JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE SOURANDER

Sur l'équation dont dépendent les inégalités séculaires des planètes

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 5 (1879), p. 195-208.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1879_3_5__195_0>

Sur l'équation dont dépendent les inégalités séculaires des planètes.

PAR M. ÉMILE SOURANDER.

Cette équation, de la forme

$$\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-x \end{vmatrix} = 0,$$

où

$$a_{ik} = a_{ki},$$

fut rencontrée pour la première fois par Laplace [1], dans ses recherches sur les mouvements des planètes.

Lorsque n est égal à 3, elle devient

$$\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-x & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-x \end{vmatrix} = 0,$$

équation qui détermine les axes principaux des surfaces du second ordre, les forces élastiques principales et les moments principaux d'inertie des corps.

La réalité des racines de l'équation précédente fut prouvée par La-

---

[1] *Mémoires de l'Académie de Paris*, année 1772, p. 343.

grange [1]. D'autres démonstrations, s'étendant au cas général, ont été données par Cauchy [2] et Jacobi [3] et plus tard par MM. Sylvester [4] et Grunert [5].

La réalité des racines de l'équation qui détermine les axes principaux des lignes du second ordre

$$\begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - x \end{vmatrix} = 0$$

étant évidente par la décomposition en carrés de son discriminant,

$$(x_1 - x_2)^2 = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2,$$

M. Kummer [6], par la voie du tâtonnement, parvint le premier à une décomposition analogue du discriminant de l'équation cubique.

Bientôt après M. Borchardt [7], à l'aide de quelques théorèmes sur les déterminants de Vandermonde, Jacobi et Cauchy, décomposa en carrés le discriminant de l'équation générale.

D'autres méthodes encore, pour l'équation du troisième degré, ont été données par Hesse [8], en se servant de quelques formules de Jacobi [9], et plus récemment par MM. Bauer [10] et Geyser [11]. La méthode de Hesse se fonde sur les substitutions orthogonales, et celle de M. Bauer sur les propriétés des déterminants, tandis que M. Geyser arrive au but en prenant pour point de départ quelques considérations géométriques.

Tous ces travaux, et surtout ceux de Hesse [12], attestent assez le vif

[1] *Mémoires de l'Académie de Berlin,* année 1773, p. 85.
[2] *Exercices de Mathématiques,* t. IV, p. 140; 1829.
[3] *Journal de Crelle,* t. XII, p. 1; 1834.
[4] *Philosophical Magazine,* t. II, p. 138; 1852.
[5] *Archiv der Mathematik von Grunert,* t. XXIX, p. 442; 1857.
[6] *Journal de Crelle,* t. XXVI, p. 268; 1843.
[7] *Journal de Crelle,* t. XXX, p. 38; 1846. Ce journal, t. XII, p. 50; 1847.
[8] *Vorlesungen über anal. Geom. des Raumes,* p. 320; 1861.
[9] *Journal de Crelle,* t. XXX, p. 46; 1846.
[10] *Journal de Crelle,* t. LXXI, p. 40; 1870.
[11] *Journal de Crelle,* t. LXXXII, p. 47; 1877.
[12] *Vorlesungen über anal. Geom. des Raumes,* p. 279; 1869.

intérêt que ce problème a su éveiller. Je ne crois donc pas inopportun d'ajouter aux précédentes une méthode générale qui me paraît plus directe, et dont les résultats se présentent sous une forme abrégée et plus simple.

J'exprimerai d'abord, à l'aide des coefficients de l'équation

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0, \tag{1}$$

la fonction critique D de ses racines, définie par l'égalité

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{D} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)&\ldots(x_n - x_1) \\ (x_3 - x_2)&\ldots(x_n - x_2) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &(x_n - x_{n-1}). \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Son discriminant, obtenu par la méthode dialytique de M. Sylvester, pourra s'écrire

$$\begin{vmatrix} a_1 & 2a_2 & \ldots & (n-1)a_{n-1} & na_n & 0 & \ldots & 0 \\ na_0 & (n-1)a_1 & \ldots & 2a_{n-2} & a_{n-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & \ldots & (n-2)a_{n-2} & (n-1)a_{n-1} & na_n & \ldots & 0 \\ 0 & na_0 & \ldots & 3a_{n-3} & 2a_{n-2} & a_{n-1} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_1 & 2a_2 & 3a_3 & \ldots & na_n \\ 0 & 0 & \ldots & na_0 & (n-1)a_1 & (n-2)a_2 & \ldots & a_{n-1} \end{vmatrix},$$

et par celle de Bézout,

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1,n-1} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & \ldots & c_{n-1,n-1} \end{vmatrix},$$

où

$$c_{ik} = d_{i-1,k} + d_{i-2,k+1} + \ldots + d_{0,i+k-1} = c_{ki} \tag{3}$$

et

$$d_{ik} = (i+1)(n-k)a_{i+1}a_k - (k+1)(n-i)a_{k+1}a_i. \tag{4}$$

Le dernier discriminant peut aussi se déduire du premier, comme l'a montré M. Baltzer dans son Traité des déterminants.

En désignant ces déterminants par R, nous aurons maintenant la relation

$$n^{n-2}a_n^{2n-2}\mathrm{D}^2 = \mathrm{R}. \tag{5}$$

Pour le démontrer, je suppose égaux à zéro tous les coefficients, excepté a_0 et a_n. Les déterminants R deviennent par là

$$\mathrm{R} = (-1)^{\binom{n}{2}} n^{2n-2}(a_0 a_n)^{n-1}. \tag{6}$$

Par suite d'un théorème connu de Cauchy, D peut encore s'écrire

$$\begin{vmatrix} x_1^0 & x_2^0 & \dots & x_n^0 \\ x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix};$$

d'où, en élevant au carré l'égalité due à M. Cayley,

$$\mathrm{D}^2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix}, \tag{7}$$

dans laquelle

$$s_m = \sum_{i=1}^{i=n} x_i^m. \tag{8}$$

Ce déterminant se réduit, par la même supposition, à l'aide des identités de Newton, à

$$\mathrm{D}^2 = (-1)^{\binom{n}{2}} n^n \left(\frac{a_0}{a_n}\right)^{n-1}. \tag{9}$$

Nous savons aussi, par les recherches d'Euler sur les résultantes, que D^2 et R ne diffèrent que par un facteur, fonction de a_n. Les valeurs particulières que nous venons d'obtenir vérifient donc la relation énoncée.

Désignons à présent par δ le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

et par $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots$ les déterminants complémentaires des éléments a_{11}, $a_{12}, \ldots$, ce qui nous permet d'écrire l'équation cubique

$$(10)\qquad \delta - (\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33})x + (a_{11} + a_{22} + a_{33})x^2 - x^3 = 0,$$

et identifions cette équation avec la suivante :

$$(11)\qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = 0,$$

qui a pour discriminant, d'après les formules données plus haut,

$$(12)\qquad 3a_3^4 D^2 = \begin{vmatrix} 2(a_1 a_1 - 3a_0 a_2) & (a_1 a_2 - 9a_0 a_3) \\ (a_1 a_2 - 9a_0 a_3) & 2(a_2 a_2 - 3a_1 a_3) \end{vmatrix}.$$

Avec les notations

$$(13)\qquad \left\{ \begin{aligned} a_{14} &= \frac{a_{22} - a_{33}}{\sqrt{6}}, & \alpha_{14} &= \frac{\alpha_{22} - \alpha_{33}}{\sqrt{6}}, \\ a_{24} &= \frac{a_{33} - a_{11}}{\sqrt{6}}, & \alpha_{24} &= \frac{\alpha_{33} - \alpha_{11}}{\sqrt{6}}, \\ a_{34} &= \frac{a_{11} - a_{22}}{\sqrt{6}}, & \alpha_{34} &= \frac{\alpha_{11} - \alpha_{22}}{\sqrt{6}}, \end{aligned} \right.$$

nous aurons d'abord

$$(14)\qquad \left\{ \begin{aligned} a_2 a_2 - 3a_1 a_3 &= (a_{11} + a_{22} + a_{33})^2 \\ &\qquad - 3(a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - a_{12}^2 - a_{13}^2 - a_{23}^2) \\ &= 3(a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2 + a_{23}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2). \end{aligned} \right.$$

Le théorème de Jacobi, s'exprimant par la formule

$$P\frac{d^2P}{da_{rs}da_{r_1s_1}} = \frac{dP}{da_{rs}}\frac{dP}{da_{r_1s_1}} - \frac{dP}{da_{r_1s}}\frac{dP}{da_{rs_1}},$$

nous donne aussi

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} \delta &= \frac{\alpha_{22}\alpha_{33}-\alpha_{23}^2}{a_{11}} = \frac{\alpha_{33}\alpha_{11}-\alpha_{31}^2}{a_{22}} = \frac{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}^2}{a_{33}} \\ &= \frac{\alpha_{11}\alpha_{22}+\alpha_{11}\alpha_{33}+\alpha_{22}\alpha_{33}-\alpha_{12}^2-\alpha_{13}^2-\alpha_{23}^2}{a_{11}+a_{22}+a_{33}}. \end{aligned}\right.$$

La dernière expression s'obtient en additionnant les numérateurs ainsi que les dénominateurs des fractions précédentes, procédé d'Euclide qui pourrait faciliter bien des recherches, comme le remarque M. Lindelöf dans son *Traité de Géométrie analytique.*

En développant le déterminant δ, d'après un autre théorème connu, nous obtiendrons

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} \delta &= a_{11}\alpha_{11}+a_{21}\alpha_{21}+a_{31}\alpha_{31} = a_{12}\alpha_{12}+a_{22}\alpha_{22}+a_{32}\alpha_{32} \\ &= a_{13}\alpha_{13}+a_{23}\alpha_{23}+a_{33}\alpha_{33} \\ &= \frac{a_{11}\alpha_{11}+a_{22}\alpha_{22}+a_{33}\alpha_{33}+2a_{12}\alpha_{12}+2a_{13}\alpha_{13}+2a_{23}\alpha_{23}}{3}. \end{aligned}\right.$$

Cette expression résulterait également de l'application du théorème d'Euler sur les fonctions homogènes.

Les développements précédents nous donnent encore

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} a_1a_1-3a_0a_2 &= (\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33})^2 \\ &\quad -3(\alpha_{11}\alpha_{22}+\alpha_{11}\alpha_{33}+\alpha_{22}\alpha_{33}-\alpha_{12}^2-\alpha_{13}^2-\alpha_{23}^2) \\ &= 3(\alpha_{12}^2+\alpha_{13}^2+\alpha_{14}^2+\alpha_{23}^2+\alpha_{24}^2+\alpha_{34}^2), \end{aligned}\right.$$

et

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &a_1a_2-9a_0a_3 \\ &\quad = 3(a_{11}\alpha_{11}+a_{22}\alpha_{22}+a_{33}\alpha_{33}+2a_{12}\alpha_{12}+2a_{13}\alpha_{13}+2a_{23}\alpha_{23}) \\ &\qquad -(a_{11}+a_{22}+a_{33})(\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33}) \\ &\quad = 6(a_{12}\alpha_{12}+a_{13}\alpha_{13}+a_{14}\alpha_{14}+a_{23}\alpha_{23}+a_{24}\alpha_{24}+a_{34}\alpha_{34}). \end{aligned}\right.$$

A l'aide des relations (14), (18) et (19), l'égalité (12) devient

$$\frac{D^2}{12} = \begin{vmatrix} a_{12}a_{12} + a_{13}a_{13} + a_{14}a_{14} + a_{23}a_{23} + a_{24}a_{24} + a_{34}a_{34} & a_{12}\alpha_{12} + a_{13}\alpha_{13} + a_{14}\alpha_{14} + a_{23}\alpha_{23} + a_{24}\alpha \\ a_{12}\alpha_{12} + a_{13}\alpha_{13} + a_{14}\alpha_{14} + a_{23}\alpha_{23} + a_{24}\alpha_{24} + a_{34}\alpha_{34} & \alpha_{12}\alpha_{12} + \alpha_{13}\alpha_{13} + \alpha_{14}\alpha_{14} + \alpha_{23}\alpha_{23} + \alpha_{24}\alpha \end{vmatrix}$$

Ce déterminant est composé de deux systèmes égaux :

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{23} & a_{24} & a_{34} \\ \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{34} \end{vmatrix}$$

et peut par conséquent, d'après le théorème de Binet et Cauchy, se mettre sous la forme

$$\frac{D^2}{12} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{23} & a_{24} & a_{34} \\ \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{34} \end{vmatrix}^2, \tag{21}$$

notation qui est due à M. Baltzer, et qui équivaut à la somme des carrés des quinze déterminants que l'on obtient en combinant les six colonnes deux à deux.

Si, pour abréger, nous désignons, à l'exemple de M. Bauer, par $(a_{13}\alpha_{23})\ldots$ les déterminants

$$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} \end{vmatrix}, \quad \ldots,$$

ces carrés seront

$$(22)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{D^2}{12} = {} & (a_{13}\alpha_{23})^2 + (a_{23}\alpha_{12})^2 + (a_{12}\alpha_{13})^2 + (a_{12}\alpha_{34})^2 \\ & + (a_{13}\alpha_{24})^2 + (a_{23}\alpha_{14})^2 + (a_{12}\alpha_{14})^2 + (a_{13}\alpha_{34})^2 \\ & + (a_{23}\alpha_{24})^2 + (a_{12}\alpha_{24})^2 + (a_{13}\alpha_{14})^2 + (a_{23}\alpha_{34})^2 \\ & + (a_{14}\alpha_{24})^2 + (a_{24}\alpha_{14})^2 + (a_{24}\alpha_{34})^2. \end{aligned} \right.$$

Pour simplifier, le système (13) nous offre d'abord les identités

$$(23)\quad \left\{ \begin{aligned} a_{14} + a_{24} + a_{34} &= 0, \\ \alpha_{14} + \alpha_{24} + \alpha_{34} &= 0, \end{aligned} \right.$$

et par là

$$(a_{14}\alpha_{24}) = (a_{34}\alpha_{14}) = (a_{24}\alpha_{34}), \tag{24}$$

à l'aide desquelles le discriminant se réduit à treize carrés, forme sous laquelle l'a mis M. Borchardt.

Les développements

$$(25)\quad \begin{cases} a_{12}\alpha_{11} + a_{22}\alpha_{21} + a_{32}\alpha_{31} = 0, \\ a_{11}\alpha_{12} + a_{21}\alpha_{22} + a_{31}\alpha_{32} = 0, \\ a_{11}\alpha_{13} + a_{21}\alpha_{23} + a_{31}\alpha_{33} = 0, \\ a_{13}\alpha_{11} + a_{23}\alpha_{21} + a_{33}\alpha_{31} = 0, \\ a_{13}\alpha_{12} + a_{23}\alpha_{22} + a_{33}\alpha_{32} = 0, \\ a_{12}\alpha_{13} + a_{22}\alpha_{23} + a_{32}\alpha_{33} = 0 \end{cases}$$

nous conduisent ensuite aux relations, rapportées par M. Bauer,

$$(26)\quad \begin{cases} (a_{12}\alpha_{34}) = \dfrac{(a_{13}\alpha_{23})}{\sqrt{6}}, \\ (a_{13}\alpha_{24}) = \dfrac{(a_{23}\alpha_{12})}{\sqrt{6}}, \\ (a_{23}\alpha_{14}) = \dfrac{(a_{12}\alpha_{13})}{\sqrt{6}}, \end{cases}$$

et qui réduisent le discriminant à la forme de dix carrés que lui a donnée ce savant.

Par suite des identités (23), nous aurons encore

$$(27)\quad \begin{cases} (a_{12}\alpha_{14}) + (a_{12}\alpha_{24}) + (a_{12}\alpha_{34}) = 0, \\ (a_{13}\alpha_{14}) + (a_{13}\alpha_{24}) + (a_{13}\alpha_{34}) = 0, \\ (a_{23}\alpha_{14}) + (a_{23}\alpha_{24}) + (a_{23}\alpha_{34}) = 0. \end{cases}$$

Moyennant ces relations, trouvées par Hesse, le discriminant se met enfin sous la forme de sept carrés de M. Kummer.

Quand le discriminant de l'équation cubique s'évanouit, le lieu géométrique, en coordonnées rectangulaires, de l'équation

$$(28)\quad \begin{cases} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz \\ \qquad + 2a_{12}xy + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \end{cases}$$

est une surface de révolution du second ordre, dont nous obtenons les caractères analytiques en égalant à zéro deux des trois premiers carrés (22).

Pour le démontrer, nous avons l'identité suivante, rapportée par M. Bauer,

$$(29)\qquad a_{12}(a_{13}\alpha_{23}) + a_{13}(a_{23}\alpha_{12}) + a_{23}(a_{12}\alpha_{13}) = 0,$$

et de là, par un changement partiel des indices,

$$(30)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_{12}(a_{14}\alpha_{23}) + a_{14}(a_{23}\alpha_{12}) + a_{23}(a_{12}\alpha_{14}) = 0, \\ a_{12}(a_{13}\alpha_{34}) + a_{13}(a_{34}\alpha_{12}) + a_{34}(a_{12}\alpha_{13}) = 0, \\ a_{24}(a_{13}\alpha_{23}) + a_{13}(a_{23}\alpha_{24}) + a_{23}(a_{24}\alpha_{13}) = 0 \end{array}\right.$$

et

$$(31)\qquad a_{34}(a_{13}\alpha_{14}) + a_{13}(a_{14}\alpha_{34}) + a_{14}(a_{34}\alpha_{13}) = 0.$$

Ces relations et les formules (24), (26) et (27) font voir que tous les autres carrés s'évanouissent en même temps.

Les conditions analytiques des surfaces du second ordre peuvent donc s'écrire

$$(32)\qquad \frac{\alpha_{12}}{a_{12}} = \frac{\alpha_{13}}{a_{13}} = \frac{\alpha_{23}}{a_{23}}.$$

Si un seul des coefficients a_{12}, a_{13}, a_{23} était nul, les trois premiers carrés et le discriminant ne pourraient s'évanouir. Dans les autres cas, l'égalité (22) nous donne

$$(33)\ \left\{\begin{array}{ll} a_{12}=a_{13}=0, & D^2=[(a_{22}-a_{33})^2+4a_{23}^2][(a_{33}-a_{11})(a_{11}-a_{22})+a_{23}^2]^2, \\ a_{12}=a_{23}=0, & D^2=[(a_{33}-a_{11})^2+4a_{13}^2][(a_{11}-a_{22})(a_{22}-a_{33})+a_{13}^2]^2, \\ a_{13}=a_{23}=0, & D^2=[(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2][(a_{22}-a_{33})(a_{33}-a_{11})+a_{12}^2]^2 \end{array}\right.$$

et

$$(34)\ a_{12}=a_{13}=a_{23}=0,\quad D^2=[(a_{11}-a_{22})(a_{11}-a_{33})(a_{22}-a_{33})]^2,$$

d'où les conditions

$$(35)\qquad \left\{\begin{array}{ll} a_{12}=a_{13}=0, & (a_{33}-a_{11})(a_{11}-a_{22})+a_{23}^2=0, \\ a_{12}=a_{23}=0, & (a_{11}-a_{22})(a_{22}-a_{33})+a_{13}^2=0, \\ a_{13}=a_{23}=0, & (a_{22}-a_{33})(a_{33}-a_{11})+a_{12}^2=0 \end{array}\right.$$

et

$$(36)\ a_{12}=a_{13}=a_{23}=0,\quad (a_{11}-a_{22})(a_{11}-a_{33})(a_{22}-a_{33})=0.$$

Toutes ces conditions sont rapportées pour la première fois par Bourdon et Mondot [*].

Les égalités (26) font voir encore que le discriminant s'évanouit avec les a_{14}, a_{24}, a_{34}, α_{14}, α_{24}, α_{34}, d'où résultent les conditions particulières

$$(37) \qquad a_{11} = a_{22} = a_{33}, \quad a_{12}^2 = a_{13}^2 = a_{23}^2.$$

Échangeons à présent la notation du système (13) contre

$$(38) \qquad \begin{cases} {}_{ik}a = \dfrac{a_{ii} - a_{kk}}{\sqrt{6}}, \\ {}_{ik}\alpha = \dfrac{\alpha_{ii} - \alpha_{kk}}{\sqrt{6}}. \end{cases}$$

L'égalité (21) devient par là

$$(39) \qquad \frac{D^2}{12} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{23} & {}_{12}a & {}_{13}a & {}_{23}a \\ \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{23} & {}_{12}\alpha & {}_{13}\alpha & {}_{23}\alpha \end{vmatrix}^2.$$

En multipliant la première ligne de ce système par a_{2}, et en l'additionnant avec la seconde ligne, ce qui évidemment ne change pas la valeur du système, nous obtiendrons

$$(40) \qquad \frac{D^2}{12} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{23} & {}_{12}a & {}_{13}a & {}_{23}a \\ a''_{12} & a''_{13} & a''_{23} & {}_{12}a'' & {}_{13}a'' & {}_{23}a'' \end{vmatrix}^2,$$

où

$$(41) \qquad \begin{cases} a''_{ik} = \displaystyle\sum_{s=1}^{s=3} a_{is}\, a_{sk} = a''_{ki}, \\ {}_{ik}a'' = \dfrac{a''_{ii} - a''_{kk}}{\sqrt{6}}. \end{cases}$$

Le procédé qui nous a permis de décomposer en carrés le discriminant de l'équation cubique, et qui s'appliquerait facilement à l'équa-

[*] *Correspondance sur l'École Polyt.*, t. II, p. 196 et 205; 1811.

tion du quatrième degré, pourrait sans doute être étendu au cas général. Je démontrerai ici que le discriminant de l'équation générale sera susceptible d'une décomposition analogue à celle de la formule (40).

Multiplions à cet effet par s_0 toutes les colonnes, excepté la première, du déterminant

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix},$$

et divisons sa première ligne par le même élément; l'égalité (7) devient par là

$$(42)\qquad n^{n-2}D^2 = \begin{vmatrix} 1 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_0 s_2 & s_0 s_3 & \dots & s_0 s_n \\ s_2 & s_0 s_3 & s_0 s_n & \dots & s_0 s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_0 s_n & s_0 s_{n+1} & \dots & s_0 s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

Si nous multiplions successivement par s_1, s_2, s_{n-1} la première colonne du nouveau déterminant, et que nous la soustrayions des colonnes correspondantes, celui-ci prendra la forme

$$(43)\quad n^{n-2}D^2 = \begin{vmatrix} (s_0 s_2 - s_1 s_1) & (s_0 s_3 - s_1 s_2) & \dots & (s_0 s_n - s_1 s_{n-1}) \\ (s_0 s_3 - s_2 s_1) & (s_0 s_4 - s_2 s_2) & \dots & (s_0 s_{n+1} - s_2 s_{n-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (s_0 s_n - s_{n-1} s_1) & (s_0 s_{n+1} - s_{n-1} s_2) & \dots & (s_0 s_{2n-2} - s_{n-1} s_{n-1}) \end{vmatrix}.$$

En désignant par δ le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

et par $a_{ik}^{(m)}$ les éléments du déterminant δ^m, nous aurons aussi

$$(44)\qquad a_{ik}^{(m)} = \sum_{s=1}^{s=n} a_{is}^{(r)} a_{sk}^{(m-r)} = a_{ki}^{(m)},$$

où r est un nombre quelconque de zéro à m, et $a_{ik}^{(0)}$ 1 ou 0 selon que i est égal ou non à k, hypothèse qui satisfait à l'égalité

$$(45)\qquad \delta^0 = 1.$$

En mettant $a_{ii}^{(m)} - x$ à la place de $a_{ii}^{(m)}$ dans le déterminant δ^m, nous obtiendrons ensuite une équation qui a pour racines, comme l'a montré M. Borchardt, les $m^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de l'équation générale; d'où

$$(46)\qquad s_m = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ii}^{(m)} = \sum_{i,k=1}^{i,k=n} a_{ik}^{(r)} a_{ik}^{(m-r)}.$$

Ces formules sont dues à M. Borchardt, et la voie par laquelle nous les obtenons ici, à une remarque de M. Henrici [1].

A l'aide de ces formules, chaque élément du déterminant (43) sera représenté par

$$(47)\qquad s_0 s_{p+q} - s_p s_q = \begin{vmatrix} \Sigma a_{ik}^{(0)} a_{ik}^{(0)} & \Sigma a_{ik}^{(0)} a_{ik}^{(q)} \\ \Sigma a_{ik}^{(p)} a_{ik}^{(0)} & \Sigma a_{ik}^{(p)} a_{ik}^{(q)} \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant est composé des systèmes

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{11}^{(p)} & a_{22}^{(p)} & a_{33}^{(p)} & \dots & a_{12}^{(p)} & a_{13}^{(p)} & a_{23}^{(p)} & \dots & a_{12}^{(p)} & a_{13}^{(p)} & a_{23}^{(p)} & \dots \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{11}^{(q)} & a_{22}^{(q)} & a_{33}^{(q)} & \dots & a_{12}^{(q)} & a_{13}^{(q)} & a_{23}^{(q)} & \dots & a_{12}^{(q)} & a_{13}^{(q)} & a_{23}^{(q)} & \dots \end{vmatrix};$$

en y appliquant le théorème de Binet et Cauchy, nous aurons donc

$$(48)\quad \left\{ \begin{aligned} s_0 s_{p+q} - s_p s_q = 2n(& a_{12}^{(p)} a_{12}^{(q)} + a_{13}^{(p)} a_{13}^{(q)} + a_{23}^{(p)} a_{23}^{(q)} + \dots \\ & + {}_{12}a^{(p)}{}_{12}a^{(q)} + {}_{13}a^{(p)}{}_{13}a^{(q)} + {}_{23}a^{(p)}{}_{23}a^{(q)} + \dots), \end{aligned} \right.$$

[1] *Journal de Crelle*, t. LXV, p. 18; 1866.

où

$$(49)\qquad {}_{ik}a^{(m)} = \frac{a_{ii}^{(m)} - a_{kk}^{(m)}}{\sqrt{2n}}.$$

La dernière formule et celle de (44) correspondent aux formules (41).

Si l'on désigne par $\Sigma a^{(p)} a^{(q)}$ l'expression (48), débarrassée du facteur $2n$, l'égalité (43) pourra s'écrire

$$(50)\qquad \frac{D^2}{n2^{n-1}} = \begin{vmatrix} \Sigma a'a' & \Sigma a'a'' & \ldots & \Sigma a'a^{(n-1)} \\ \Sigma a''a' & \Sigma a''a'' & \ldots & \Sigma a''a^{(n-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Sigma a^{(n-1)}a' & \Sigma a^{(n-1)}a'' & \ldots & \Sigma a^{(n-1)}a^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant, composé de deux systèmes égaux,

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{23} & \ldots & {}_{12}a & {}_{13}a & {}_{23}a & \ldots \\ a''_{12} & a''_{13} & a''_{23} & \ldots & {}_{12}a'' & {}_{13}a'' & {}_{23}a'' & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{12}^{(n-1)} & a_{13}^{(n-1)} & a_{23}^{(n-1)} & \ldots & {}_{12}a^{(n-1)} & {}_{13}a^{(n-1)} & {}_{23}a^{(n-1)} & \ldots \end{vmatrix},$$

devient enfin, à l'aide du même théorème,

$$(51)\qquad \frac{D^2}{n2^{n-1}} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{23} & \ldots & {}_{12}a & {}_{13}a & {}_{23}a & \ldots \\ a''_{12} & a''_{13} & a''_{23} & \ldots & {}_{12}a'' & {}_{13}a'' & {}_{23}a'' & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{12}^{(n-1)} & a_{13}^{(n-1)} & a_{23}^{(n-1)} & \ldots & {}_{12}a^{(n-1)} & {}_{13}a^{(n-1)} & {}_{23}a^{(n-1)} & \ldots \end{vmatrix}^2,$$

où le nombre des carrés sera $\binom{n(n-1)}{n-1}$, tandis que les carrés qu'il faut former en suivant la méthode de M. Borchardt sont au nombre de $\binom{nn}{n}$.

M. Borchardt, à l'occasion de ce problème, a montré encore que les fonctions auxiliaires de Sturm pouvaient être remplacées par la série

$$p_1,\quad p_2,\quad \ldots,\quad p_n,$$

où

$$(52)\qquad p_m = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{m-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{m-1} & s_m & \ldots & s_{2m-2} \end{vmatrix}.$$

et le procédé exposé plus haut nous donne sans peine

$$(53)\quad \frac{p_m}{n\,2^{m-1}} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{23} & \cdots & {}_{12}a & {}_{13}a & {}_{23}a & \cdots \\ a''_{12} & a''_{13} & a''_{23} & \cdots & {}_{12}a'' & {}_{13}a'' & {}_{23}a'' & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^{(m-1)}_{12} & a^{(m-1)}_{13} & a^{(m-1)}_{23} & \cdots & {}_{12}a^{(m-1)} & {}_{13}a^{(m-1)} & {}_{23}a^{(m-1)} & \cdots \end{vmatrix}^2.$$