JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. RESAL

Résumé d'une Conférence sur la théorie mathématique de l'élasticité, faite aux élèves de l'École Polytechnique (promotion de 1877-1879)

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 5 (1879), p. 227-248.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1879_3_5__227_0>

Résumé d'une Conférence sur la théorie mathématique de l'élasticité, faite aux élèves de l'École Polytechnique (promotion de 1877-1879).

PAR M. H. RESAL.

Nous considérerons comme étant connues toutes les notions physiques relatives à l'élasticité et à ses limites, ainsi que la définition de la pression dans l'intérieur d'un système moléculaire. Nous ne nous occuperons d'ailleurs que des corps homogènes, dont nous représenterons par D la densité à l'état naturel, c'est-à-dire lorsque ces corps sont soustraits à l'action de toute force extérieure.

Sommations qui représentent les composantes des pressions.

Soient Ox, Oy, Oz trois axes coordonnés rectangulaires, G le centre de gravité d'un élément superficiel $ab = d\omega$ compris dans un corps homogène et dont le plan est perpendiculaire à l'un des trois axes ci-dessus, à Oz si l'on veut, pour fixer les idées.

Pour nous, une molécule m sera située *au-dessous* du plan de $d\omega$, quand sa coordonnée parallèle à Oz sera inférieure à celle de G.

Désignons par m' une molécule située au-dessus de ab, telle que la droite $mm' = r$ traverse $d\omega$, et par $mm'f(r)$ l'action moléculaire exercée par m sur m'.

Considérons d'abord des couples de molécules m, m' comprises dans un cylindre ayant pour base $d\omega$ et dont les génératrices aient une direction déterminée.

Si nous admettons d'abord que r reste constant, nous aurons la résultante

$$mf(r)\,\mathrm{D}\,d\omega\,r\cos(r,z),$$

et il faudra faire la somme de toutes les expressions semblables, en faisant varier r depuis o jusqu'au rayon de la sphère d'activité.

Nous avons donc parallèlement à l'axe des x la composante de la pression

$$p_{zx} = \mathrm{D}\,\mathrm{Som}\,mf(r)r\cos(r,z)\cos(r,x).$$

La somme est relative à toutes les orientations d'un rayon partant de G, mais situé au-dessus de $d\omega$; mais cette somme est la moitié de celle que l'on obtiendrait en faisant tourner le rayon r dans tous les sens autour de G. En nous plaçant à ce nouveau point de vue, nous aurons

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} p_{zx} &= \frac{\mathrm{D}}{2}\mathrm{Som}\,mf(r)r\cos(r,z)\cos(r,x),\\ &\text{et de même}\\ p_{zy} &= \frac{\mathrm{D}}{2}\mathrm{Som}\,mf(r)r\cos(r,z)\cos(r,y),\\ p_{zz} &= \frac{\mathrm{D}}{2}\mathrm{Som}\,mf(r)r\cos^2(r,z). \end{aligned}\right.$$

D'après le mode de raisonnement que nous avons adopté, on voit que les choses se passent comme si, toutes les molécules m se trouvant placées en G, les molécules m' rayonnaient autour de ce point.

Soient x, y, z les coordonnées du point G, $x+h$, $y+k$, $z+l$ celles d'une molécule quelconque située dans la sphère d'activité de ce point. Nous avons

$$\cos(r,x) = \frac{h}{r},\quad \cos(r,y) = \frac{k}{r},\quad \cos(r,z) = \frac{l}{r},$$

et, en posant $\varphi(r) = \frac{f(r)}{r}$, les formules (1) deviennent

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} p_{zx} &= \frac{\mathrm{D}}{2}\mathrm{Som}\,m\varphi(r)lh,\\ p_{zy} &= \frac{\mathrm{D}}{2}\mathrm{Som}\,m\varphi(r)lk,\\ p_{zz} &= \frac{\mathrm{D}}{2}\mathrm{Som}\,m\varphi(r)l^2. \end{aligned}\right.$$

Ces expressions sont nulles lorsque le corps considéré est à l'état naturel, ce que nous supposerons dans ce qui suit.

Expression des pressions en fonction des déplacements.

Admettons que, sous l'action de forces extérieures, le point G éprouve un déplacement dont nous représenterons par u, v, w les projections sur Ox, Oy, Oz. Nous ne conserverons que les premières puissances de ces déplacements et de leurs dérivées partielles. L'élément de volume $dx\,dy\,dz$ est devenu

$$(dx + du)(dy + dv)(dz + dw) = dx\,dy\,dz\left(1 + \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right).$$

La dilatation cubique est ainsi

$$\Delta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}. \tag{3}$$

La densité dans la sphère d'activité de G est devenue

$$D' = \frac{D}{1+\Delta} = D\left(1 - \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz}\right). \tag{4}$$

Soient $\delta h, \delta k, \delta l, \delta r$ les variations éprouvées par h, k, l, r. Nous aurons, par exemple,

$$\begin{aligned} p_{zx} &= \frac{D'}{2}\,\text{som}\, m\varphi(r + \delta r)(l + \delta l)(h + \delta h) \\ &= \frac{D'}{2}\,\text{Som}\, m\varphi(r)\,lh + \frac{D}{2}\,\text{Som}\, m[\varphi'(r)\,lh\,\delta r + \varphi(r)\,l\,\delta h + \varphi(r)\,h\,\delta l]. \end{aligned}$$

Or le premier terme de cette expression est nul avec les termes en δ; il vient donc

$$\left\{\begin{aligned} p_{zx} &= \frac{D}{2}\,\text{Som}\, m[\varphi'(r)\,lh\,\delta r + \varphi(r)(l\,\delta h + h\,\delta l)], \\ &\text{et de même} \\ p_{zy} &= \frac{D}{2}\,\text{Som}\, m[\varphi'(r)\,lk\,\delta r + \varphi(r)(l\,\delta k + k\,\delta l)], \\ p_{zz} &= \frac{D}{2}\,\text{Som}\, m[\varphi'(r)\,l^2\,\delta r + 2\varphi(r)\,l\,\delta l]. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Mais δh notamment n'est autre chose que l'accroissement que prend u

quand on y remplace x, y, z par $x+h, y+k, r+l$; nous avons donc

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\delta h = \frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k + \frac{du}{dz}l,\\ &\text{et de même}\\ &\delta k = \frac{dv}{dx}h + \frac{dv}{dy}k + \frac{dv}{dr}l,\\ &\delta l = \frac{dw}{dx}h + \frac{dw}{dy}k + \frac{dw}{dr}l, \end{aligned}\right.$$

et enfin

$$(7)\quad \delta r = \frac{h\,\delta h + k\,\delta k + l\,\delta l}{r}.$$

Concevons que l'on substitue la valeur (7) dans les formules (5), puis les valeurs (6); on fera ensuite sortir $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dr}, \frac{dv}{dx}, \ldots$ des signes Som. Mais le calcul se simplifie notablement si l'on remarque que: 1° en raison de la symétrie, les sommes renfermant h, k, l à des puissances impaires sont nulles, puisqu'elles doivent avoir la même valeur en changeant les signes de ces variables; 2° d'après la troisième des équations (2), on a,

$$\text{Som}\, m\, \varphi(r) l^2 = 0;$$

par suite,

$$0 = \text{Som}\, m\, \varphi(r) h^2 = \text{Som}\, m\, \varphi(r) k^2 = \text{Som}\, m\, \varphi(r) l^2 = \text{Som}\, m\, \varphi(r) r^2 = 0.$$

Si l'on pose

$$\text{Som}\, m \frac{\varphi'(r)}{r} h^2 l^2 = \text{Som}\, m \frac{\varphi'(r)}{r} h^2 k^2 = \text{Som}\, m \frac{\varphi'(r)}{r} k^2 l^2 = -\frac{2}{D}\mu,$$

$$\text{Som}\, m \frac{\varphi'(r)}{r} h^4 = \text{Som}\, m \frac{\varphi'(r)}{r} k^4 = \text{Som}\, m \frac{\varphi'(r)}{r} l^4 = -\frac{2}{D}\nu,$$

les quantités μ et ν étant deux constantes spécifiques, on trouve

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &p_{zx} = -\mu\left(\frac{du}{dr} + \frac{dw}{dx}\right),\\ &p_{zy} = -\mu\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right),\\ &p_{zz} = -\mu\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}\right) - \nu\frac{dw}{dz}. \end{aligned}\right.$$

Il existe entre les constantes μ et ν une relation qui résulte de ce que leurs valeurs sont indépendantes du choix des coordonnées. Soient en effet α, β, γ les angles que forment avec Oz trois axes rectangulaires Ox', Oy', Oz', h', k', l' les projections sur ces trois axes de la somme géométrique $\bar{h}+\bar{k}+l$; nous avons

$$l = h'\cos\alpha + k'\cos\beta + l'\cos\gamma,$$

$$(8')\quad \begin{cases} \nu = -\frac{2}{D}\,\mathrm{som}\,\varphi'(r)\,l^4 \\ \quad = \nu(\cos^4\alpha + \cos^4\beta + \cos^4\gamma) \\ \qquad + 6\mu(\cos^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\gamma + \cos^2\beta\cos^2\gamma). \end{cases}$$

Or, de

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

on tire

$$\cos^4\alpha + \cos^4\beta + \cos^4\gamma = 1 - 2(\cos^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\gamma + \cos^2\beta\cos^2\gamma).$$

En substituant cette valeur dans la formule (8′), on trouve

$$\nu = 3\mu\ [*];$$

nous avons donc finalement

$$(9)\quad \begin{cases} p_{zx} = -\mu\left(\frac{du}{dr} + \frac{dw}{dx}\right), \\ p_{zy} = -\mu\left(\frac{dv}{dr} + \frac{dw}{dy}\right), \\ p_{zz} = -\mu\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + 3\,\frac{dw}{dz}\right). \end{cases}$$

Par une permutation de lettres, on obtiendra les valeurs des p_{xx}, p_{yy}, p_{xy}, et l'on reconnaîtra que les égalités $p_{xz} = p_{zx}, \ldots$ sont vérifiées.

---

[*] Cette relation, établie par Cauchy, puis par Poisson, a été contestée par Lamé, qui, aux notations près, admet que μ et ν sont indépendants. Mais les expériences récentes de M. Kirchhoff sur l'acier fondu et de M. Cornu sur le cristal ont démontré très-nettement que la restriction de Lamé devait être mise de côté quand il s'agit de corps isotropes.

Nous devons ajouter que des expériences faites indépendamment les unes des autres au Conservatoire des Arts et Métiers sur la traction et à la Société industrielle de Mulhouse sur la torsion confirment le résultat ci-dessus

En substituant les valeurs des pressions dans les équations d'équilibre intérieur résultant de la considération du parallélépipède élémentaire, on obtient trois équations aux différentielles partielles entre les inconnues u, v, w.

Les conditions relatives à la surface, où la pression est donnée en fonction de x, y, z ou plutôt en fonction de deux de ces coordonnées, en vertu de l'équation de cette surface, s'obtiendront par la considération du tétraèdre élémentaire.

Si au lieu de l'équilibre il y a mouvement, on remplacera dans les équations générales de l'élasticité X, Y, Z par $X - \frac{d^2u}{dt^2}$, $Y - \frac{d^2v}{dt^2}$, $Z - \frac{d^2w}{dt^2}$, et alors nous aurons des équations aux différentielles partielles entre quatre variables x, y, z, t.

Qu'il y ait équilibre ou mouvement, il n'y a que dans quelques cas particuliers que l'on peut effectuer l'intégration.

Revenons aux généralités. Considérons un corps sollicité par plusieurs groupes de forces (S), (S'), (S''),..., et supposons que les pressions sur sa surface forment également différents groupes (σ), (σ'), (σ''),..., en nombre égal aux précédents, ce qui peut toujours se faire en complétant par des zéros, s'il y a lieu, le groupe le moins nombreux. Les équations de l'équilibre intérieur relatives à la surface étant linéaires en u, v, w, il est clair que, si l'on satisfait aux équations ci-dessus en combinant deux à deux les groupes (S) et (σ), la solution du problème s'obtiendra en faisant la somme des u, v, w obtenus de cette manière.

Il résulte de là que, si des forces produisent simultanément une traction ou compression, une torsion et une flexion, il suffira d'étudier en particulier chacune des déformations, comme si elle se produisait indépendamment des autres.

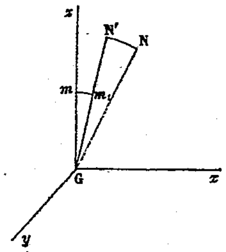
Interprétation géométrique des formules qui représentent les pressions intérieures.

Supposons que l'on transporte les coordonnées parallèlement à elles-mêmes au point G.

Si un point m primitivement situé sur Gz est venu en m_1, on a $h = 0$, $k = 0$, et la troisième des formules (G) donne

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\delta l}{l} = \frac{Gm_1 - Gm}{Gm}.$$

On voit ainsi pourquoi $\frac{dw}{dz}$ exprime une dilatation : nous représenterons cette dérivée partielle par δ_z.



Les coordonnées de m_1, parallèles à Ox, Oy, Oz ont pour expressions

$$\chi = \delta h = \frac{du}{dz} l,$$
$$\eta = \delta k = \frac{dv}{dz} l,$$
$$\zeta = l + \frac{dw}{dz} l.$$

Il résulte de là que, aux termes du second ordre près, on a pour les équations de la normale matérielle primitive, après la déformation,

$$(10) \qquad \chi = \frac{du}{dz}\zeta, \quad \eta = \frac{dv}{dz}\zeta.$$

Les coordonnées d'un point primitivement situé dans le plan de l'élément dw ont pour valeurs, après la déformation,

$$\chi' = h + \delta h = h + \frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} k,$$
$$\eta' = k + \delta k = k + \frac{dv}{dx} h + \frac{dv}{dy} k,$$
$$\zeta' = \delta l = \frac{dw}{dx} h + \frac{dw}{dy} k,$$

d'où

$$\zeta' = \frac{dw}{dx}\chi' + \frac{dw}{dy}\eta',$$

pour l'équation du plan dans lequel se trouvaient primitivement les points matériels contenus dans $d\omega$.

Les équations de la normale GN à ce plan sont

$$(11) \qquad \chi' = -\frac{dw}{dx}\zeta', \quad \eta' = -\frac{dw}{dy}\zeta'.$$

Portons à partir de G sur les directions de Gm, et de GN des longueurs GN', GN égales à l'unité; l'élément NN' mesurera le *glissement*, c'est-à-dire l'angle compris sous la normale matérielle déformée et la normale à l'élément matériel déformé $d\omega$. Désignons par γ_z ce glissement et par γ_{zx} sa projection sur l'axe des x; nous avons

$$\gamma_{zx} = \chi - \chi',$$

d'où

$$\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} = \gamma_{zx}.$$

D'après les considérations ci-dessus, on peut donc écrire

$$(12) \qquad \begin{cases} p_{zz} = -\mu(\delta_x + \delta_y + 3\delta_z), & p_{xx} = \ldots, \quad p_{yy} = \ldots, \\ p_{zx} = -\mu\gamma_{zx}, \quad p_{zy} = -\mu\gamma_{zy} & \ldots \end{cases}$$

De la traction. — Nous rappellerons que, si l'on représente par p' la pression exercée sur un élément dont la normale fait les angles α, β, γ avec les axes coordonnés Ox, Oy, Oz, on a

$$(\mathrm{A}) \qquad \begin{cases} p'_x = p_{xx}\cos\alpha + p_{xy}\cos\beta + p_{xz}\cos\gamma, \\ p'_y = p_{yy}\cos\beta + p_{yx}\cos\alpha + p_{yz}\cos\gamma, \\ p'_z = p_{zz}\cos\gamma + p_{zx}\cos\alpha + p_{zy}\cos\beta. \end{cases}$$

Nous avons d'ailleurs, lorsque les molécules d'un corps isotrope ne sont sollicitées par aucune force extérieure,

$$(\mathrm{B}) \qquad \begin{cases} \dfrac{dp_{xx}}{dx} + \dfrac{dp_{xy}}{dy} + \dfrac{dp_{xz}}{dz} = 0, \\ \dfrac{dp_{yx}}{dx} + \dfrac{dp_{yy}}{dy} + \dfrac{dp_{yz}}{dz} = 0, \\ \dfrac{dp_{zx}}{dx} + \dfrac{dp_{zy}}{dy} + \dfrac{dp_{zz}}{dz} = 0. \end{cases}$$

Considérons maintenant un prisme ou cylindre maintenu par une extrémité AB et dont l'autre extrémité CD est soumise à une traction uniformément répartie sur sa surface Ω. Soient Q la charge totale, Oz l'axe de la pièce, Ox, Oy deux axes rectangulaires compris dans le plan de AB.

On a pour la surface latérale $p'=0$, $\gamma=0$, $\beta=90^\circ-\alpha$, par suite

$$(\mathrm{A}')\qquad \left\{\begin{aligned} &p_{xx}\cos\alpha+p_{xy}\sin\alpha=0,\\ &p_{yx}\cos\alpha+p_{yy}\sin\alpha=0,\\ &p_{zx}\cos\alpha+p_{zy}\sin\alpha=0,\end{aligned}\right.$$

et pour la section CD

$$(\mathrm{A}'_1)\qquad p_{zx}=0,\quad p_{zy}=0,\quad p_{zz}=-\frac{Q}{\Omega}.$$

Si nous admettons que $p_{xx}=0$, $p_{yy}=0$ et que les conditions (A'_1) soient satisfaites dans toute la masse, sauf vérification ultérieure, nous n'avons plus à nous occuper des équations (B) ; mais alors

$$3\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0,$$

$$3\frac{dv}{dy}+\frac{du}{dx}+\frac{dw}{dz}=0,$$

d'où

$$\frac{du}{dx}=\frac{dv}{dy}=-\frac{1}{4}\frac{dw}{dz},$$

or la troisième des formules (A'_1) donne

$$-\mu\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dy}+3\frac{dw}{dz}\right)=-\frac{Q}{\Omega},$$

d'où

$$Q=\frac{5}{2}\mu\Omega\frac{dw}{dz}=\frac{5}{2}\mu\Omega\frac{\lambda}{l},$$

λ étant l'allongement éprouvé par la longueur l de la pièce.

Il suit de là que le coefficient de glissement μ est égal aux deux cinquièmes du coefficient d'élasticité E.

En nous reportant plus haut, nous voyons que le prisme éprouve une contraction latérale $\delta_x = \delta_y = -\frac{\delta_z}{4}$ égale au quart de la dilatation longitudinale, résultat qu'une expérience de Caignard-Latour a confirmé.

Tout ce qui précède est applicable au cas où le prisme serait soumis à une compression.

De la torsion des prismes.

Considérons un corps prismatique ou cylindrique, censé vertical pour fixer les idées, maintenu par son extrémité supérieure et dans le plan de la base duquel on fait intervenir des forces continues assujetties à la seule condition de se réduire à un couple pour qu'elles ne produisent pas de flexion.

Soient O le point fixe de l'axe Oz de la pièce; Ox, Oy deux droites rectangulaires comprises dans le plan horizontal du point O.

Suivant M. de Saint-Venant, dont nous suivrons à très-peu près l'analyse [*], la torsion est définie par un déplacement rotatoire de chaque section droite dans son plan (en négligeant d'abord la déformation de cette section), proportionnel à la distance z de la section au plan xOy.

Nous pouvons donc poser pour le point (x, y, z), et en désignant par θ une constante,

$$(1) \qquad u = \theta yz, \quad v = -\theta xz.$$

Conditions relatives à la surface latérale. — Nous avons $\gamma = 90°$, $\beta = 90° - \alpha$, et, en exprimant que la pression sur la surface latérale est nulle,

$$p_{xx}\cos\alpha + p_{xy}\sin\alpha = 0,$$
$$p_{zx}\cos\alpha + p_{yy}\sin\alpha = 0,$$
$$p_{zx}\cos\alpha + p_{zy}\sin\alpha = 0.$$

Les deux premières de ces conditions seront satisfaites si nous admettons, sous la réserve de justifications ultérieures, que l'on a dans

[*] *De la torsion des prismes*, 1855.

toute la masse

$$p_{xx} = 0, \tag{2}$$

$$p_{yy} = 0, \tag{3}$$

$$p_{xy} = 0. \tag{4}$$

Soit

$$f(x, y) = 0 \tag{5}$$

l'équation du périmètre de la section droite; comme nous avons pour ce périmètre

$$\frac{dy}{dx} = -\cot\alpha = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}},$$

la troisième des conditions ci-dessus se réduit à

$$p_{zx}\frac{df}{dx} + p_{zy}\frac{df}{dy} = 0. \tag{6}$$

Condition relative à la base. — Cette condition sera remplie si pour toutes les sections on a

$$p_{zz} = 0, \tag{7}$$

ce que nous supposerons encore sous toutes réserves.

Équations de l'équilibre intérieur. — Si nous admettons qu'en un point quelconque de la pièce on ait

$$\frac{dp_{zx}}{dz} = 0, \tag{8}$$

$$\frac{dp_{yz}}{dz} = 0, \tag{9}$$

les équations de l'équilibre intérieur, eu égard aux formules (2), (3) et (4), se réduisent à la suivante :

$$\frac{dp_{zx}}{dx} + \frac{dp_{zy}}{dy} = 0. \tag{10}$$

Déductions de l'hypothèse de la nullité de la pression sur un élément quelconque perpendiculaire à chacun des trois axes coordonnés. — Des équations (2), (3) et (7) on déduit

$$\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}+3\frac{du}{dx}=0,$$

$$\frac{du}{dx}+\frac{dw}{dz}+3\frac{dv}{dy}=0,$$

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+3\frac{dw}{dz}=0,$$

d'où

$$\frac{du}{dx}=0,\quad \frac{dv}{dy}=0,$$

$$\frac{dw}{dz}=0. \tag{7'}$$

Les deux premières de ces conditions étant satisfaites par les valeurs (1), il n'y a plus lieu de nous en occuper, et il en est de même des formules (2) et (3).

Dernières conditions. — L'équation (4), qui revient à la suivante,

$$\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}=0,$$

étant également vérifiée par les valeurs (1), doit être mise aussi de côté.

Nous avons maintenant

$$\left\{\begin{aligned} p_{zx}&=-\mu\left(\frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}\right)=-\mu\left(\theta y+\frac{dw}{dx}\right),\\ p_{zy}&=-\mu\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)=\mu\left(\theta x-\frac{dw}{dy}\right).\end{aligned}\right. \tag{11}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (10), on trouve

$$\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d^2w}{dy^2}=0. \tag{12}$$

Résumé des formules. — On voit, par ce qui précède, que le problème de la torsion d'un prisme se ramène à la considération des formules suivantes :

$$(7') \qquad \frac{dw}{dz} = 0,$$

$$(12) \qquad \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} = 0,$$

$$(11) \qquad \begin{cases} p_{zx} = -\mu\left(\theta y + \dfrac{dw}{dx}\right), \\ p_{zy} = \mu\left(\theta x - \dfrac{dw}{dy}\right), \end{cases}$$

$$(5) \qquad f(x, y) = 0,$$

$$(6) \qquad \left(\theta y + \frac{dw}{dx}\right)\frac{df}{dx} + \left(-\theta x + \frac{dw}{dy}\right)\frac{df}{dy} = 0,$$

les deux dernières étant relatives au périmètre.

Soit $d\omega$ un élément de la base du prisme ayant pour coordonnées x, y; pour que les forces de torsion se réduisent à un couple, comme nous l'avons admis dès le début, il faut que l'on ait

$$\int p_{zx}\,d\omega = 0, \quad \int p_{zy}\,d\omega = 0,$$

ou

$$(13) \qquad \int \frac{dw}{dx}\,d\omega = 0, \quad \int \frac{dw}{dy}\,d\omega = 0,$$

conditions auxquelles on devra encore satisfaire.

Supposons que le problème soit résolu ou que l'on ait obtenu w en fonction de x et y, et désignons par $\mathfrak{M}$ le moment de torsion $\int p_{zy} x\,d\omega - \int p_{zx} y\,d\omega$, qui est censé donné; nous aurons, eu égard aux formules (11), pour déterminer θ, la relation

$$(14) \qquad \mathfrak{M} = \mu\left[\theta \int (x^2 + y^2)\,d\omega + \int \left(\frac{dw}{dx} y - \frac{dw}{dy} x\right) d\omega\right].$$

Quoique ce qui précède suppose que les forces $p_{zx}\,d\omega$, $p_{zy}\,d\omega$ qui produisent la torsion doivent être réparties sur la base suivant une loi qui doit résulter de la solution du problème, il est inutile de s'arrêter à cette restriction lorsque l'on passe du domaine de la théorie pure dans celui des applications, car, comme Lamé l'a fait judicieusement remarquer, en s'appuyant sur l'expérience, les effets de la torsion deviennent indépendants du mode de distribution des forces extérieures à une très-petite distance de leurs points d'application et ne dépendent, en définitive, que du moment de torsion.

Application au cylindre elliptique.

Soient Ox, Oy les directions des axes principaux $2a$, $2b$ du profil elliptique;

$$(a) \qquad f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

l'équation de ce profil.

La formule (6) devient

$$(b) \qquad \left(\theta y + \frac{dw}{dx}\right) b^2 x + \left(-\theta x + \frac{dw}{dy}\right) a^2 y = 0,$$

et sera évidemment vérifiée d'une manière générale par une valeur de w proportionnelle à xy. On trouve ainsi

$$(c) \qquad w = \theta \frac{(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2} xy,$$

et, comme cette valeur satisfait aux formules (7') et (12), on voit qu'elle donne la solution du problème.

Avant d'aller plus loin, nous ferons remarquer que, d'après la formule (c), les sections droites d'un cylindre circulaire restent planes après la déformation, mais que, dans le cas de l'ellipse, chacune de ces sections devient un segment d'un paraboloïde hyperbolique. On voit également que, dans deux angles droits adjacents déterminés par les axes, il se produit une saillie et un creux.

Les formules (11) deviennent

$$(d) \qquad \left\{ \begin{aligned} p_{zx} &= -2\mu\theta \frac{a^2}{a^2 + b^2} y, \\ p_{zy} &= 2\mu\theta \frac{b^2}{a^2 + b^2} x, \end{aligned} \right.$$

valeurs qui satisfont bien aux conditions (13), car il est visible que les $p_{zx} d\omega$, $p_{zy} d\omega$ forment deux à deux des couples.

Enfin on déduit facilement des formules (d), eu égard aux valeurs connues des moments principaux d'inertie de l'ellipse,

$$\mathfrak{M} = \pi\mu\theta \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}.$$

Les maxima des valeurs absolues de p_{zx}, p_{zy} correspondant respectivement à $y = b$ et à $x = a$, on voit que la plus grande valeur de la composante de glissement est développée aux sommets du petit axe de chaque section, qui sont ainsi les points dangereux, résultat complétement opposé à celui que l'on déduit de la résistance des matériaux.

De la flexion d'un prisme.

Considérons un corps prismatique dont la longueur est a, fixé horizontalement par une extrémité, et tel que le plan vertical xOy passant par son axe Ox soit un plan de symétrie.

Soient

Oz la perpendiculaire en O au plan xOy;
P la résultante des forces verticales qui sont censées uniformément réparties sur la base libre de la pièce;
OA la forme que prend l'axe du prisme sous l'influence de la force P;
Ω la section droite de ce prisme;
I son moment d'inertie par rapport à une parallèle Gz' à Oz menée par son centre de gravité G'.

Conditions relatives à la surface latérale. — Nous avons ici

$$\alpha = 90^\circ, \quad \gamma = 90^\circ - \beta$$

et

$$(\mathrm{A}) \qquad p_{xy}\cos\beta + p_{xz}\sin\beta = 0,$$

$$(a) \qquad \begin{cases} p_{yy}\cos\beta + p_{yz}\sin\beta = 0, \\ p_{zy}\cos\beta + p_{zz}\sin\beta = 0. \end{cases}$$

Les conditions (a) seront satisfaites si dans la masse on a

$$(1) \qquad p_{yy} = 0, \quad p_{zz} = 0,$$

$$(1') \qquad p_{yz} = 0,$$

comme nous le supposerons dans ce qui suit, sauf à établir ultérieurement les conditions qu'il faut remplir pour qu'il en soit ainsi.

Les équations de l'équilibre intérieur se réduisent alors aux suivantes :

$$\frac{dp_{xx}}{dx}+\frac{dp_{xy}}{dx}+\frac{dp_{xz}}{dz}=0, \tag{2}$$

$$\frac{dp_{yz}}{dx}=0, \tag{2'}$$

$$\frac{dp_{zz}}{dz}=0. \tag{2''}$$

Les équations (1) se réduisent aux suivantes :

$$\delta_x+3\delta_y+\delta_z=0,$$
$$\delta_x+\delta_y+3\delta_z=0,$$

d'où

$$\delta_y=\delta_z=-\frac{\delta_x}{4} \tag{3}$$

et

$$p_{xx}=-\mu(\delta_y+\delta_z+3\delta_x)=-\tfrac{5}{2}\mu\delta_x. \tag{4}$$

Hypothèses. — Pour chercher à faire cadrer la théorie mathématique de l'élasticité avec la théorie de la résistance des matériaux, nous poserons

$$\delta_x=A_0+A_1 y,$$

formule dans laquelle A_0, A_1 désignent deux constantes.

La condition $\int p_{xx}\,d\omega$ donne $A_0=0$, d'où il suit que l'axe de la pièce n'éprouve pas de dilatation, que sa longueur n'a pas varié, d'où sa dénomination d'*axe neutre*.

Le moment total des $p_{xx}\,d\omega$, pris dans le sens de la flexion, donne la relation

$$-\int p_{xx}y\,d\omega=-\tfrac{5}{2}\mu A_1 I=P(a-x),$$

d'où

$$A_1=-\frac{2}{5}\frac{P(a-x)}{\mu I} \tag{b}$$

et

(5) $$\delta_x = \frac{du}{dx} = -\frac{2}{5}\frac{P(a-x)}{\mu I}y.$$

En désignant par $f(y,z)$ une fonction arbitraire de y et z, cette dernière équation donne

(6) $$u = -\frac{2P}{5\mu I}\left[\left(a - \frac{x}{2}\right)yx + f(y,z)\right].$$

Avant d'aller plus loin, nous ferons remarquer que A_1 n'est autre chose que $\frac{d^2u}{dx\,dy}$. Or, en remplaçant dans la formule (2') la pression p_{yx} par sa valeur en fonction des déplacements, on trouve

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = -\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{1}{\rho},$$

ρ représentant le rayon de courbure à la distance x de O pour toutes les files de molécules parallèles à Ox.

Quoique ce résultat ne soit pas d'accord avec la théorie de la résistance des matériaux, la formule (b) nous donne néanmoins le résultat connu

$$\frac{EI}{\rho} = P(a-x).$$

La double équation (3), eu égard à la valeur (5), donne

(c) $$\begin{cases} \dfrac{dv}{dy} = \dfrac{P}{10\mu I}(a-x)y, \\ \dfrac{dw}{dz} = \dfrac{P}{10\mu I}(a-x)y, \end{cases}$$

d'où

(d) $$v = \frac{P}{20\mu I}(a-x)y^2 + \varphi(x,z),$$

(d') $$w = \frac{P}{10\mu I}(a-x) + \psi(x,y).$$

Mais, en raison de la symétrie, w doit seulement changer de signe avec z, de sorte que la formule (d') se réduit à la suivante :

(7) $$w = \frac{P}{10\mu I}(a-x)yz.$$

La relation (1′) donne

$$\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}=0,$$

ou

$$\frac{d\varphi(x,z)}{dz}=-\frac{P}{10\mu I}(a-x)z,$$

et enfin

$$\varphi(x,z)=-\frac{P}{20\mu I}(a-x)z^2+\chi(x),$$

en introduisant une nouvelle fonction arbitraire $\chi(x)$.

La formule (d) devient ainsi

$$v=\frac{P}{20\mu I}(a-x)(y^2-z^2)+\chi(x).$$

Or l'équation (2′) revient à la suivante,

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2u}{dx\,dy}=0,$$

d'où

$$\frac{d^2\chi}{dx^2}=\frac{2P}{5\mu I}(a-x),$$

et enfin, en représentant par k et h deux constantes,

$$(8)\qquad v=\frac{P}{\mu I}\left[\frac{1}{20}(a-x)(y^2-z^2)+\frac{x^2}{5}\left(a-\frac{x}{3}\right)+kx+h\right].$$

Nous avons donc, en résumé,

$$(9)\qquad \begin{cases} p_{xx}=\dfrac{P(a-x)y}{I}, \quad p_{yy}=0, \quad p_{zz}=0, \quad p_{yz}=0, \\ p_{yx}=\dfrac{P}{I}\left(\dfrac{2}{5}\dfrac{df}{dy}+\dfrac{y^2-z^2}{20}-k\right), \\ p_{zx}=\dfrac{P}{I}\left(\dfrac{2}{5}\dfrac{df}{dz}+\dfrac{1}{10}yz\right). \end{cases}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (2), on trouve la suivante

$$(e)\qquad \frac{d^2f}{dy^2}+\frac{d^2f}{dz^2}=2y,$$

qui est satisfaite par

$$(10)\quad \begin{cases} f(y,z) = \dfrac{y^3}{3} + \dfrac{5}{2}\Sigma \cos m\,(z+\varepsilon)\,(\mathrm{M}e^{my} + \mathrm{N}e^{-my}), \\ \qquad\qquad + \dfrac{5}{2}\Sigma \cos m'(y+\varepsilon')(\mathrm{M}'e^{m'z} + \mathrm{N}'e^{-m'z}), \end{cases}$$

M, N, m, ε, M′, N′, m', ε' étant des constantes arbitraires.

Cette expression doit être considérée comme l'intégrale générale de l'équation (e), puisque sous les signes Σ elle renferme deux fonctions arbitraires.

Mais comme u, par suite $f(y, z)$, ne doit pas changer quand on y remplace z par $-z$, la formule (10) doit se réduire à la suivante :

$$(10')\quad \begin{cases} f(y,z) = \dfrac{y^3}{3} + \dfrac{5}{2}\Sigma \cos mz(\mathrm{M}e^{my} + \mathrm{N}e^{-my}) \\ \qquad\qquad + \dfrac{5}{2}\Sigma \mathrm{M}' \cos m'(y+\varepsilon')(e^{m'z} + e^{-m'z}). \end{cases}$$

Enfin, en nous reportant aux formules (9), nous devons conclure que M′ est nul, puisque p_{zx} doit seulement changer de signe avec z. Nous avons donc

$$(11)\quad \begin{cases} p_{yx} = \dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{I}}\left[\dfrac{7}{5}y^2 - \dfrac{z^2}{20} - k + \Sigma m \cos mz(\mathrm{M}e^{my} - \mathrm{N}e^{-my})\right], \\ p_{zx} = \dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{I}}\left[\dfrac{yz}{10} - \Sigma m \sin mz(\mathrm{M}e^{my} + \mathrm{N}e^{-my})\right]. \end{cases}$$

Équation à laquelle doit satisfaire le périmètre pour que les hypothèses que nous avons faites soient admissibles.

L'équation (A) donne pour le périmètre de la section droite, en remarquant que $\frac{dy}{dz} = -\cot\beta$,

$$(12)\quad \frac{dy}{dz} = \frac{\dfrac{yz}{10} - \Sigma m \sin mz(\mathrm{M}e^{y} + \mathrm{N}e^{-my})}{\dfrac{7}{5}y^2 - \dfrac{z^2}{20} - k + \Sigma m \cos mz(\mathrm{M}e^{my} - \mathrm{N}e^{-my})},$$

et l'on a bien $\frac{dy}{dz} = 0$ pour $z = 0$, comme cela devait être, en raison de la symétrie.

L'intégration de cette équation, en admettant qu'elle puisse s'effectuer pour des valeurs spéciales de M, N, m, introduira une dernière constante arbitraire, que nous désignerons par c.

Mais il faut aussi que les arbitraires satisfassent aux conditions

$$\int\int y \, dz\, dy = 0, \tag{13}$$

$$\int\int p_{xy}\, dz\, dy = \mathrm{P}, \tag{14}$$

les intégrales s'étendant à toute la section droite du prisme : ainsi donc on n'a que deux conditions auxquelles doivent satisfaire c, k, et les M, N et m.

Deuxième solution du problème au moyen de fonctions algébriques [*].

L'équation

$$\frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{d^2 f}{dz^2} = 2y$$

a pour intégrale générale

$$f = \frac{y^3}{3} + \mathrm{F}(y + iz) + \mathrm{F}_1(y - iz),$$

i représentant le symbole $\sqrt{-1}$ et F et F_1 deux fonctions arbitraires.

Développons les fonctions F et F_1 suivant les puissances ascendantes de z, et posons

$$\mathrm{F}(y) + \mathrm{F}_1(y) = \varphi(y),$$
$$i[\mathrm{F}'(y)] - \mathrm{F}'_1(y) = \psi(y);$$

[*] Cet article n'est qu'un Appendice, attendu que dans la limite du temps assigné à la Conférence il n'a pu être développé. R.

les fonctions arbitraires φ et ψ étant substituées à F et F_1; nous trouvons

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} f &= \frac{y^3}{3} + \varphi + \Sigma_1 \frac{(-1)^n}{1.2.3\ldots 2n}\frac{d^{2n}\varphi}{dy^{2n}} z^{2n}\\ &+ z\psi + \Sigma_1 \frac{(-1)^n}{1.2.3\ldots(2n+1)}\frac{d^{2n}\psi}{dy^{2n}} z^{2n+1}, \end{aligned}\right.$$

n étant un nombre entier positif dont la limite inférieure est l'unité.

Cette formule est surtout applicable au cas où l'on admet que φ et ψ sont des fonctions algébriques de y.

Si, comme dans le cas particulier du problème de la flexion que nous avons étudié et que nous ne perdons pas de vue, la fonction f est paire en z, on doit avoir $\psi = 0$, et par suite

$$(16)\qquad f = \frac{y^3}{3} + \varphi + \Sigma_1 \frac{(-1)^n}{1.2.3\ldots 2n}\frac{d\varphi^{2n}}{dy^{2n}} z^{2n}.$$

Les deux dernières des équations (9) deviennent alors, en remplaçant φ par $\frac{5}{2}\varphi$,

$$p_{yx} = \frac{P}{I}\left[\frac{9}{20}y^2 - \frac{z^2}{20} - k + \frac{d\varphi}{dy} + \Sigma_1 \frac{(-1)^n}{1.2.3\ldots 2n}\frac{d^{2n+1}\varphi}{dy^{2n+1}} z^{2n}\right],$$
$$p_{zx} = \frac{P}{I}\left[\frac{1}{10}yz + \Sigma_1 \frac{(-1)^n}{1.2.3\ldots 2n}\frac{1}{2n}\frac{d^{2n}\varphi}{dy^{2n}} z^{2n-1}\right].$$

Enfin, au lieu de l'équation (12) représentant l'équation différentielle du profil, nous avons la suivante,

$$(12'')\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{10}yz + \Sigma_1 \frac{(-1)^n}{1.2.3\ldots 2n}\frac{1}{2n}\frac{d^{2n}\varphi}{dy^{2n}} z^{2n-1}}{\frac{9}{20}y^2 - \frac{z^2}{20} - k + \frac{d\varphi}{dy} + \Sigma_1 \frac{(-1)^n}{1.2.3\ldots 2n}\frac{d^{2n+1}\varphi}{dy^{2n+1}} z^{2n}},$$

qui satisfait bien à la condition de $\frac{dy}{dx} = 0$ pour $z = 0$.

Supposons, par exemple, que, A représentant une constante, on ait

$\varphi = Ay^3$; on trouve, en remplaçant la constante arbitraire k par $\frac{K}{20}$,

$$\frac{dy}{dz} = \frac{2yz(1-15A)}{3y^2(3+20A)-z^2(1+60A)-k},$$

équation qui s'intègre facilement dans chacun des cas où $k=0$, $3+20A=0$, $1+60A=0$.

Il nous paraît inutile d'insister sur ce point que toute solution qui ne comporte pas un périmètre limité n'est pas admissible.