JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BOUSSINESQ

# Complément à une étude de 1871 sur la théorie de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques dont certaines dimensions sont très-petites par rapport à d'autres

*Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série*, tome 5 (1879), p. 163-194.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1879_3_5__163_0>

# *Complément à une étude de 1871 sur la théorie de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques dont certaines dimensions sont très-petites par rapport à d'autres* [*].

**PAR M. J. BOUSSINESQ.**

## I. — CARACTÈRE DISTINCTIF DES MODES D'ÉQUILIBRE QUE PRÉSENTENT LES CORPS TRÈS-ALLONGÉS OU TRÈS-APLATIS (TIGES ET PLAQUES).

**1.** L'équilibre statique ou dynamique d'une tige et d'une plaque présente un caractère important, tenant à la forme même, très-allongée ou très-aplatie, de ces corps, et qui permet d'en donner une théorie approchée beaucoup plus simple que la théorie générale de l'élasticité des solides.

Concevons la tige ou la plaque divisée en tronçons sensiblement prismatiques, dont chacun, limité par la surface même du corps et par un couple de plans parallèles menés à peu près normalement à cette surface, dans le cas d'une tige, ou par deux couples de plans pareils dans le cas d'une plaque, ait ses trois dimensions comparables entre elles. Deux tronçons voisins se trouveront dans des conditions à fort peu près pareilles, tant sous le rapport de leur position relativement à l'ensemble du système, à ses limites, aux surfaces de part et d'autre desquelles la constitution des tronçons varierait rapidement de l'un à l'autre, etc., que sous le rapport des forces extérieures appliquées à

[*] Étude insérée dans le Volume de 1871 du *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (2e série, t. XVI). Le complément actuel a pour but de simplifier et d'étendre les théories exposées dans cette Étude. Diverses circonstances en ont retardé la publication jusqu'à ce jour, quoique sa rédaction date de novembre 1876 (tant pour la partie imprimée ici, dans les nos de mai et juin, que pour celle qui concerne les plaques et qui, je l'espère, suivra très-prochainement).

la masse et à la superficie de la tige ou de la plaque. Il n'y aura d'exceptions que pour des régions relativement peu étendues, voisines de points présentant quelque particularité, comme seront, par exemple, les extrémités d'une tige, le contour d'une plaque, les points d'application de forces extérieures exceptionnellement grandes. Si donc on fait abstraction de ces régions restreintes, l'équilibre d'un tronçon quelconque à fort peu près prismatique présentera cette circonstance, que les composantes N, T des pressions et les déformations $\partial, g$ y seront sensiblement les mêmes, soit tout le long d'une même *fibre longitudinale* perpendiculaire aux bases du prisme, s'il s'agit d'une tige, soit sur toute l'étendue d'une *couche* quelconque parallèle aux bases du prisme, s'il s'agit d'une plaque. Au contraire, les mêmes pressions et déformations varieront en général d'une manière très-notable dans les sens des dimensions transversales d'une tige ou dans celui de l'épaisseur d'une plaque. Il est d'ailleurs évident que les actions extérieures directement appliquées à la masse du tronçon (y compris l'inertie dans le cas d'un équilibre dynamique), et celles qui le sont à la portion de la superficie du corps qui fait partie de la surface du tronçon, n'ont qu'une influence minime sur les forces N, T, toutes ces actions n'étant presque rien en comparaison de celles qui agissent sur le reste du corps et dont l'ensemble donne lieu aux réactions intérieures N, T.

Les pressions se trouveront donc presque réparties, aux divers points d'un tronçon, comme elles le seraient dans un prisme droit sensiblement égal, d'une constitution peu différente de la sienne, et la même tout le long d'une perpendiculaire quelconque aux bases s'il s'agit d'un tronçon de tige, ou sur toute l'étendue d'un plan quelconque parallèle aux bases s'il s'agit d'un tronçon de plaque : la masse du prisme, et sa surface latérale dans le cas de la tige, ou ses bases dans le cas de la plaque, étant d'ailleurs supposées libres de toute action extérieure, tandis que sa matière serait sollicitée et déformée pareillement, soit tout le long d'une perpendiculaire aux bases, dans le premier cas, soit aux divers points d'un plan quelconque parallèle aux bases, dans le second.

De pareils modes simples d'équilibre d'un prisme devant servir de *type* à ceux que présentera une tige ou une plaque, c'est par eux que nous commencerons l'étude de chacune de ces deux espèces de corps.

## II. — Des modes d'équilibre d'un prisme qui servent de type a ceux d'un tronçon de tige.

**2.** Nous supposerons la contexture symétrique par rapport aux bases du prisme, c'est-à-dire par rapport aux sections normales de la tige, comme il arrivera toujours dans la pratique, et nous prendrons pour plan des $yz$ une de ces bases du prisme dans l'état primitif, pour axe des $x$ une perpendiculaire menée vers l'autre base. J'appellerai :

$\sigma$ toute section du prisme par un plan parallèle aux $yz$;
$\alpha$ l'angle que la normale à un élément de son contour, menée vers le dehors, fera avec l'axe des $y$;
$\frac{\pi}{2}-\alpha$ ou $\alpha-\frac{\pi}{2}$ l'angle que fera la même normale avec l'axe des $z$.

Les équations indéfinies de l'équilibre seront, avec les notations de Lamé, bien connues :

$$(1)\quad \frac{dT_3}{dy}+\frac{dT_2}{dz}=-\frac{dN_1}{dx},\quad \frac{dN_2}{dy}+\frac{dT_1}{dz}=-\frac{dT_3}{dx},\quad \frac{dT_1}{dy}+\frac{dN_3}{dz}=-\frac{dT_2}{dx}.$$

Il faudra y joindre les conditions spéciales au contour,

$$(2)\qquad (\text{sur le contour})\begin{cases} T_3\cos\alpha+T_2\sin\alpha=0,\\ N_2\cos\alpha+T_1\sin\alpha=0,\\ T_1\cos\alpha+N_3\sin\alpha=0,\end{cases}$$

conditions qui signifient que la surface latérale ne supporte aucune pression.

Dans le cas où le corps serait composé de plusieurs prismes de constitution différente accolés sur toute leur longueur, il y aurait à vérifier en outre, sur leur surface de séparation, six conditions spéciales exprimant, les unes, l'égalité des petits déplacements moléculaires $u$, $v$, $w$ des deux côtés de chaque élément de ces surfaces, les autres, l'égalité deux à deux, avec signes contraires, des composantes des pressions appliquées aux deux faces de l'élément superficiel considéré.

La contexture étant d'ailleurs symétrique par rapport au plan des

$yz$, les six déformations

$$(3)\qquad \begin{cases} \partial_x = \dfrac{du}{dx}, \quad \partial_y = \dfrac{dv}{dy}, \quad \partial_z = \dfrac{dw}{dz}, \\ g_{yz} = \dfrac{dv}{dz} + \dfrac{dw}{dy}, \quad g_{zx} = \dfrac{dw}{dx} + \dfrac{du}{dz}, \quad g_{xy} = \dfrac{du}{dy} + \dfrac{dv}{dx}, \end{cases}$$

dilatations et glissements éprouvés par des éléments matériels rectilignes menés primitivement parallèles aux axes à partir du point quelconque $(x, y, z)$, s'exprimeront en fonction des pressions N, T au moyen de formules de la forme

$$(4)\qquad \begin{cases} \partial_x = A(N_1 - \beta N_2 - \beta' N_3 - \beta'' T_1), \\ \partial_y = -\eta A N_1 + \text{trois termes en } N_2, N_3, T_1, \\ \partial_z = -\eta' A N_1 + \text{trois termes en } N_2, N_3, T_1, \\ g_{yz} = -\eta'' A N_1 + \text{trois termes en } N_2, N_3, T_1, \\ g_{zx} = G T_2 + H T_3, \\ g_{xy} = G' T_3 + H' T_2. \end{cases}$$

Les coefficients spécifiques A, $\beta$, $\beta'$, $\beta''$, ..., G, H, G', H' ne dépendront pas de $x$, à cause de l'homogénéité admise aux divers points de chacune des fibres parallèles aux $x$ d'un bout à l'autre du tronçon; mais ils varieront d'une manière quelconque en fonction de $y$, $z$. J'admettrai toutefois que les trois nombres $\eta$, $\eta'$, $\eta''$ soient constants; ce qui revient à supposer qu'*il s'agit d'une tige dont toutes les fibres, si on les isolait les unes des autres*, de manière à avoir

$$N_2 = 0, \quad N_3 = 0, \quad T_1 = 0,$$

*éprouveraient d'égales déformations latérales*

$$\partial_y = -\eta\partial_x, \quad \partial_z = -\eta'\partial_x, \quad g_{yz} = -\eta''\partial_x$$

*sous l'effet de tractions produisant sur toutes une même dilatation longitudinale* $\partial_x$.

**3.** On sait encore que l'expression

$$(5)\qquad N_1\partial_x + N_2\partial_y + N_3\partial_z + T_1 g_{yz} + T_2 g_{zx} + T_3 g_{xy},$$

homogène et du second degré en $N_1, N_2, \ldots, T_3$ quand on y remplace les $\partial$, $g$ par leurs valeurs (4), est essentiellement positive, à cause du fait de la consommation d'un certain travail par tout corps qu'on écarte de son état naturel. D'après les formules (4), nous pourrons dédoubler cette expression en deux autres, dont l'une ne contiendra que $T_2$, $T_3$ et l'autre que $N_1$, $N_2$, $N_3$, $T_1$.

Nous décomposerons celle-ci,

$$N_1\partial_x + N_2\partial_y + N_3\partial_z + T_1 g_{yz}, \tag{6}$$

en quatre carrés, de la manière suivante. Après avoir substitué à $\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_{yz}$ leurs valeurs (4), remarquons que A est $>$ o [vu que l'expression essentiellement positive (6) se réduit à $AN_1^2$ quand $N_2, N_3, T_1$ s'annulent]. Groupons ensemble les termes affectés de $N_1$, en y ajoutant d'ailleurs, pour le retrancher de l'autre groupe de termes, le carré $\frac{A}{4}[(\beta N_2 + \beta' N_3 + \beta'' T_1) + (\eta N_2 + \eta' N_3 + \eta'' T_1)]^2$. L'expression (6) se composera : 1° du carré

$$\frac{A}{4}[2N_1 - (\beta N_2 + \beta' N_3 + \beta'' T_1) - (\eta N_2 + \eta' N_3 + \eta'' T_1)]^2; \tag{7}$$

2° d'un polynôme homogène du second degré en $N_2$, $N_3$, $T_1$. Ce dernier devra rester positif pour toutes les valeurs de $N_2$, $N_3$, $T_1$, car l'expression (6) se réduit à cette seconde partie quand on prend

$$N_1 = \tfrac{1}{2}(\beta N_2 + \beta' N_3 + \beta'' T_1) + \tfrac{1}{2}(\eta N_2 + \eta' N_3 + \eta'' T_1).$$

En traitant le polynôme dont il s'agit comme il vient d'être fait pour l'expression proposée (6), on en extraira de même successivement trois carrés, qui contiendront : le premier, $N_2$, $N_3$, $T_1$ ; le deuxième, $N_3$, $T_1$ ; le troisième, $T_1$.

Le terme (7) peut encore s'écrire identiquement, à cause de la première formule (4),

$$\begin{aligned}
&\frac{A}{4}\left[\frac{\partial_x}{A} + (N_1 - \eta N_2 - \eta' N_3 - \eta'' T_1)\right]^2 \\
&\quad = \frac{A}{4}\left[\frac{\partial_x}{A} - (N_1 - \eta N_2 - \eta' N_3 - \eta'' T_1)\right]^2 + \partial_x(N_1 - \eta N_2 - \eta' N_3 - \eta'' T_1) \\
&\quad = \frac{A}{4}[(\eta - \beta)N_2 + (\eta' - \beta')N_3 + (\eta'' - \beta'')T_1]^2 \\
&\qquad + \partial_x N_1 - \partial_x(\eta N_2 + \eta' N_3 + \eta'' T_1).
\end{aligned}$$

Égalons l'expression (6) à ce dernier membre, augmenté, comme il a été dit, d'une somme de trois carrés, ayant la forme

$$\mathrm{b}(\mathrm{N}_2+\gamma\mathrm{N}_3+\gamma'\mathrm{T}_1)^2+\mathrm{c}(\mathrm{N}_3+\gamma''\mathrm{T}_1)^2+\mathrm{d}\mathrm{T}_1^2,$$

où b, c, d sont trois coefficients plus grands que zéro; puis supprimons de part et d'autre le terme $\mathrm{N}_1\partial_x$. Il viendra

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned}&\mathrm{N}_2\partial_y+\mathrm{N}_3\partial_z+\mathrm{T}_1 g_{yz}\\&\quad=\frac{\mathrm{A}}{4}[(\eta-\beta)\mathrm{N}_2+(\eta'-\beta')\mathrm{N}_3+(\eta''-\beta'')\mathrm{T}_1]^2\\&\quad\quad+\mathrm{b}(\mathrm{N}_2+\gamma\mathrm{N}_3+\gamma'\mathrm{T}_1)^2+\mathrm{c}(\mathrm{N}_3+\gamma''\mathrm{T}_1)^2+\mathrm{d}\mathrm{T}_1^2\\&\quad\quad-\partial_x(\eta\mathrm{N}_2+\eta'\mathrm{N}_3+\eta''\mathrm{T}_1).\end{aligned}\right.$$

4. Enfin, *la supposition, spéciale à notre problème, d'après laquelle l'état de la matière est le même en tous les points d'une parallèle à l'axe des $x$*, s'exprimera par les six relations

$$(9)\qquad \frac{d}{dx}(\mathrm{N}_1,\mathrm{N}_2,\mathrm{N}_3,\mathrm{T}_1,\mathrm{T}_2,\mathrm{T}_3)=0.$$

Nous nous contenterons d'abord d'admettre les cinq conditions suivantes, qu'entraînent les formules (9), mais qui sont moins particulières :

$$(9\ bis)\qquad \frac{d}{dx}(\mathrm{T}_3,\mathrm{T}_2)=0,\quad \frac{d^2}{dx^2}(\mathrm{N}_2,\mathrm{N}_3,\mathrm{T}_1)=0.$$

Les résultats auxquels nous arriverons ainsi pourront donc s'appliquer, non-seulement aux modes d'équilibre pour lesquels les relations (9) sont satisfaites, mais aussi à ceux pour lesquels ces relations (9) ne le sont pas, quoique les équations (9 *bis*) continuent à l'être. Ceux-ci seront les modes d'équilibre d'un tronçon de tige, dans le cas où l'on admettra que les forces tangentielles $\mathrm{T}_3$, $\mathrm{T}_2$ soient beaucoup plus petites que $\mathrm{N}_1$ et où l'on fera une étude de deuxième approximation du mode d'équilibre. Il est évident, en effet, qu'on aura, dans ce cas, une première approximation en annulant $\mathrm{T}_3$, $\mathrm{T}_2$ et supposant indépendantes de $x$ les autres forces N, T : par suite, une approximation plus élevée s'obtiendra en attribuant, d'une part, à $\mathrm{T}_3$, $\mathrm{T}_2$, de petites valeurs, relativement peu variables d'un bout à l'autre du tronçon ou qui aient leurs dérivées en $x$ assimilables à zéro, d'autre part, à $N_2$, $N_3$, $T_1$, des valeurs variables linéairement ou ayant leurs dérivées secondes en $x$ insensibles, comme il arrive pour toute fonction qu'on ne considère que dans une partie restreinte du *champ* total où se produisent ses variations. Ainsi *les modes d'équilibre vérifiant les relations* (9 *bis*) *seront toujours une première approximation de ceux que présentera un tronçon de tige; et ils en seront même une deuxième approximation, dans le cas où les composantes tangentielles*, $T_3$, $T_2$, *des pressions exercées sur les sections normales de la tige, n'égaleraient que de petites fractions de la composante normale correspondante* $N_1$.

Toutefois, les deux dernières équations indéfinies (1) et les deux dernières conditions spéciales (2) ne continueront alors à être admissibles, à la deuxième approximation, qu'autant que la forme du tronçon, à l'état naturel, différera assez peu de celle d'un prisme, et que les composantes transversales (dirigées suivant les $y$ et les $z$) des actions extérieures exercées sur la masse et sur la surface latérale du tronçon continueront à être négligeables, même à cette approximation, ou ne seront pas d'un ordre de grandeur plus élevé que les dérivées $\frac{d}{dx}(T_3, T_2)$. Quant à la première équation (1), il faudra généralement ajouter à son premier membre la composante suivant les $x$ de l'action extérieure exercée par unité de volume sur le tronçon, composante dont les dérivées par rapport à $x$ continueront seules à être négligeables.

5. Cela posé, on reconnaît, en différentiant par rapport à $x$ la première équation (1) ainsi complétée et tenant compte des deux premières conditions (9 *bis*), que la dérivée seconde de $N_1$ en $x$ s'annule. Comme il en est de même, d'après les trois dernières conditions (9 *bis*), des dérivées secondes en $x$ de $N_2$, $N_3$, $T_1$, les quatre premières formules (4) montrent qu'on a

$$\frac{d^2}{dx^2}(\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_{yz}) = 0. \tag{10}$$

Les deux dernières formules (4) donnent de même, grâce aux deux premières conditions (9 *bis*),

$$\frac{d}{dx}(g_{xy}, g_{zx}) = 0. \tag{10 bis}$$

Or celles-ci (10 *bis*), d'après les formules (3), reviennent à poser

$$(11) \qquad \frac{d\partial_x}{dy} = -\frac{d^2 v}{dx^2}, \quad \frac{d\partial_x}{dz} = -\frac{d^2 w}{dx^2}.$$

Les seconds membres de (11) varient avec continuité dans toute l'étendue d'une section normale $\sigma$ du prisme; car les déplacements $v$, $w$ sont égaux, à moins de rupture, de part et d'autre de la surface de séparation de deux tiges de constitution différente accolées, et, par suite, leurs dérivées secondes en $x$ sont aussi égales de part et d'autre. En outre, la dérivée en $y$ du second membre de la première (11) et la dérivée en $z$ du second membre de la deuxième (11) sont nulles, en vertu de deux des relations (10); de plus, les équations (11), respectivement différentiées, la première par rapport à $z$, la seconde par rapport à $y$, puis ajoutées, montrent, à cause de la quatrième (10), que l'on a $\frac{d^2\partial_x}{dy\,dz} = 0$. Par suite, les deux dérivées $\frac{d^2 v}{dx^2}$, $\frac{d^2 w}{dx^2}$ ne dépendent ni de $y$ ni de $z$ et ne varient pas d'un point à un autre d'une même section. Pour fixer les idées, je supposerai qu'on y mette les valeurs $v_0$, $w_0$ des déplacements transversaux $v$, $w$ pour $y = 0$, $z = 0$ : les dérivées considérées représenteront les courbures prises par les projections, sur le plan des $xy$ et sur celui des $xz$, d'une ligne matérielle primitivement droite et normale à une base du prisme ou du tronçon.

Les seconds membres de (11) étant ainsi constants aux divers points d'une même section $\sigma$ ou égaux à $-\frac{d^2 v_0}{dx^2}$, $-\frac{d^2 w_0}{dx^2}$, les équations (11), multipliées respectivement par $dy$, $dz$, puis ajoutées et intégrées en appelant $\partial_0$ la dilatation éprouvée par la fibre matérielle primitivement tangente à l'axe des $x$, donnent

$$(12) \qquad \partial_x = \partial_0 - \frac{d^2 v_0}{dx^2} y - \frac{d^2 w_0}{dx^2} z.$$

**6.** Cherchons maintenant les valeurs des forces élastiques $N_2$, $N_3$, $T_1$. Les deux premières relations (9 *bis*) changent la seconde et la troisième des équations indéfinies (1) en celles-ci :

$$(13) \qquad \frac{dN_2}{dy} + \frac{dT_1}{dz} = 0, \quad \frac{dT_1}{dy} + \frac{dN_3}{dz} = 0.$$

Multiplions-les respectivement par $V\,dy\,dz$, $W\,dy\,dz$, V, W désignant deux fonctions continues quelconques de $y$, $z$; puis ajoutons les résultats et intégrons dans toute l'étendue d'une section normale $\sigma$ du prisme, après avoir remplacé

$$V\left(\frac{dN_2}{dy}+\frac{dT_1}{dz}\right) \quad \text{par} \quad \frac{dVN_2}{dy}+\frac{dVT_1}{dz}-N_2\frac{dV}{dy}-T_1\frac{dV}{dz},$$
$$W\left(\frac{dT_1}{dy}+\frac{dN_3}{dz}\right) \quad \text{par} \quad \frac{dWT_1}{dy}+\frac{dWN_3}{dz}-T_1\frac{dW}{dy}-N_3\frac{dW}{dz}.$$

Une méthode bien connue permet de transformer les termes exactement intégrables une fois en des intégrales prises sur tout le contour limite $s'$ de chacune des régions à l'intérieur desquelles les variations de $N_2$, $N_3$, $T_1$ sont continues. Si $\int_{s'}$ désigne une intégrale prise tout le long de ce contour limite, $ds'$ un élément du même contour, $\alpha'$ l'angle que sa normale, menée hors de la région considérée, fait avec les $y$ positifs, les termes dont il s'agit donneront en tout, pour la région,

$$\int_{s'}[V(N_2\cos\alpha'+T_1\sin\alpha')+W(T_1\cos\alpha'+N_3\sin\alpha')]\,ds'.$$

En faisant la somme des résultats analogues pour toutes les régions composant la section $\sigma$, les deux éléments d'intégrale relatifs à un même arc $ds'$ contigu à deux régions seront égaux et contraires, en vertu des deux dernières conditions spéciales aux surfaces de séparation et à cause de la continuité supposée de V, W. D'autre part, les éléments d'intégrale se rapportant au contour libre de la section seront identiquement nuls, en vertu des deux dernières relations (2). Donc, si l'on représente par $d\sigma$ un élément quelconque de la section normale $\sigma$ du prisme, par $\int_\sigma$ une intégrale prise sur toute la section, et si l'on change les signes, il viendra simplement

$$(14) \qquad \int_\sigma\left[N_2\frac{dV}{dy}+N_3\frac{dW}{dz}+T_1\left(\frac{dV}{dz}+\frac{dW}{dy}\right)\right]d\sigma=0.$$

Posons successivement, dans cette formule :

$$1^\circ \quad W=0 \quad \text{et} \quad V=y,\ =z,\ =y^2,\ =yz,\ =z^2;$$
$$2^\circ \quad V=0 \quad \text{et} \quad W=z,\ =y,\ =z^2,\ =zy,\ =y^2.$$

Il viendra

$$\int_\sigma N_2 d\sigma = 0, \quad \int_\sigma T_1 d\sigma = 0, \quad \int_\sigma N_2 y\, d\sigma = 0,$$
$$\int_\sigma (N_2 z + T_1 y)\, d\sigma = 0, \quad \int_\sigma T_1 z\, d\sigma = 0;$$
$$\int_\sigma N_3 d\sigma = 0, \quad \int_\sigma T_1 d\sigma = 0, \quad \int_\sigma N_3 z\, d\sigma = 0,$$
$$\int_\sigma (N_3 y + T_1 z)\, d\sigma = 0, \quad \int_\sigma T_1 y\, d\sigma = 0.$$

Ces relations reviennent en tout à neuf, condensées dans la formule unique

(15) $$\int_\sigma (N_2, N_3 \text{ ou } T_1)(1, y \text{ ou } z)\, d\sigma = 0.$$

Posons encore $V = v$, $W = w$, et observons que les quantités $\frac{dv}{dy}$, $\frac{dw}{dz}$, $\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}$ ne sont autres que $\partial_y$, $\partial_z$, $g_{yz}$. La formule (14) donnera

(16) $$\int_\sigma (N_2 \partial_y + N_3 \partial_z + T_1 g_{yz})\, d\sigma = 0.$$

Nous pouvons remplacer dans celle-ci $N_2\partial_y + N_3\partial_z + T_1 g_{yz}$ par le second membre de (8) et remarquer d'ailleurs que, vu la valeur (12) de $\partial_x$, les formules (15) rendent nulles les intégrales

$$\int_\sigma \partial_x N_2\, d\sigma, \quad \int_\sigma \partial_x N_3\, d\sigma, \quad \int_\sigma \partial_x T_1\, d\sigma.$$

Les nombres $\eta$, $\eta'$, $\eta''$ étant constants, il viendra

(17) $$\left\{ \begin{aligned} &\int_\sigma \Big\{ \mathrm{d}T_1^2 + \mathrm{c}(N_3 + \gamma'' T_1)^2 + \mathrm{b}(N_2 + \gamma N_3 + \gamma' T_1)^2 \\ &\qquad + \frac{A}{4}[(\eta - \beta) N_2 + (\eta' - \beta') N_3 + (\eta'' - \beta'') T_1]^2 \Big\} d\sigma = 0. \end{aligned} \right.$$

L'intégrale qui constitue le premier membre de cette relation a chacun de ses éléments égal à la somme de quatre carrés; elle ne peut être nulle que si tous ces carrés s'annulent, c'est-à-dire si l'on a partout

(18) $$T_1 = 0, \quad N_3 = 0, \quad N_2 = 0.$$

Ces formules expriment que les composantes, suivant les $y$ et les $z$, de la pression mutuelle de deux fibres quelconques sont nulles : en d'autres termes, *chaque fibre longitudinale n'exerce sur ses voisines que des actions qui lui sont parallèles.*

**7.** Des six composantes N, T il ne subsiste plus que les trois $N_1$, $T_3$, $T_2$. La composante normale $N_1$ aura pour expression, d'après la première formule (4) et l'expression (12) de $\partial_x$, en appelant d'ailleurs E, suivant l'usage, le coefficient d'élasticité $\frac{1}{A}$,

$$(19) \qquad N_1 = \frac{1}{A}\partial_x = E\partial_x = E\left(\partial_0 - \frac{d^2 v_0}{dx^2}y - \frac{d^2 w_0}{dx^2}z\right).$$

De plus, la seconde, la troisième et la quatrième des relations (4) deviennent

$$(20) \qquad \left\{\begin{array}{l} \partial_y = -\eta\partial_x, \quad \partial_z = -\eta'\partial_x, \quad g_{yz} = -\eta''\partial_x, \\ \text{où} \\ \qquad\qquad \partial_x = \partial_0 - \dfrac{d^2 v_0}{dx^2}y - \dfrac{d^2 w_0}{dx^2}z. \end{array}\right.$$

Il est clair que ces valeurs de $\partial_y$, $\partial_z$, $g_{yz}$ définissent complétement le mode de déformation de chaque section normale $\sigma$ dans les sens parallèles à son plan primitif. A part une petite rotation qu'aura généralement éprouvée en outre la section $\sigma$, d'abscisse $x$, autour d'une fibre longitudinale dont on peut supposer que l'élément $dx$ coïncide constamment avec l'axe des $x$, on voit que la position de cette section déformée sera déterminée, quant à la projection de ses divers points sur un plan mené normalement à la fibre considérée par le point où celle-ci perce la section, en fonction de la dilatation $\partial_0$ de cette fibre au même point et des deux courbures $\frac{d^2 v_0}{dx^2}$, $\frac{d^2 w_0}{dx^2}$ qu'y présente, en projection sur deux plans rectangulaires des $xy$ et des $xz$, une ligne matérielle primitivement droite et tangente à la fibre.

Les deux courbures $\frac{d^2 v_0}{dx^2}$, $\frac{d^2 w_0}{dx^2}$ mesurent ce qu'on appelle les deux *flexions* éprouvées par le prisme sur la section considérée $\sigma$ et dans les sens respectifs des $y$ et des $z$. Quant à la dilatation $\partial_0$, elle exprime l'*extension* qu'a reçue, au point où elle perce cette section, la fibre dont un élément a été pris pour axe des $x$.

**8.** Bornons-nous actuellement aux modes d'équilibre qu'on peut considérer comme une première approximation de ceux que comporte un tronçon de tige, ou pour lesquels les relations (9) sont vérifiées. Nous aurons $\frac{dN_1}{dx}=0$; par suite, les trois fonctions de $x$, appelées $\partial_0$, $\frac{d^2v_0}{dx^2}$, $\frac{d^2w_0}{dx^2}$, que contient l'expression (19) de $N_1$, se réduiront à des constantes. Les déformations transversales $\partial_y$, $\partial_z$, $g_{yz}$ des sections normales seront également indépendantes de $x$, et les deux de ces sections qui correspondent aux abscisses $x$, $x+dx$ n'auront éprouvé, en projection sur un plan normal à l'élément de fibre, supposé pris pour axe des $x$, qui les joint, d'autre déplacement l'une par rapport à l'autre qu'une rotation infiniment petite $\theta dx$ de la seconde devant la première, autour de la projection de l'élément considéré de fibre. Les petits déplacements transversaux des points de la seconde de ces sections dépasseront donc ceux, $v$, $w$, des points pareils de la première, de quantités réductibles à $-z\theta\,dx, y\theta\,dx$; en sorte qu'on aura, pour cette abscisse particulière $x$, $\frac{dv}{dx}=-\theta z$, $\frac{dw}{dx}=\theta y$, et que les deux déformations $g_{xy}$, $g_{zx}$, qui sont encore à déterminer, admettront pour expressions, sur cette section particulière d'abscisse $x$,

$$(21) \qquad g_{xy}=\frac{du}{dy}-\theta z, \quad g_{zx}=\frac{du}{dz}+\theta y.$$

Il ne restera donc qu'à évaluer les variations de $u$, aux divers points de la section *considérée*, pour que le calcul de toutes les déformations $\partial$, $g$ éprouvées par le prisme et des pressions correspondantes N, T soit ramené à celui des quatre constantes $\partial_0$, $\frac{d^2v_0}{dx^2}$, $\frac{d^2w_0}{dx^2}$, $\theta$.

A cet effet, on portera dans la première équation indéfinie (1), devenue

$$(22) \qquad \frac{dT_3}{dy}+\frac{dT_2}{dz}=0,$$

ainsi que dans la première condition (2), $T_3\cos\alpha+T_2\sin\alpha=0$, spéciale au contour, et dans la condition analogue concernant les surfaces sur lesquelles la constitution de la matière changerait brusquement dans les sens transversaux, les expressions de $T_3$, $T_2$, en fonction de $g_{xy}$, $g_{zx}$, résultant des deux dernières équations (4); puis on substituera aux déformations $g_{xy}$, $g_{zx}$ leurs valeurs (21). Toutes ces équations ne contiendront plus alors d'autre fonction inconnue que le déplacement longitudinal $u$, continu en tous les points de la section considérée $\sigma$, et elles le détermineront complétement en $y$, $z$ si $\theta$ est supposé donné.

**9.** Avant de démontrer qu'il en est bien ainsi, établissons une relation qui nous sera utile. Multiplions (22) par $U d\sigma$, U désignant une fonction continue quelconque de $y$, $z$, et intégrons les résultats dans toute l'étendue de la section $\sigma$, après avoir remplacé $U\left(\frac{dT_3}{dy}+\frac{dT_2}{dz}\right)$ par $\frac{dUT_3}{dy}+\frac{dUT_2}{dz}-T_3\frac{dU}{dy}-T_2\frac{dU}{dz}$.

Le procédé employé pour obtenir la formule (14) donnera

$$\int_\sigma \left(T_3\frac{dU}{dy}+T_2\frac{dU}{dz}\right)d\sigma = 0. \tag{23}$$

Prenons d'abord soit $U = y$, soit $U = z$. Il vient

$$\int_\sigma T_3\,d\sigma = 0, \quad \int_\sigma T_2\,d\sigma = 0; \tag{24}$$

ce qui prouve que les composantes tangentielles $T_3 d\sigma$, $T_2 d\sigma$, suivant les $y$ et suivant les $z$, des pressions exercées sur les divers éléments $d\sigma$ d'une section normale ont leurs sommes respectives nulles. Ainsi, *ces forces tangentielles équivalent en tout à un simple couple.*

Si nous posons actuellement $U = u$, et que nous remplacions $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$ par leurs valeurs $g_{xy}+\theta z$, $g_{zx}-\theta y$ tirées de (21), la formule (23) donne

$$\int_\sigma (T_3 g_{xy}+T_2 g_{zx})\,d\sigma = \theta\int_\sigma (yT_2 - zT_3)\,d\sigma. \tag{25}$$

Le premier membre de celle-ci est essentiellement positif, car

$$T_3 g_{xy} + T_2 g_{zx}$$

constitue la seconde partie distincte de l'expression positive (5), dont la première partie, déjà considérée, n'est autre que (6); quant au second membre, il est le produit de la quantité $\theta$ par le moment total, $M_x = \int_\sigma (y T_2 - z T_3) d\sigma$, du couple résultant de toutes les forces $T_3 d\sigma$, $T_2 d\sigma$.

Démontrons maintenant que la valeur de $u$ sur la section considérée $\sigma$, d'abscisse $x$, est bien déterminée en fonction de $y$, $z$, à part une constante, qui s'annulera même si l'origine des coordonnées est, par exemple, prise et maintenue sur cette section $\sigma$. La forme, linéaire par rapport à $u$ et à $\theta$ (sans terme indépendant), des relations (21), (22) et des diverses conditions spéciales qu'on leur joint montre que, si une certaine valeur de $u$ les vérifie, et qu'on y remplace partout $u$ par $u + u'$, la fonction $u'$ seule les vérifiera aussi dans l'hypothèse $\theta = 0$. Par conséquent, appelons $g'_{xy}$, $g'_{zx}$, $T'_3$, $T'_2$ ce que deviennent $g_{xy}$, $g_{zx}$, $T_3$, $T_2$ lorsqu'on y pose $\theta = 0$, $u = u'$, et la formule (25) deviendra

$$\int_\sigma (T'_3 g'_{xy} + T'_2 g'_{zx}) d\sigma = 0;$$

ce qui entraîne forcément, pour tous les points du prisme, les relations $g'_{xy} = 0$, $g'_{xz} = 0$. Or les formules (21) donnent $g'_{xy} = \frac{du'}{dy}$, $g'_{xz} = \frac{du'}{dz}$, en sorte que $u'$ a bien ses dérivées en $y$, $z$ nulles ou se réduit à une constante pour toute la section considérée.

**10.** L'équation (22) et les conditions, spéciales aux surfaces limites, qu'on lui adjoint ne contiennent que le rapport $\frac{u}{\theta}$ lorsqu'on les divise par $\theta$. Par suite, les valeurs de $u$, celles de $g_{xy}$, $g_{zx}$, $T_3$, $T_2$ aux divers points, ainsi que le moment $M_x = \int_\sigma (y T_2 - z T_3) d\sigma$ du couple résultant, sont simplement proportionnelles à $\theta$; et le nombre $\theta$ est le même pour les sections normales successives du prisme, comme le sont, par hypothèse, les forces $T_3$, $T_2$. L'intégration de ce système d'équations (22), etc., pour chaque forme de section, permettra d'obtenir le moment du couple,

$$M_x = \int_\sigma (y T_2 - z T_3) d\sigma, \tag{26}$$

quand on connaîtra l'angle $\theta dx$ dont tourne, dans le sens de $Oy$ vers $Oz$, par rapport à la section normale d'abscisse primitive $x$ et autour d'un élément de fibre longitudinale émanant de la section pris pour axe des $x$, une seconde section normale située à la distance primitive $dx$ de la première. Le rapport $\theta$ de l'angle $\theta dx$ à la distance correspondante $dx$ mesure ce qu'on appelle la *torsion* du prisme par unité de longueur; $M_x$ est dit *moment* ou *couple de torsion*.

Les équations différentielles dont il s'agit, (21), (22), etc., ne cessent pas d'être satisfaites quand on y multiplie $y$, $z$, $dy$, $dz$ par un rapport constant de similitude $a$, pourvu qu'on multiplie en même temps $u$ par $a^2$, $g_{xy}$, $g_{xz}$, $T_3$, $T_2$ par $a$, et, en conséquence,

$$M_x = \int (y T_2 - z T_3) dy\, dz$$

par la quantité $a^4$, proportionnelle à $\sigma^2$. Ainsi, pour tous les prismes ayant leurs sections normales semblables et pareillement constitués aux points homologues, le moment de torsion $M_x$ est en raison directe du produit de la torsion $\theta$ par le carré de l'aire $\sigma$ de la section. Si l'on appelle $c$ une constante dépendant de la forme de la section et d'autant plus grande que les coefficients d'élasticité de glissement de la matière du prisme sont eux-mêmes plus grands, on aura

$$M_x = c\theta\sigma^2. \tag{27}$$

L'intégration donnant $T_3$, $T_2$, $M_x$ s'effectue le plus simplement possible, surtout quand la tige est homogène, par une méthode exposée aux §§ V et IX de mon Mémoire de 1871 *Sur les tiges*. Cette méthode montre l'extrême analogie qui existe entre les lois de la torsion et celles de l'écoulement bien continu d'un liquide dans un tube dont la paroi est mouillée par le liquide.

**11.** Si les composantes tangentielles $T_3 d\sigma$, $T_2 d\sigma$ de la pression appliquée aux divers points d'une section normale $\sigma$ du prisme équivalent en tout à un couple parallèle à la section et ayant pour moment $c\theta\sigma^2$, il est encore plus facile d'exprimer simplement la valeur statique totale des composantes normales $N_1 d\sigma$. Supposons que la fibre longitudinale dont un élément est pris pour axe des $x$ soit celle qui joint les centres de gravité des sections, centres déterminés en attribuant à chaque élément $d\sigma$ de celles-ci une masse fictive égale au produit de cet élément $d\sigma$ par le coefficient d'élasticité E de la fibre qui y passe, et concevons de plus que les axes des $y$ et des $z$ soient choisis, dans le plan primitif d'une section, suivant les deux axes d'inertie principaux de celle-ci. Nous aurons, par hypothèse,

$$(28) \qquad \int_\sigma \mathrm{E}y\,d\sigma = 0, \quad \int_\sigma \mathrm{E}z\,d\sigma = 0, \quad \int_\sigma \mathrm{E}yz\,d\sigma = 0.$$

Appelons, en outre, E' la valeur moyenne

$$(29) \qquad \mathrm{E}' = \int_\sigma \mathrm{E}\frac{d\sigma}{\sigma}$$

du coefficient d'élasticité E des diverses fibres, $\mathrm{E}'\mathrm{I}_y$, $\mathrm{E}'\mathrm{I}_z$ les deux moments d'inertie principaux de la section

$$(29\ bis) \qquad \mathrm{E}'\mathrm{I}_y = \int_\sigma \mathrm{E}z^2\,d\sigma, \quad \mathrm{E}'\mathrm{I}_z = \int_\sigma \mathrm{E}y^2\,d\sigma$$

par rapport à l'axe des $y$ et à celui des $z$. La formule (19), qu'on peut écrire

$$\mathrm{N}_1\,d\sigma = \mathrm{E}\partial_0\,d\sigma - \mathrm{E}\left(\frac{d^2v_0}{dx^2}y + \frac{d^2w_0}{dx^2}z\right)d\sigma,$$

montre que les tractions $\mathrm{N}_1\,d\sigma$ se composent : 1° d'une partie $\mathrm{E}\partial_0\,d\sigma$, ayant pour résultante une traction totale $\mathcal{N} = \mathrm{E}'\sigma\partial_0$ appliquée au centre de gravité de la section; 2° d'une seconde partie

$$-\mathrm{E}\left(\frac{d^2v_0}{dx^2}y + \frac{d^2w_0}{dx^2}z\right)d\sigma,$$

dont la somme totale pour les divers éléments $d\sigma$ est nulle à cause des deux premières relations (28), et qui équivaut par suite à un couple perpendiculaire à la section $\sigma$. Celui-ci peut lui-même se décomposer en deux couples : l'un, perpendiculaire à l'axe des $y$, a son moment, compté positivement en tournant dans le sens de O$x$ vers O$z$, égal à

$$\mathrm{M}_y = \int_\sigma \mathrm{E}\left(\frac{d^2v_0}{dx^2}y + \frac{d^2w_0}{dx^2}z\right)z\,d\sigma;$$

l'autre, perpendiculaire à l'axe des $z$, a de même pour moment, compté positivement en tournant de $Ox$ vers $Oy$,

$$M_z = \int_\sigma E\left(\frac{d^2v_0}{dx^2}y + \frac{d^2w_0}{dx^2}z\right)y\,d\sigma.$$

Grâce aux formules (28), (29 *bis*), ces expressions se réduisent respectivement à $E'I_y\frac{d^2w_0}{dx^2}$, $E'I_z\frac{d^2v_0}{dx^2}$.

En résumé, *les quatre constantes* $\partial_0, \theta, \frac{d^2w_0}{dx^2}, \frac{d^2v_0}{dx^2}$, *qui définissent complétement le mode d'équilibre du prisme, se détermineront au moyen des quatre équations*

$$(30)\quad \mathfrak{N} = E'\sigma\partial_0,\quad M_x = c\sigma^2\theta,\quad M_y = E'I_y\frac{d^2w_0}{dx^2},\quad M_z = E'I_z\frac{d^2v_0}{dx^2},$$

*si l'on connaît la valeur statique totale des forces appliquées à une section normale $\sigma$ du prisme. Celles-ci équivalent effectivement à une traction normale $\mathfrak{N}$, appliquée au centre de gravité de la section, et à trois couples $M_x$, $M_y$, $M_z$ qui sont, le premier parallèle à la section, les deux autres, perpendiculaires respectivement à ses deux axes d'inertie principaux relatifs à son centre de gravité. La traction $\mathfrak{N}$ produit l'extension $\partial_0$; les deux derniers couples $M_y$, $M_z$ produisent respectivement les deux flexions $\frac{d^2w_0}{dx^2}$, $\frac{d^2v_0}{dx^2}$, dans leurs plans respectifs; enfin le couple $M_x$, résultant des composantes tangentielles des actions que supporte la section normale, produit la torsion $\theta$.*

**12.** On peut observer (toujours quand on se tient à la première approximation ou à la supposition $\frac{dN_1}{dx} = 0$ partout) que, d'une part, *les petites inclinaisons $g_{xy}$, $g_{xz}$ prises par les fibres longitudinales par rapport aux sections,* d'autre part, *le gauchissement que celles-ci éprouvent* et que mesurent les valeurs de $u$ entrant dans les formules (21), (22), etc., *tiennent uniquement à la torsion $\theta$ ou à l'existence du couple* $M_x$. Quand il n'y a qu'extension et flexion, sans torsion, ces équations (à la même approximation ou supposition) donnent, sur la section quelconque d'où part l'élément de fibre longitudinale pris pour axe des $x$, $g_{xy} = 0$, $g_{zx} = 0$, $u = 0$; les sections normales restent donc alors sensiblement planes et perpendiculaires aux fibres, qui ne cessent pas elles-mêmes d'être parallèles entre elles.

A l'inverse, ni les déformations latérales $\partial_y$, $\partial_z$, $g_{yz}$, ni la dilatation longitudinale $\partial_x$, ne dépendent du moment $M_x$; par conséquent, *la torsion modifie la forme de la section considérée, primitivement normale à l'axe du prisme, sans changer la forme de sa projection sur un plan perpendiculaire à l'élément de fibre longitudinale qui en émane et qu'on a choisi pour axe des $x$.* Toutes les droites qui joignent deux à deux les points de la section, se projetant sur ce plan sous des angles très-petits, ne diffèrent de leurs projections que par des quantités négligeables du second ordre de petitesse; en sorte que des lignes quelconques, tracées sur la section normale proposée, ont mêmes longueurs et se coupent par suite sous les mêmes angles que leurs projections, qui ne dépendent pas de la grandeur du couple de torsion $M_x$.

Il en est évidemment de même pour toutes les projections de la section primitivement normale $\sigma$ sur des plans faisant avec elle de petits angles; d'où il suit que ces projections planes sont des figures égales entre elles. D'ailleurs, une quelconque de ces figures, vue en projection sur le plan d'une autre, sera orientée de la même manière que celle-ci; car, si l'on considère un élément rectiligne de la première, l'angle très-petit de cet élément rectiligne et de l'élément correspondant de $\sigma$ dont il est une projection sera vu presque de profil, ou en raccourci, sur le plan de la seconde, et paraîtra ainsi du deuxième ordre de petitesse ou aura ses côtés sensiblement parallèles. Il revient donc au même, quant à la forme et à l'orientation des figures obtenues, de projeter sur un des plans la section $\sigma$ ou bien une quelconque de ses projections considérées.

Si l'on projette, par exemple, les deux sections qui ont pour abscisses primitives $x$, $x + dx$, non plus sur un plan perpendiculaire à l'élément de fibre $dx$, mais sur un plan perpendiculaire à un autre élément de fibre longitudinale mené entre les deux mêmes sections, les nouvelles projections ne différeront que par de simples translations de celles qu'on aura en projetant sur ce second plan les projections déjà obtenues sur le premier. Or, celles-ci se projetteront évidemment en vraie grandeur sur le deuxième plan, sauf erreurs négligeables du second ordre de petitesse, et donneront deux figures, dont la seconde ne différera de la première que par une rotation $\theta dx$ autour d'un de ses points. Il ne restera plus, pour avoir les projections cherchées des deux sections sur le second plan, qu'à amener, par deux simples translations de ces deux figures, les points qui représentent ceux où l'élément de la nouvelle fibre considérée perce les sections à coïncider avec la projection même de cet élément de fibre. L'orientation des deux figures n'étant pas changée par des translations, la seconde ne différera finalement de la première que par une rotation $\theta dx$ autour de l'élément de la nouvelle fibre considérée. Ainsi, *la rotation relative des sections, qui mesure la torsion du prisme, est la même quelle que soit la fibre longitudinale dont on prend l'élément pour axe de repère, ou dont le plan normal est, en chaque endroit, celui sur lequel on projette deux sections consécutives*. C'est d'ailleurs ce qui résultait de l'équation (25), qui donne à $\theta$ une valeur indépendante du choix de cette fibre.

Dans son Mémoire sur la torsion des prismes, M. de Saint-Venant avait déjà reconnu ce fait, qui permet de considérer la torsion d'un tronçon de tige comme se produisant autour d'une fibre quelconque.

## III. — Application à la théorie des tiges.

**13.** Le mode d'équilibre étudié aux numéros précédents (**8** à **12**) ne convient *en toute rigueur* à un tronçon d'une tige qu'autant que celle-ci est d'une longueur infinie, prismatique et homogène dans le sens de la longueur, peu écartée de sa forme d'état naturel, libre enfin de toute action extérieure qui serait appliquée à sa surface latérale ou à sa masse. Il est évident en effet que, dans un tel cas, l'hypothèse d'une distribution égale des pressions aux points homologues de toutes les sections normales $\sigma$ d'un tronçon serait pleinement réalisée. Par suite, les fibres longitudinales n'y exercent les unes sur les autres, comme on a vu, que des actions parallèles à ces fibres mêmes, et elles éprouvent des dilatations $\partial_x$ variant linéairement dans les sens transversaux. L'action totale supportée par une section primitivement normale d'un tronçon se réduit :

1° A une *traction* $\mathfrak{N}$, appliquée à son centre de gravité, tangente à la fibre longitudinale *moyenne* qui joint tous les centres de gravité pareils, valant enfin le produit de l'*extension* $\partial_0$ de cette fibre par le coefficient moyen d'élasticité E' et par la section totale primitive $\sigma$;

2° A un *couple de torsion* $M_x$, perpendiculaire à la fibre moyenne et égal au produit d'une expression de la forme $c\sigma^2$ par l'*angle de torsion* $\theta$, rapporté à l'unité de distance primitive, dont une section normale située à une petite distance $dx$ de celle que l'on considère a tourné, par rapport à elle, autour de la même fibre moyenne, en ce sens que deux points matériels des deux sections qui se projetaient sur un même point d'un plan perpendiculaire à l'élément $dx$ de fibre moyenne ou, sensiblement, à sa tangente s'y projettent, après les déformations, en deux points dont le second se déduit du premier par la rotation $\theta dx$ autour de la tangente considérée;

3° A deux *couples de flexion* $M_y$, $M_z$, respectivement normaux à deux droites rectangulaires menées, perpendiculairement à la fibre moyenne et à partir du point où celle-ci perce la section, de manière que le plan de l'une d'elles et de la tangente à la fibre moyenne touche la ligne matérielle qui représente à l'état naturel un des deux axes d'inertie principaux de la section relatifs à son centre de gravité; chacun de ces couples a pour valeur le produit du moment d'inertie correspondant $E'I_y$ ou $E'I_z$ de la section $\sigma$ par la courbure (ou *flexion*) qu'a prise la projection, sur le plan même du couple, d'une ligne tangente à la fibre moyenne et primitivement droite.

Des forces quelconques s'exerçant sur la section $\sigma$ équivaudraient en tout, dans le sens où l'on entend l'équivalence lorsqu'on s'occupe de la statique des systèmes invariables, à trois couples $M_x$, $M_y$, $M_z$, normaux aux trois droites rectangulaires ci-dessus considérées, dont la première est tangente à la fibre moyenne, et en outre à trois forces $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{F}_y$, $\mathfrak{F}_z$, dirigées respectivement suivant les trois mêmes droites, à partir de leur point d'intersection. On voit que la condition d'égale répartition des pressions le long d'une même fibre longitudinale d'un tronçon, ou la supposition (9), $\frac{d(\mathrm{N},\mathrm{T})}{dx} = 0$, du n° 4, a pour effet d'annuler les deux composantes $\mathfrak{F}_y$, $\mathfrak{F}_z$, et de donner à $\mathfrak{N}$, $M_x$, $M_y$, $M_z$ les valeurs simples que je viens d'indiquer.

Passons actuellement, conformément aux explications données au

§ I, du cas *limite* où la longueur est supposée infinie, la forme exactement prismatique à l'état naturel, la constitution parfaitement homogène dans le sens de la longueur, la surface latérale et l'intérieur libres de toute action extérieure, au cas *réel* d'une tige suffisamment longue, par rapport à sa largeur, pour que ces diverses conditions soient approximativement réalisées à l'intérieur de ses tronçons, notamment pour que l'état de la matière y varie beaucoup plus lentement dans le sens de la longueur que dans les sens transversaux.

A cause de la continuité, les expressions des forces ou couples $\mathfrak{N}$, $M_x$, $M_y$, $M_z$ ne pourront pas différer notablement de ce qu'elles étaient dans le cas limite, et les deux composantes totales (ou *efforts tranchants*) $\mathfrak{F}_y$, $\mathfrak{F}_z$, qui s'annulaient dans ce cas limite, ne pourront avoir acquis, rapportées à l'unité superficielle de $\sigma$, que des valeurs insensibles par rapport aux plus grandes valeurs de $N_1$, ainsi qu'à celles de $M_x$, $M_y$, $M_z$ divisées par $\sigma^{\frac{3}{2}}$. De même, la dilatation $\partial_x$ des fibres sera restée sensiblement une fonction linéaire des coordonnées transversales, et l'action mutuelle de deux fibres aura ses composantes transversales insensibles en comparaison de sa composante longitudinale.

**14.** Les diverses sections normales $\sigma$ de la tige seront définies en position par une abscisse $s$, mesurée le long même de la fibre moyenne dans son état naturel et à partir d'une extrémité. Cette fibre pourra être primitivement courbe, et alors on donnera, au point où elle perce la section $\sigma$, d'abscisse $s$, les courbures primitives $\frac{1}{R_y^0}$, $\frac{1}{R_z^0}$ de ses deux projections sur les plans menés par cette fibre et par les deux axes principaux d'inertie $Oy$, $Oz$ de la section. On devra connaître en outre, pour toutes les valeurs de $s$, l'angle $\alpha_0 ds$ que fait primitivement avec l'axe d'inertie $Oy$ de la section $\sigma$, d'abscisse $s$, la projection sur cette section de l'axe d'inertie analogue de la section suivante, dont l'abscisse primitive est $s + ds$. La tige est dite *torse* quand on n'a pas $\alpha_0 = 0$.

Avec ces données, on pourra évidemment, dans l'état primitif, connaissant les directions $Ox$, $Oy$, $Oz$ d'un élément $ds$ de la fibre moyenne et des axes d'inertie principaux de la section $\sigma$, d'abscisse $s$, d'où part l'élément $ds$, construire les directions analogues pour la section suivante d'abscisse $s + ds$, ainsi que pour l'élément suivant de la fibre moyenne, et déterminer de proche en proche, soit la position $Ox$ des divers éléments de la fibre moyenne, soit celles, $Oy$, $Oz$, des axes d'inertie principaux des sections successives. C'est à ces axes locaux $Ox$, $Oy$, $Oz$ qu'on rapportera, avant et après les déformations, les parties de la tige qui en seront voisines : nous conviendrons de laisser l'axe $Ox$ constamment tangent à l'élément $ds$ de fibre moyenne (avec son origine O sur la section $\sigma$), et les axes perpendiculaires $Oy$, $Oz$ orientés de manière que le plan $xOy$ soit toujours, à l'origine, tangent à la ligne matérielle qui représentait l'axe des $y$ dans l'état primitif.

Après les déplacements, l'élément $ds$ de la fibre moyenne sera devenu $(1+\partial_0)ds$. De plus, l'angle que fera, avec l'axe $Oy$ émané de la première extrémité de cet élément, la projection, sur le plan $yOz$, de l'axe analogue émané de la seconde extrémité, aura une certaine valeur, $\alpha ds$, qui dépassera sa valeur primitive $\alpha_0 ds$ de la torsion $\theta ds$ éprouvée le long de l'élément. En effet, l'inclinaison primitive, $\alpha_0 ds$ (en projection sur $yOz$), d'un axe principal d'inertie de la section d'abscisse $s+ds$ sur une ligne matérielle menée aussi à partir de la seconde extrémité de l'élément $ds$, mais primitivement parallèle à l'axe d'inertie correspondant de la section d'abscisse $s$, n'aura pas varié sensiblement par suite des petites déformations produites; et sa projection sur le plan $yOz$, restée à fort peu près $\alpha_0 ds$, devra être ajoutée à l'angle $\theta ds$ dont aura tourné la projection sur le plan $yOz$ de la tangente à cette ligne matérielle, pour donner, très-sensiblement, l'angle total formé, après les déplacements, par $Oy$ et par la projection sur $yOz$ de l'axe analogue relatif à la section suivante. Sans doute, ce dernier axe local des $y$ ne se confond plus avec ce qu'est devenu l'axe d'inertie correspondant de la section d'abscisse $s+ds$. Mais leur petit angle mutuel, de l'ordre des $\partial$, $g$, se projette sur $yOz$ sous un angle presque droit, même quand la distance $ds$ des deux sections devient la longueur d'un tronçon ou est comparable aux dimensions transversales de la tige; la projection de ce petit angle se trouve donc du second ordre de petitesse, c'est-à-dire négligeable devant $\theta ds$, $\alpha_0 ds$, et l'angle de torsion totale $\alpha ds$ est à fort peu près le même que si le second axe local des $y$ restait tangent à la transformée de l'axe d'inertie voisin.

Considérons de même deux tangentes menées, en deux points dont la distance ne soit qu'un infiniment petit du second ordre, l'une à la seconde extrémité de l'élément $ds$ de la fibre moyenne, l'autre à la ligne matérielle qui était primitivement droite et tangente à la première extrémité de l'élément $ds$. L'angle des deux tangentes ainsi menées et la direction, par rapport aux axes $Ox$, $Oy$, $Oz$, de leur perpendiculaire commune, ne sont évidemment changées par les déformations que de quantités relativement fort petites; en sorte que les deux tangentes dont il s'agit ne cessent pas de faire, en projection sur le plan des $xy$, l'angle $\frac{ds}{R_y^0}$, et, en projection sur le plan des $xz$, l'angle $\frac{ds}{R_z^0}$. Il faut évidemment ajouter ces deux angles aux angles correspondants de contingence, $\frac{d^2 v_0}{dx^2}ds$, $\frac{d^2 w_0}{dx^2}ds$, de la ligne primitivement droite, pour obtenir les angles de contingence, en projection sur les plans respectifs $xOy$, $xOz$, de la fibre moyenne elle-même après les déformations. Ces angles seront à fort peu près $\frac{ds}{R_y}$, $\frac{ds}{R_z}$ si $\frac{1}{R_y}$, $\frac{1}{R_z}$ désignent alors les courbures des deux projections de la fibre moyenne sur les plans $xOy$, $xOz$.

Les fonctions appelées $\alpha$, $R_y$, $R_z$, une fois déterminées, serviront à construire de proche en proche, après les déformations et concurremment avec $\partial_0$, la fibre moyenne ainsi que les directions $Oy$, $Oz$, indicatrices des axes principaux d'inertie des diverses sections normales, absolument comme $\alpha_0$, $R_y^0$, $R_z^0$ permettaient d'effectuer la construction analogue avant les déformations. On vient de voir que ces fonctions sont liées aux quantités $\theta$, $\frac{d^2 v_0}{dx^2}$, $\frac{d^2 w_0}{dx^2}$ au moyen des relations simples

$$(31)\qquad \theta = \alpha - \alpha_0,\quad \frac{d^2 v_0}{dx^2} = \frac{1}{R_y} - \frac{1}{R_y^0},\quad \frac{d^2 w_0}{dx^2} = \frac{1}{R_z} - \frac{1}{R_z^0}.$$

Les formules (30) s'écriront, par suite,

$$(32)\qquad \begin{cases} \mathfrak{N} = E'\sigma\partial_0, \\ M_x = c\sigma^2(\alpha - \alpha_0), \\ M_y = E'I_y\left(\frac{1}{R_z} - \frac{1}{R_z^0}\right), \\ M_z = E'I_z\left(\frac{1}{R_y} - \frac{1}{R_y^0}\right). \end{cases}$$

**15.** Les principes des quantités de mouvement et des moments, si on les applique à toute la portion de tige comprise au delà de la section $\sigma$, d'abscisse quelconque $s$, montrent que la traction normale $\mathfrak{N}$ est égale à la somme des composantes, dans le sens de l'élément suivant $ds$ de la fibre moyenne ou dans le sens $Ox$ de toutes les forces extérieures exercées sur cette portion de tige, et que les couples $M_x$, $M_y$, $M_z$ sont égaux respectivement aux sommes des moments de ces forces par rapport aux axes $Ox$, $Oy$, $Oz$. Les formules (32), en y remplaçant $\mathfrak{N}$, $M_x$, $M_y$, $M_z$ par ces valeurs, deviennent quatre relations pouvant servir à déterminer les quatre fonctions inconnues $\partial_0$, $\alpha$, $R_z$, $R_y$: ce sont les quatre équations d'équilibre de la tige. Les formules (31) donneront ensuite, pour chaque valeur de $s$, les trois paramètres $\theta$, $\frac{d^2 v_0}{dx^2}$, $\frac{d^2 w_0}{dx^2}$, qui, joints à $\partial_0$, détermineront, sauf erreurs relatives négligeables, les déformations $\partial$, $g$ éprouvées par la matière de la tige en ses divers points. Enfin, les deux petites composantes totales $\mathfrak{F}_y$, $\mathfrak{F}_z$, suivant $Oy$, $Oz$, des pressions exercées à travers la section $\sigma$ pourront être également connues; car, d'après le principe des quantités de mouvement, chacune d'elles sera égale à la somme des composantes, suivant $Oy$ ou suivant $Oz$, des forces extérieures appliquées à la portion considérée de tige.

Les quatre équations d'équilibre présentées ainsi sous la forme (32) ont généralement pour premiers membres des intégrales, et il faut une ou plusieurs différentiations pour en déduire les équations d'équilibre d'un simple tronçon, compris entre les deux sections normales infiniment voisines dont les abscisses primitives étaient $s$, $s + ds$. Or on peut former aisément ces équations d'équilibre en appliquant au tronçon les principes des quantités de mouvement et des moments par rapport aux axes locaux $Ox$, $Oy$, $Oz$.

En effet, la première base $\sigma$ du tronçon supporte les trois forces $-\mathfrak{N}$, $-\mathfrak{F}_y$, $-\mathfrak{F}_z$ et les trois couples $-M_x$, $-M_y$, $-M_z$; la seconde est soumise à trois forces et à trois couples analogues, mais changés de signe, augmentés de leurs différentielles par rapport à $s$, et parallèles ou perpendiculaires à trois directions, infiniment peu différentes de $Ox$, $Oy$, $Oz$, facilement déterminables au moyen des angles de contingence et de torsion $\frac{ds}{R_y}$, $\frac{ds}{R_z}$, $\alpha\, ds$. Par exemple, les projections de la force $\mathfrak{N} + \frac{d\mathfrak{N}}{ds} ds$ sur les plans $xOy$ et $xOz$ font avec $Ox$, du côté de $Oy$ ou de $Oz$, les angles infiniment petits $\frac{ds}{R_y}$, $\frac{ds}{R_z}$; ce qui revient à dire que les cosinus des angles que cette force fait avec $Ox$ et $Oy$, avec $Ox$ et $Oz$, sont respectivement entre eux comme 1 est à $\frac{ds}{R_y}$, comme 1 est à $\frac{ds}{R_z}$, ou qu'ils valent $1, \frac{ds}{R_y}, \frac{ds}{R_z}$. Enfin, certaines forces extérieures seront appliquées à la surface latérale du tronçon ou à sa masse : j'appellerai $\rho$ la densité moyenne primitive du tronçon, dont la masse vaudra par suite $\rho\sigma ds$, et je désignerai par $\rho X\sigma ds$, $\rho Y\sigma ds$, $\rho Z\sigma ds$ les composantes totales des actions extérieures dont il s'agit. Quant à leurs moments par rapport à $Oy$, $Oz$, les deux forces $\rho Y\sigma ds$, $\rho Z\sigma ds$, dont les bras de levier seront comparables à $ds$, n'en donneront que de négligeables, et ceux de $\rho X\sigma ds$ seront en général insensibles, surtout si les composantes longitudinales de l'action extérieure ne sont pas distribuées trop inégalement de part et d'autre du centre de gravité des sections. L'autre axe $Ox$ étant parallèle à la force $\rho X\sigma ds$, il y aura seulement à compter le moment des actions extérieures transversales par rapport à l'axe $Ox$ ou à l'élément $ds$ de fibre moyenne : j'appellerai $\mu\rho\sigma^{\frac{3}{2}} ds$ ce moment, dont $\mu\sqrt{\sigma}$ sera, en quelque sorte, la valeur par unité de masse, valeur comparable à la force qui le produit multipliée par un bras de levier de l'ordre des dimensions transversales de la tige ou de l'ordre de $\sqrt{\sigma}$.

Il suffira d'exprimer que ces diverses forces ou couples se font équilibre sur le tronçon, puis de remplacer $\mathfrak{N}$, $M_x$, $M_y$, $M_z$ par leurs expressions (32), pour avoir les équations différentielles cherchées de l'équilibre de la tige.

**16.** Bornons-nous aux deux cas particulièrement intéressants d'une tige primitivement droite et non torse, peu déformée, et d'une tige symétrique par rapport à un plan, soumise à l'action de forces symétriques par rapport à ce plan.

Dans le cas d'une tige rectiligne et non torse peu déformée, l'abscisse $s$ deviendra une abscisse rectiligne $x$; on aura $\alpha_0 = 0$, $\frac{1}{R_y^0} = 0$, $\frac{1}{R_z^0} = 0$, et les flexions ou torsion $\frac{1}{R_y}$, $\frac{1}{R_z}$, $\alpha$ seront assez petites pour qu'on puisse négliger leurs produits par $M_x$, $M_y$, $M_z$, en comparaison des dérivées $\frac{d}{dx}(M_x, M_y, M_z)$, ou leurs produits par $\mathcal{F}_y$, $\mathcal{F}_z$ en comparaison des $\frac{d(\mathcal{N}, \mathcal{F})}{dx}$. Mais nous conserverons les produits de $\frac{1}{R_y}$, $\frac{1}{R_z}$ par $\mathcal{N}$ devant les dérivées $\frac{d}{dx}(\mathcal{F}_y, \mathcal{F}_z)$, lesquelles seront beaucoup plus petites que $\frac{dN_1}{dx}$ : en effet, $\mathcal{F}_y$, $\mathcal{F}_z$ étant négligeables à une première approximation, leurs dérivées en $x$ le sont même à une deuxième, contrairement à celles bien plus sensibles de $\mathcal{N}$, $M_x$, $M_y$, $M_z$.

La force $\mathcal{N} + \frac{d\mathcal{N}}{dx}dx$, appliquée à la seconde extrémité de l'élément $ds$ ou $dx$, et dont les angles avec $Ox$, $Oy$, $Oz$ ont respectivement pour cosinus $1$, $\frac{ds}{R_y}$, $\frac{ds}{R_z}$, donnera, sauf erreurs négligeables de l'ordre de $ds^2$ ou de $dx^2$, les composantes respectives

$$\mathcal{N} + \frac{d\mathcal{N}}{dx}dx, \quad \frac{\mathcal{N}}{R_y}dx, \quad \frac{\mathcal{N}}{R_z}dx. \tag{33}$$

Ses moments seront d'ailleurs nuls, car cette force prolongée ne passe qu'à une distance comparable à $ds^2$ de l'origine O, c'est-à-dire de la première extrémité de l'élément $ds$.

Les petites forces $\mathcal{F}_y + \frac{d\mathcal{F}_y}{dx}dx$, $\mathcal{F}_z + \frac{d\mathcal{F}_z}{dx}dx$ font avec les axes $Ox$, $Oy$, $Oz$ des angles dont les cosinus sont $0, 1, 0$ pour la première, $0, 0, 1$ pour la seconde, à part des erreurs de l'ordre de $ds^2$ sur les cosinus peu différents de $1$, ou des erreurs, sur les cosinus voisins de zéro, de l'ordre de $\alpha dx$, $\frac{dx}{R_y}$, $\frac{dx}{R_z}$, et ayant leurs produits par $\mathcal{F}_y$, $\mathcal{F}_z$ négligeables devant $\frac{d\mathcal{F}_y}{dx}dx$, $\frac{d\mathcal{F}_z}{dx}dx$. Ces forces ne fourniront donc pas d'autres composantes que $\mathcal{F}_y + \frac{d\mathcal{F}_y}{dx}dx$, suivant $Oy$, et $\mathcal{F}_z + \frac{d\mathcal{F}_z}{dx}dx$, suivant $Oz$. En outre, elles ne donnent que des moments négligeables, de l'ordre de $ds^2$, soit par rapport à $Ox$ et à $Oy$ pour la première, soit par rapport à $Ox$ et à $Oz$ pour la seconde, vu que, d'une part, leur distance à $Ox$ est de l'ordre de $ds^2$, tandis que, d'autre part, leurs projections respectives, sur des plans normaux à $Oy$ et à $Oz$, se font sous des angles dont le cosinus est de l'ordre de $ds$, et sont à des distances de $Oy$ et de $Oz$ comparables à $ds$. Il n'y a donc à considérer que le moment de $\mathcal{S}_z + \frac{d\mathcal{S}_z}{dx}dx$ par rapport à $Oy$ et le moment de $\mathcal{S}_y + \frac{d\mathcal{S}_y}{dx}dx$ par rapport à $Oz$ : les bras de levier valant sensiblement $ds$ ou $dx$, ces moments seront à fort peu près $\mathcal{S}_z dx$ et $\mathcal{S}_y dx$.

Enfin, les couples $M_x + \frac{dM_x}{dx}dx$, $M_y + \frac{dM_y}{dx}dx$, $M_z + \frac{dM_z}{dx}dx$, dont les plans sont normaux à trois directions, ne différant respectivement de $Ox$, $Oy$, $Oz$ que par des angles comparables à $\frac{dx}{R_y}$, $\frac{dx}{R_z}$, $\alpha dx$, ne donnent de moments sensibles, le premier, que par rapport à $Ox$, le second, que par rapport à $Oy$, le troisième, que par rapport à $Oz$.

Les équations fournies par le principe des quantités de mouvement seront, par suite,

$$-\mathfrak{N} + \left(\mathfrak{N} + \frac{d\mathfrak{N}}{dx}dx\right) + \rho X\sigma dx = 0,$$
$$-\mathcal{S}_y + \left(\mathcal{S}_y + \frac{d\mathcal{S}_y}{dx}dx\right) + \frac{\mathfrak{N}}{R_y}dx + \rho Y\sigma dx = 0,$$
$$-\mathcal{S}_z + \left(\mathcal{S}_z + \frac{d\mathcal{S}_z}{dx}dx\right) + \frac{\mathfrak{N}}{R_z}dx + \rho Z\sigma dx = 0,$$

et l'on aura, pour celles des moments,

$$-M_x + \left(M_x + \frac{dM_x}{dx}dx\right) + \rho\mu\sigma^{\frac{3}{2}}dx = 0,$$
$$-M_y + \left(M_y + \frac{dM_y}{dx}dx\right) + \mathcal{S}_z dx = 0,$$
$$-M_z + \left(M_z + \frac{dM_z}{dx}dx\right) + \mathcal{S}_y dx = 0.$$

La première et la quatrième de ces équations reviennent à

$$(34) \qquad \frac{d\mathfrak{N}}{dx} + \rho\sigma X = 0, \quad \frac{dM_x}{dx} + \rho\sigma^{\frac{3}{2}}\mu = 0.$$

Les quatre autres peuvent s'écrire

$$(35)\qquad \begin{cases} \mathcal{F}_y = -\dfrac{dM_z}{dx}, \quad \mathcal{F}_z = -\dfrac{dM_y}{dx}, \\ \dfrac{d\mathcal{F}_y}{dx} + \dfrac{\mathcal{N}}{R_y} + \rho\sigma Y = 0, \quad \dfrac{d\mathcal{F}_z}{dx} + \dfrac{\mathcal{N}}{R_z} + \rho\sigma Z = 0. \end{cases}$$

Les deux premières de celles-ci montrent que les *efforts tranchants* $\mathcal{F}_y$, $\mathcal{F}_z$ égalent les dérivées premières en $x$, changées de signe, des moments fléchissants respectifs $M_z$, $M_y$.

En transportant ces valeurs de $\mathcal{F}_y$, $\mathcal{F}_z$ dans les deux dernières (35), il vient

$$(36)\qquad -\frac{d^2M_z}{dx^2} + \frac{\mathcal{N}}{R_y} + \rho\sigma Y = 0, \quad -\frac{d^2M_y}{dx^2} + \frac{\mathcal{N}}{R_z} + \rho\sigma Z = 0.$$

Ce sont les deux équations qui régissent la *flexion*, tandis que les relations (34) régissent, l'une l'*extension* ou la *compression*, l'autre la *torsion*. Il ne reste plus qu'à y substituer à $\mathcal{N}$, $M_x$, $M_z$, $M_y$ leurs valeurs (32) et à $\partial_0$, $\frac{1}{R_y}$, $\frac{1}{R_z}$ les expressions $\frac{du_0}{dx}$, $\frac{d^2v_0}{dx^2}$, $\frac{d^2w_0}{dx^2}$ fournies par (3) et (31).

Dans les deux formules (36) ou dans les deux dernières (35), les seconds termes, quoique non linéaires ou affectés à la fois de la petite courbure $\frac{1}{R_y}$, $\frac{1}{R_z}$ et de $\mathcal{N}$, qui est de l'ordre de la petite dilatation $\partial_0$, ne peuvent généralement pas être négligés, pour la raison donnée vers le commencement de ce numéro. De fait, ces termes, nuls lorsqu'il n'y a que flexion et torsion sans extension, sont au contraire beaucoup plus grands que $\frac{d\mathcal{F}_y}{dx}$, $\frac{d\mathcal{F}_z}{dx}$, quand la tige est tendue et que ses dimensions transversales se trouvent assez petites pour que les couples $M_y$, $M_z$, proportionnels aux moments principaux d'inertie de la section $\sigma$, deviennent comme des infiniment petits d'ordre supérieur en comparaison de $\mathcal{N}$, qui est proportionnel à $\sigma$ : alors la tige ne résiste presque à la flexion, produite soit statiquement par des forces transversales, soit par un mouvement vibratoire, qu'en raison de sa tension même $\mathcal{N}$, et elle prend le nom de *fil* ou de *corde*.

**17.** Enfin, si la tige est symétrique et déformée symétriquement par rapport à un plan, qu'on peut supposer choisi pour celui des $xy$, on aura $\alpha_0 = 0$, $\frac{1}{R_z^0} = 0$, $\alpha = 0$, $\frac{1}{R_z} = 0$, $\mathcal{F}_z = 0$, $Z = 0$, et l'on pourra n'appliquer le principe des quantités de mouvement à un tronçon que suivant les deux axes $Ox$, $Oy$, le principe des moments que par rapport à l'axe des $z$. Il n'y aura à changer aux considérations du numéro précédent que ce qui concerne, d'une part, les dérivées $\frac{d}{ds}$, qu'on ne pourra plus écrire $\frac{d}{dx}$, d'autre part, les composantes de la force $\mathcal{F}_y + \frac{d\mathcal{F}_y}{ds}ds$, dont les angles avec $Ox$ et $Oy$ seront $\frac{\pi}{2} + \frac{ds}{R_y}$, $\frac{ds}{R_y}$; ces composantes vaudront, par suite, sauf erreurs insensibles de l'ordre de $ds^2$, $-\frac{\mathcal{F}_y}{R_y}ds$, $\mathcal{F}_y + \frac{d\mathcal{F}_y}{ds}ds$. La première ne sera plus négligeable, car la courbure $\frac{1}{R_y}$ pourra être beaucoup plus grande que dans le cas précédent.

Les équations (34) seront donc remplacées par celle-ci

$$\frac{d\mathfrak{N}}{ds} - \frac{\mathcal{F}_y}{R_y} + \rho\sigma X = 0, \tag{37}$$

et les relations (35) par la première et la troisième seulement, savoir :

$$\mathcal{F}_y = -\frac{dM_z}{ds}, \quad \frac{d\mathcal{F}_y}{ds} + \frac{\mathfrak{N}}{R_y} + \rho\sigma Y = 0. \tag{38}$$

Ces dernières donnent, pour seconde équation de l'équilibre,

$$-\frac{d^2M_z}{ds^2} + \frac{\mathfrak{N}}{R_y} + \rho\sigma Y = 0, \tag{39}$$

tandis que la première (37) devient

$$\frac{d\mathfrak{N}}{ds} + \frac{1}{R_y}\frac{dM_z}{ds} + \rho\sigma X = 0. \tag{39 bis}$$

Il ne reste plus qu'à substituer, dans ces équations, à $\mathfrak{N}$, $M_z$ leurs valeurs (32) :

$$\mathfrak{N} = E'\sigma\partial_0, \quad M_z = E'I_z\left(\frac{1}{R_y} - \frac{1}{R_y^0}\right). \tag{40}$$

On remarquera que la traction normale $\mathfrak{N}$ et le couple de flexion $M_z$ entrent à la fois dans chacune des deux équations indéfinies (39) et (39 *bis*), en sorte qu'on ne peut annuler aucune des deux quantités $\partial_0, \frac{1}{R_y} - \frac{1}{R_y^0}$ sans astreindre l'autre à vérifier deux équations indéfinies distinctes, généralement incompatibles. Aussi des vibrations longitudinales et des vibrations transversales ne peuvent-elles pas se produire séparément dans une tige circulaire, comme l'a démontré M. Resal à la page 153 du Tome II de son *Traité de Mécanique générale*.

**18.** La première formule (38) ne fait connaître que la résultante $\mathfrak{F}_y$ des actions tangentielles exercées sur toute la section normale $\sigma$. Quant à ces actions tangentielles elles-mêmes, qui étaient, comme $\mathfrak{F}_y$, insensibles à une première approximation, une intégration effectuable pour certaines formes de la section permet de les déterminer, du moins quand la tige est prismatique, symétriquement constituée par rapport au plan des $xy$, modérément fléchie, et qu'elle a sa surface latérale libre de toute action extérieure. Supposons, pour simplifier, que toutes les fibres aient le même coefficient d'élasticité E, indépendant de $x$ comme $\sigma$, et que la composante longitudinale de l'action extérieure exercée sur l'unité de volume du tronçon ne diffère pas sensiblement de sa moyenne $\rho X$; cette moyenne vaudra

$$(40\ bis) \qquad \rho X = -\frac{1}{\sigma}\frac{d\mathfrak{N}}{dx} = -E\frac{d\partial_0}{dx},$$

d'après l'équation (37), dans laquelle on pourra négliger le second terme (vu la petitesse supposée de la courbure), remplacer E' par E et $\frac{d}{ds}$ par $\frac{d}{dx}$. Les formules des n$^{os}$ **5**, **6** et **7** seront applicables même à une deuxième approximation, d'après ce que l'on a vu à la fin du n° **4**. La relation (19), réduite à

$$N_1 = E\left(\partial_0 - y\frac{d^2\rho_0}{dx^2}\right) = E\partial_0 - \frac{y}{I_z}M_z,$$

donnera par sa différentiation par rapport à $x$, en tenant compte de (40 *bis*),

$$\frac{dN_1}{dx} = E\frac{d\partial_0}{dx} - \frac{y}{I_z}\frac{dM_z}{dx} = -\rho X - \frac{y}{I_z}\frac{dM_z}{ds}.$$

La première équation de l'équilibre d'un élément de volume infiniment petit

$$\frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} = -\frac{dN_1}{dx} - \rho X$$

deviendra donc

$$(41) \qquad \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} = \frac{y}{I_z}\frac{dM_z}{ds}.$$

Combinée avec la première condition spéciale (2), elle détermine complétement, après qu'on a remplacé $T_3$, $T_2$ par les valeurs tirées des deux dernières (4) et $g_{zx}$, $g_{xy}$ par leurs expressions (3), le très-petit déplacement longitudinal $u$, caractéristique du gauchissement éprouvé par la section $\sigma$. On le reconnaîtrait en raisonnant comme au n° 9, sauf à attribuer à $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dw}{dx}$ des valeurs différentes données par l'intégration du système (20), et à observer qu'on a ici, par raison de symétrie, $\theta = 0$. Les trois coefficients H, H', $\eta''$ des formules (4) seraient d'ailleurs nuls, à cause de la symétrie de contexture supposée par rapport au plan des $xy$. On trouverait, pour tenir lieu de la formule (23),

$$(42) \qquad \int_\sigma \left(T_3\frac{dU}{dy} + T_2\frac{dU}{dz}\right) d\sigma = -\frac{dM_z}{ds}\frac{\int_\sigma y U\, d\sigma}{I_z}.$$

En y faisant $U = y$, il vient bien, comme il le fallait,

$$\int_\sigma T_3\, d\sigma \quad \text{ou} \quad \mathcal{F}_y = -\frac{dM_z}{ds} \quad [*].$$

La méthode indiquée ici pour déterminer $T_3$, $T_2$ s'étendrait à tous les

[*] Avant de passer à l'étude des plaques, je reviendrai un instant sur les principes fondamentaux de la théorie des tiges, principes exprimés par les formules (12) et (18), que M. de Saint-Venant s'était donnés comme point de départ, mais que je pense avoir démontrées le premier, et qui signifient que *les fibres longitudinales éprouvent des dilatations variables linéairement aux divers points d'une même section et n'exercent les unes sur les autres que des actions dirigées suivant leurs tangentes.* Je ferai observer que ces lois subsisteraient sans qu'on fît l'hypothèse de la symétrie de contexture de la tige par rapport aux sections normales, si l'on admettait, par contre, la

cas où ces forces tangentielles auraient leurs dérivées en $y$, $z$ comparables à $\frac{dN_1}{dx}$, comme il arrive toutes les fois que de petites torsions se superposent à des flexions sans produire des glissements $g_{xy}$, $g_{xz}$ très-supérieurs à ceux que causent les flexions elles-mêmes.

---

symétrie de distribution des pressions intérieures de part et d'autre de chacune de ces sections, ou seulement les cinq relations, qu'implique cette symétrie, $T_3 = 0$, $T_2 = 0$, $\frac{d}{dx}(N_2, N_3, T_1) = 0$. En effet, $T_3$, $T_2$ disparaissant alors des six formules linéaires qui relient toujours les $\partial$, $g$ aux N, T, les quatre premières formules (4) subsisteraient, l'expression (5) se réduirait à (6), qui conduirait à la relation (8), et la première (1) deviendrait $\frac{dN_1}{dx} = 0$. Par suite, les dérivées en $x$ des six déformations $\partial$, $g$, fonctions linéaires connues de $N_1$, $N_2$, $N_3$, $T_1$, s'annuleraient, et, les relations (10), (10 *bis*), (11) étant vérifiées, on arriverait, comme dans les nos 5 et 6, aux formules cherchées (12) et (18) : de toutes les composantes N, T des pressions, $N_1$ seule subsisterait.

Je remarquerai encore que rien n'est changé aux démonstrations exposées dans le Mémoire pour ces formules (12) et (18), quand, au lieu de la première condition spéciale (2), qui exprime la nullité de la composante longitudinale de la pression exercée sur la surface latérale du prisme, on en prend une autre, consistant, par exemple, à se donner directement, en fonction de $y$ et $z$, soit cette composante $T_3 \cos\alpha + T_2 \sin\alpha$, soit les déplacements longitudinaux $u$ produits sur le contour d'une section $\sigma$. On démontrerait, en opérant comme il a été fait aux nos 8 et 9, que la valeur de $u$ aux divers points de $\sigma$ est encore déterminée. Si le prisme est homogène, et que, comme il arrive toujours, $H' = H$, on reconnaît, en particulier, très-aisément, qu'il est possible d'attribuer à la composante dont il s'agit, $T_3 \cos\alpha + T_2 \sin\alpha$, des valeurs telles que les sections $\sigma$ restent planes et normales à une fibre déterminée, ou telles qu'on ait $u = 0$ dans les formules (21) et suivantes; alors le phénomène de la torsion consiste en une simple rotation des sections l'une devant l'autre. MM. William Thomson et Tait, qui ont étudié cette sorte de torsion *forcée* aux nos 702 et 703 de leur *Traité de Philosophie naturelle*, l'ont appelée *torsion simple*. Il importe d'observer qu'elle n'est jamais réalisée et ne paraît même pas pratiquement réalisable, si ce n'est dans le cas simple, déjà traité par Coulomb, du cylindre circulaire, isotrope autour de son axe, cas pour lequel elle se confond avec la torsion ordinaire.