction u elle-même n'entre pas dans les équations à intégrer, celles-ci pourront se mettre sous la forme

$$(32) \qquad p_1 - f_1 = 0, \quad p_2 - f_2 = 0, \quad \dots, \quad p_n - f_n = 0.$$

Si l'on parvenait à adjoindre à ces n équations m autres équations renfermant m constantes arbitraires et satisfaisant aux conditions d'intégrabilité complète, le système (32) et le système adjoint détermineraient les p en fonction des x et l'on calculerait u au moyen de la formule

$$u = u^0 + \int \Sigma p\, dx;$$

on aurait ainsi une solution complète. La méthode de Jacobi consiste précisément à rechercher le système adjoint; nous allons exposer rapidement la méthode de Jacobi modifiée par M. Mayer.

Essayons d'abord d'adjoindre aux équations proposées (32) une équation

$$(33) \qquad F_1 = h_1,$$

renfermant la constante arbitraire h_1 et formant avec celles-ci un système complétement intégrable; si l'on suppose $p_1, p_2, \ldots, p_n$ éliminés de F_1 et remplacés par leurs valeurs $f_1, f_2, \ldots, f_n$ la fonction F_1 devra satisfaire aux équations

$$(34)\quad (p_1-f_1, F_1)=0,\quad (p_2-f_2, F_1)=0,\quad \ldots,\quad (p_n-f_n, F_1)=0.$$

Ces équations ne contenant aucune des quantités $p_1, p_2, \ldots, p_n$ devront être identiques quand p_{n+1} y aura été remplacé par sa valeur déduite de (33); mais, h_1 étant arbitraire, p_{n+1} l'est aussi et les formules (34) devront avoir lieu quel que soit p_{n+1}; elles devront être identiques. Les équations (34) devant être identiques, on peut les considérer comme des équations linéaires aux dérivées partielles définissant la fonction F_1. Jacobi trouvait la fonction F_1 par un procédé que nous n'avons pas à rappeler ici. M. Mayer se contente de trouver *une* intégrale du système des équations (34); ces équations développées prennent les formes

$$\begin{array}{l}
\dfrac{dF_1}{dx_1}=-\dfrac{df_1}{dx_{n+1}}\dfrac{dF_1}{dp_{n+1}}+\dfrac{df_1}{dp_{n+1}}\dfrac{dF_1}{dx_{n+1}}-\dfrac{df_1}{dx_{n+2}}\dfrac{dF_1}{dp_{n+2}}+\dfrac{df_1}{dp_{n+2}}\dfrac{dF_1}{dx_{n+2}}+\ldots,\\
\dfrac{dF}{dx_2}=-\dfrac{df_2}{dx_{n+1}}\dfrac{dF_1}{dp_{n+1}}+\dfrac{df_2}{dp_{n+1}}\dfrac{dF_1}{dx_{n+1}}-\dfrac{df_2}{dx_{n+2}}\dfrac{dF_1}{dp_{n+2}}+\ldots,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

et s'intègrent au moyen des équations aux différences totales

$$(35)\quad \left\{\begin{array}{l}
-dx_{n+1}=\dfrac{df_1}{dp_{n+1}}dx_1+\dfrac{df_2}{dp_{n+1}}dx_2+\ldots+\dfrac{df_n}{dp_{n+1}}dx_n,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
dp_{n+1}=\dfrac{df_1}{dx_{n+1}}dx_1+\dfrac{df_2}{dx_{n+1}}dx_2+\ldots+\dfrac{df_n}{dx_{n+1}}dx_n.\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

Ces équations sont précisément celles auxquelles on est conduit par la méthode exposée plus haut; mais, tandis qu'il fallait tout à l'heure les intégrer complétement, il suffit ici d'en trouver *une* intégrale. Cette intégrale, étant désignée par $F_1 = h_1$, sera précisément l'une des équations à adjoindre au système proposé (32). En opérant alors sur le système (32), (33) comme on a opéré sur le système (32), on finira par trouver un système de $m+n$ équations qui permettront de calculer tous les p. Une simple quadrature fournira alors la solution complète du système (32).

En théorie, cette méthode d'intégration est plus simple que celle que nous avons indiquée tout d'abord, parce qu'elle n'exige pas l'intégration complète du système (35), identique au système (11), (12); mais elle exige la formation de m systèmes successifs analogues au système (35) et la formation successive de ces systèmes peut être laborieuse ou même complétement impossible. La première méthode peut encore devenir de beaucoup la plus simple, si le théorème de Poisson s'applique avec succès au système canonique auquel on est conduit; ainsi chacune des méthodes a ses avantages et ses inconvénients.

Rien n'empêche, d'ailleurs, de combiner les deux méthodes et de faire usage de la première dès que l'on rencontrera des équations aux différences totales facilement intégrables. On peut encore combiner les deux méthodes comme il suit, après avoir ramené l'intégration des équations simultanées que nous prendrons sous la forme (4) à l'intégration des équations canoniques

$$-dx_1=\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}p_1}d\theta_1,\quad -dx_2=\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}p_2}d\theta_1,\quad \ldots,$$
$$dp_1=\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x_1}d\theta_1,\qquad dp_2=\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x_2}d\theta_1,\quad \ldots.$$

On peut observer que l'intégration de ces dernières équations revient à la recherche d'une solution complète de l'équation unique aux dérivées partielles du premier ordre

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\theta_1}=H, \tag{36}$$

où l'on a remplacé dans H les quantités $p_1, p_2, \ldots, p_m$ par $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x_1}$, $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x_2}$, $\ldots$, $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x_m}$, et l'on peut appliquer à cette équation unique la méthode de Jacobi modifiée par M. Mayer.

Les deux méthodes ainsi combinées constitueront une véritable méthode d'abaissement, et, en effet, chaque fois que l'on pourra ajouter au système (12) une nouvelle équation $F_s = h_s$ satisfaisant aux conditions d'intégrabilité complète, on diminuera de deux unités le nombre des variables de l'équation unique (36), à laquelle on est ramené.

La première méthode est susceptible de simplifications que nous allons indiquer. Si l'intégration des équations (11) et (12) présente quelques difficultés, on commencera par en chercher seulement deux intégrales, $\alpha =$ const. et $\beta =$ const.; puis, appliquant le théorème du § V, qui, d'ailleurs, n'est autre que le théorème de Poisson, on formera la combinaison $(\alpha, \beta) = \gamma$. Si $\gamma =$ const. est une nouvelle intégrale, on la combinera avec α et β de manière à trouver encore de nouvelles intégrales; dans certains cas, on pourra ainsi achever l'intégration des équations (11), (12) sans autres opérations que de simples différentiations. La méthode n'exigera donc que la recherche de deux intégrales du système (11), (12).

S'il arrive que la combinaison (α, β) ne fournisse pas de nouvelle intégrale, c'est que (α, β) sera ou constant ou fonction de α et β; si (α, β) est identiquement nul, on pourra immédiatement adjoindre les équations $\alpha =$ const. et $\beta =$ const. aux équations (4) et en profiter ainsi pour simplifier ce système. Si (α, β) est identiquement constant, cette circonstance pourra être utilisée si l'on a encore une autre intégrale γ telle que (α, γ) soit constant. En effet, supposons

$$(\alpha, \beta) = a, \quad (\alpha, \gamma) = b;$$

on aura

$$\left(\alpha, \frac{\beta}{a}\right) - \left(\alpha, \frac{\gamma}{b}\right) = \left(\alpha, \frac{\beta}{a} - \frac{\gamma}{b}\right) = 0,$$

et α et $\frac{\beta}{a} - \frac{\gamma}{a}$ seront deux intégrales nouvelles satisfaisant aux conditions d'intégrabilité.

XI.

Proposons-nous d'intégrer les équations suivantes, où $p = \frac{du}{dx}$, $q = \frac{du}{dy}$.

$$(a) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{ds} = 2p^2x^2s - pqxyt, \\ \dfrac{du}{dt} = 2q^2y^2t - pqxys. \end{cases}$$

On peut constater que ces équations sont complétement intégrables; pour les intégrer, il faut d'abord intégrer les équations aux différences totales

$$(b)\qquad \begin{cases} -dx = (4px^2s - qxyt)\,ds - qxysdt, \\ -dy = -pxytds + (4qy^2t - pxys)\,dt, \\ dp = (4p^2xs - pqyt)\,ds - pqysdt, \\ dy = -pqxtds + (4q^2yt - pqxs)\,dt. \end{cases}$$

La première et la troisième équation de ce système, multipliées respectivement par p et par x, puis retranchées l'une de l'autre, donnent

$$pdx + xdp = 0;$$

la seconde et la quatrième donnent de même

$$qdy + ydq = 0,$$

d'où l'on tire facilement

$$(c)\qquad px = p_0x_0, \quad qy = q_0y_0,$$

l'indice zéro indiquant que l'on doit supposer, dans l'expression qui en est affectée, $s = s_0$, $t = t_0$. Si l'on se sert des deux premières intégrales trouvées pour éliminer p et q des équations (b), on trouve

$$-dx = (4p_0x_0xs - q_0y_0xt)\,ds - q_0y_0xsdt,$$
$$-dy = (4q_0y_0yt - p_0x_0ys)\,dt - p_0x_0ytds,$$

ce que l'on peut écrire

$$-\frac{dx}{x} = 4p_0x_0sds - q_0y_0(tds + sdt)$$
$$-\frac{dy}{y} = 4q_0y_0tdt - p_0x_0(tds + sdt);$$

on en déduit, en intégrant,

$$\log \frac{x_0}{x} = 2p_0x_0(s^2 - s_0^2) - q_0y_0(st - s_0t_0),$$

$$\log \frac{y_0}{y} = 2q_0y_0(t^2 - t_0^2) - p_0x_0(st - s_0t_0).$$

Rien n'empêche de supposer $t_0 = 0$, $s_0 = 0$: cela simplifiera un peu ces dernières formules, qui deviendront

$$(d) \qquad \left\{ \begin{aligned} \log \frac{x_0}{x} &= 2p_0x_0s^2 - q_0y_0st, \\ \log \frac{y_0}{y} &= 2q_0y_0t^2 - p_0x_0st. \end{aligned} \right.$$

Il reste à effectuer les calculs dans l'équation

$$\begin{aligned} u = u_0 + \int [p\,dx + q\,dy + (2p^2x^2s - pqxyt)ds \\ + (2q^2y^2t - pqxys)\,dt]; \end{aligned}$$

en y remplaçant p, q, x, y par leurs valeurs tirées de (c) et (d), on a

$$\begin{aligned} u = u_0 + \int \Big[p_0x_0\frac{dx}{x} + q_0y_0\frac{dy}{y} + 2p_0^2x_0^2s\,ds + 2q_0^2y_0^2t\,dt \\ - p_0q_0x_0y_0(t\,ds + s\,dt)\Big], \end{aligned}$$

ou bien

$$(e) \qquad \left\{ \begin{aligned} u = u_0 + p_0x_0\log\frac{x}{x_0} + q_0y_0\log\frac{y}{y_0} + p_0^2x_0^2s^2 \\ + q_0^2y_0^2t^2 - p_0q_0x_0y_0st. \end{aligned} \right.$$

Si l'on pose maintenant

$$(f) \qquad u_0 = \varpi(x_0, y_0), \quad \frac{du_0}{dx_0} = p_0, \quad \frac{du_0}{dy_0} = q_0,$$

en éliminant p, q, p_0, q_0, x_0, y_0 et u_0 entre les équations (c), (d), (e), (f), on aura l'intégrale générale des équations proposées. On peut obtenir une solution complète en éliminant seulement p, q, p_0, q_0 entre (b), (c), (d), (e) ou p_0 et q_0 entre (d) et (e) ; mais la manière la plus simple d'obtenir une solution complète consiste à particulariser la forme de la fonction ϖ et à prendre

$$(g) \qquad \varpi = a \log x_0 + b \log y_0 + c,$$

a, b, c désignant trois constantes arbitraires. On a en effet alors

$$\frac{d\varpi}{dx_0} = p_0 = \frac{a}{x_0} \quad \text{et} \quad \frac{d\varpi}{dy_0} = q_0 = \frac{b}{y_0}$$

ou

$$(h) \qquad a = p_0 x_0, \quad b = q_0 y_0;$$

l'élimination de p_0, q_0, y_0, x_0, u_0 se fait alors très-simplement. En remplaçant dans (e) u_0 par $a \log x_0 + b \log y_0 + c$, $p_0 x_0$ par a et $q_0 y_0$ par b, on a

$$(k) \qquad u = c + a \log x + b \log y + a^2 s^2 + b^2 t^2 - abst.$$

On aurait pu arriver à ce résultat en simplifiant un peu les calculs; en effet, des équations (b) on tire les intégrales très-simples

$$(l) \qquad px = a, \quad qy = b,$$

lesquelles satisfont à la relation

$$(px, qy) = 0;$$

en adjoignant alors les formules (l) au système donné (a), on a quatre équations faisant connaître p, q, $\frac{du}{ds}$ et $\frac{du}{dt}$ en fonction de x, y, s, t et des arbitraires a, b. Si l'on intègre alors la différentielle

$$pdx + qdy + \frac{du}{ds} ds + \frac{du}{dt} dt,$$

on trouve précisément la formule (k).

XII.

Pour terminer cette théorie des équations aux dérivées partielles, il resterait à montrer comment on intègre le système (4) quand il admet une solution, sans cependant satisfaire aux conditions d'intégrabilité complète; mais nous n'avons rien à ajouter à ce que Bour a dit à ce sujet dans le XXXIX^e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* (*Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre*).