JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DÉSIRÉ ANDRÉ

Développements des trois fonctions $\mathrm{Al}(x)$, $\mathrm{Al}_1(x)$, $\mathrm{Al}_2(x)$ **suivant les puissances croissantes du module**

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 5 (1879), p. 131-142.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1879_3_5__131_0>

Développements des trois fonctions $\mathrm{Al}(x), \mathrm{Al}_1(x), \mathrm{Al}_2(x)$ *suivant les puissances croissantes du module;*

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

Introduction.

1. Nous avons fait connaître naguère [*] la forme générale des coefficients dans les développements, suivant les puissances croissantes de la *variable* x, des quatre fonctions de M. Weierstrass, représentées d'ordinaire par les notations $\mathrm{Al}(x)$, $\mathrm{Al}_1(x)$, $\mathrm{Al}_2(x)$, $\mathrm{Al}_3(x)$. Nous nous proposons actuellement de déterminer cette même forme générale des coefficients dans les développements, suivant les puissances croissantes du *module* k, des trois premières de ces fonctions.

2. Ce problème est tout à fait analogue à celui que nous avons résolu déjà [**] pour les fonctions elliptiques. Nous le résolvons par les mêmes procédés.

Nous partons des développements par rapport à la variable x que nous venons de rappeler (**1**).

Nous ordonnons chacun d'eux suivant les puissances de k, et nous déterminons avec soin les séries entières en x qui, dans les développements ainsi ordonnés, multiplient ces puissances.

Nous constatons que ces séries entières rentrent dans celles que nous avons jadis [***] étudiées, et nous en calculons les sommes respectives.

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées.*

[**] *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure.*

[***] *Ibid.*

Enfin, à l'aide de ces sommes, nous donnons les formes générales des coefficients cherchés, et, par la considération des relations qui existent entre les fonctions de M. Weierstrass et les fonctions elliptiques, nous apportons à ces formes générales d'importantes simplifications.

3. Ces résultats ont été résumés par nous dans une Note que notre illustre maître, M. Hermite, a bien voulu présenter à l'Académie des Sciences [*]. Ils nous semblent entièrement nouveaux, sauf en ce qui regarde le développement de $\mathrm{Al}(x)$, dont la forme a été donnée, il y a plusieurs années déjà [**], par l'un de nos plus savants géomètres, le R. P. Joubert.

§ I. — *Développements suivant les puissances de x.*

4. Dans le Mémoire [***] que nous avons consacré aux développements des quatre fonctions de M. Weierstrass suivant les puissances croissantes de la variable x, nous avons posé

$$\begin{aligned}
\mathrm{Al}(x) &= \mathrm{P}_0 \quad - \mathrm{P}_1\frac{x^2}{2!} + \mathrm{P}_2\frac{x^4}{4!} - \mathrm{P}_3\frac{x^6}{6!} + \cdots,\\
\mathrm{Al}_1(x) &= \mathrm{Q}_0\frac{x}{1!} - \mathrm{Q}_1\frac{x^3}{3!} + \mathrm{Q}_2\frac{x^5}{5!} - \mathrm{Q}_3\frac{x^7}{7!} + \cdots,\\
\mathrm{Al}_2(x) &= \mathrm{R}_0 \quad - \mathrm{R}_1\frac{x^2}{2!} + \mathrm{R}_2\frac{x^4}{4!} - \mathrm{R}_3\frac{x^6}{6!} + \cdots,
\end{aligned}$$

et, en même temps,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_n &= p_{n,0} + p_{n,1}k^2 + p_{n,2}k^4 + p_{n,3}k^6 + \ldots,\\
\mathrm{Q}_n &= q_{n,0} + q_{n,1}k^2 + q_{n,2}k^4 + q_{n,3}k^6 + \ldots,\\
\mathrm{R}_n &= r_{n,0} + r_{n,1}k^2 + r_{n,2}k^4 + r_{n,3}k^6 + \ldots.
\end{aligned}$$

5. Puis, regardant $p_{n,t}$, $q_{n,t}$, $r_{n,t}$ comme des fonctions de n seulement, nous sommes arrivés aux résultats suivants.

---

[*] *Comptes rendus*, séance du 17 juin 1878.
[**] *Ibid.*, séances des 29 mai et 5 juin 1876.
[***] *Journal de Mathématiques pures et appliquées.*

1° Les coefficients $p_{n,t}$, $q_{n,t}$, $r_{n,t}$, où n seul varie, constituent chacun le terme général d'une série récurrente proprement dite;

2° La série récurrente ayant le coefficient $p_{n,t}$ pour terme général admet l'équation génératrice

$$\prod_{1}^{\eta}{}_{j}[z-(2j)^2]^{2t-2j^2+1}=0;$$

les séries qui ont pour termes généraux respectifs les coefficients $q_{n,t}$, $r_{n,t}$ admettent chacune l'équation génératrice

$$\prod_{0}^{\eta}{}_{j}[z-(2j+1)^2]^{2t-2j^2-2j+1}=0,$$

η représentant, dans la première de ces équations, la partie entière de $\sqrt{t}$, et, dans la seconde, la partie entière de $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{4t+1})$.

3° Les formes générales des coefficients considérés sont données, pour $p_{n,t}$, par la formule

$$p_{n,t}=\sum_{1}^{\eta}{}_{j}\xi_j(n)[(2j)^2]^n,$$

pour $q_{n,t}$, $r_{n,t}$, par la formule

$$q_{n,t}=\sum_{0}^{\eta}{}_{j}\xi_j(n)[(2j+1)^2]^n,$$

η ayant, dans ces deux formules, les mêmes significations que dans les équations génératrices correspondantes qui précèdent, et $\xi_j(n)$ représentant un polynôme entier en n, du degré $2t-2j^2$ dans la première formule et du degré $2t-2j^2-2j$ dans la seconde.

6. A ces divers résultats nous joindrons les remarques bien connues [*] que voici :

Les quantités P_0, Q_0, R_0 sont égales chacune à l'unité.

Les polynômes P_n, Q_n, R_n, entiers par rapport à k, sont, Q_n du degré $2n$, P_n et R_n du degré $2n-2$.

---

[*] BRIOT et BOUQUET, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 466, 468.

Quel que soit l'indice n, le coefficient $p_{n,0}$ est égal à zéro, et les coefficients $q_{n,0}$, $r_{n,0}$ sont égaux chacun à l'unité.

7. Ce sont ces résultats et ces remarques qui vont servir de points de départ aux présentes recherches.

§ II. — *Séries qui multiplient les puissances de k.*

8. Développées suivant les puissances croissantes du module k, les trois fonctions considérées affectent ces nouvelles formes

$$\begin{aligned}
\mathrm{Al}(x) &= \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 k^2 + \mathrm{A}_2 k^4 + \mathrm{A}_3 k^6 + \ldots,\\
\mathrm{Al}_1(x) &= \mathrm{B}_0 + \mathrm{B}_1 k^2 + \mathrm{B}_2 k^4 + \mathrm{B}_3 k^6 + \ldots,\\
\mathrm{Al}_2(x) &= \mathrm{C}_0 + \mathrm{C}_1 k^2 + \mathrm{C}_2 k^4 + \mathrm{C}_3 k^6 + \ldots,
\end{aligned}$$

dans lesquelles les coefficients A, B, C représentent des séries entières en x.

Pour bien déterminer ces séries entières, nous allons reprendre, l'un après l'autre, les développements (4) de nos fonctions suivant les puissances de la variable x et les ordonner suivant les puissances du module k.

9. Considérons d'abord le développement, par rapport à la variable x, de la fonction $\mathrm{Al}(x)$ et cherchons-y la série entière en x qui multiplie k^{2t}, c'est-à-dire qui constitue A_t.

Le premier des polynômes P qui contienne cette puissance de k est P_{t+1}, le second est P_{t+2}, le troisième $\mathrm{P}_{t+3}, \ldots$; et, dans ces différents polynômes, les coefficients qui multiplient k^{2t} sont respectivement $p_{t+1,t}$, $p_{t+2,t}$, $p_{t+3,t}, \ldots$.

Mais, dans le développement de $\mathrm{Al}(x)$ par rapport à x, les polynômes P_{t+1}, P_{t+2}, $\mathrm{P}_{t+3}, \ldots$ multiplient respectivement les expressions

$$(-1)^{t+1}\frac{x^{2t+2}}{(2t+2)!},\quad (-1)^{t+2}\frac{x^{2t+4}}{(2t+4)!},\quad (-1)^{t+3}\frac{x^{2t+6}}{(2t+6)!},\quad \ldots.$$

Donc nous avons

$$\mathrm{A}_t = (-1)^{t+1}\left[p_{t+1,t}\frac{x^{2t+2}}{(2t+2)!} - p_{t+2,t}\frac{x^{2t+4}}{(2t+4)!} + p_{t+3,t}\frac{x^{2t+6}}{(2t+6)!} - \ldots\right],$$

et il s'ensuit immédiatement que, si nous désignons par $\alpha(x)$ un polynôme convenablement choisi, entier en x, du degré $2t$ et ne contenant que des puissances paires de x, nous pouvons écrire

$$A_t = \alpha(x) + a_0 - a_1\frac{x^2}{2!} + a_2\frac{x^4}{4!} - a_3\frac{x^6}{6!} + \ldots,$$

le coefficient a_n étant de même forme (5) que le coefficient $p_{n,t}$ regardé comme fonction de n seul.

10. En raisonnant absolument de la même façon sur le développement, par rapport à la variable x, de la fonction $\mathrm{Al}_1(x)$, nous parvenons à la formule suivante :

$$B_t = \beta(x) + b_0\frac{x}{1!} - b_1\frac{x^3}{3!} + b_2\frac{x^5}{5!} - b_3\frac{x^7}{7!} + \ldots,$$

dans laquelle $\beta(x)$ représente un polynôme entier en x, du degré $2t-1$, ne contenant que des puissances impaires de x, et où le coefficient b_n est de même forme (5) que le coefficient $q_{n,t}$ regardé comme fonction de n seul.

11. Enfin, par les mêmes raisonnements encore, on parvient, pour la fonction $\mathrm{Al}_2(x)$, à la formule

$$C_t = \gamma(x) + c_0 - c_1\frac{x^2}{2!} - c_2\frac{x^4}{4!} + c_3\frac{x^6}{6!} + \ldots,$$

dans laquelle $\gamma(x)$ représente un polynôme entier en x, du degré $2t$, ne contenant que des puissances paires de x, et où c_n est de même forme (5) que $r_{n,t}$, regardé lui aussi comme fonction de n seulement.

§ III. — *Sommation des séries considérées.*

12. Les trois séries

$$a_0 \quad - a_1\frac{x^2}{2!} + a_2\frac{x^4}{4!} - a_3\frac{x^6}{6!} + \ldots,$$

$$b_0\frac{x}{1!} - b_1\frac{x^3}{3!} + b_2\frac{x^5}{5!} - b_3\frac{x^7}{7!} + \ldots,$$

$$c_0 \quad - c_1\frac{x^2}{2!} + c_2\frac{x^4}{4!} - c_3\frac{x^6}{6!} + \ldots,$$

qui figurent dans nos expressions (§ II) des quantités A_t, B_t, C_t, rentrent tout à fait, comme cas particuliers, dans les séries que nous avons récemment [*] étudiées et sommées. Nous pourrions donc obtenir leurs sommes en appliquant simplement les formules générales que nous avons trouvées alors. Vu la simplicité des séries actuelles, nous préférons déterminer ces sommes directement.

13. Prenons d'abord la première de nos trois séries. Le coefficient a_n, étant de la même forme (**5**) que le coefficient $p_{n,t}$, où n seul varie, constitue le terme général d'une série récurrente proprement dite. Si donc nous appelons s l'une quelconque des racines de l'équation génératrice de cette série et σ le degré de multiplicité de cette racine, nous avons, comme on le sait, la formule

$$a_n = \Sigma \xi_s(n) s^n,$$

dans laquelle $\xi_s(n)$ représente un polynôme entier en n du degré $\sigma - 1$ et où le signe Σ s'étend à toutes les racines de l'équation génératrice.

14. Le polynôme $\xi_s(n)$ étant ainsi du degré $\sigma - 1$, on voit facilement que l'expression soumise (**13**) au signe Σ, divisée par $(2n)!$, est donnée par l'égalité

$$\frac{\xi_s(n) s^n}{(2n)!} = f_0 \frac{(\sqrt{s})^{2n}}{(2n)!} + f_1 \frac{(\sqrt{s})^{2n-1}}{(2n-1)!} + f_2 \frac{(\sqrt{s})^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots + f_{\sigma-1} \frac{(\sqrt{s})^{2n-\sigma+1}}{(2n-\sigma+1)!},$$

dans laquelle les coefficients $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{\sigma-1}$ sont indépendants du nombre entier variable n.

Par suite, dans le terme général de notre première série (**12**), la portion qui correspond à la racine s de l'équation génératrice peut s'écrire

$$(-1)^n \left[f_0 \frac{(x\sqrt{s})^{2n}}{(2n)!} + f_1 x \frac{(x\sqrt{s})^{2n-1}}{(2n-1)!} \right.$$
$$\left. + f_2 x^2 \frac{(x\sqrt{s})^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots + f_{\sigma-1} x^{\sigma-1} \frac{(x\sqrt{s})^{2n-\sigma+1}}{(2n-\sigma+1)!} \right],$$

et, pour obtenir la portion de la série totale qui correspond à cette

[*] *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure.*

même racine s, il nous suffit de sommer les résultats que fournit la présente expression, quand on y donne à n toutes les valeurs entières, depuis zéro jusqu'à $+\infty$.

15. On trouve, par cette sommation, un résultat de la forme

$$\varphi_s(x)\cos(x\sqrt{s}) + \psi_s(x)\sin(x\sqrt{s}),$$

le symbole $\varphi_s(x)$ représentant un polynôme entier en x ne contenant que des puissances paires de x, et le symbole $\psi_s(x)$ un polynôme entier en x ne contenant que des puissances impaires de x.

Il est visible, d'ailleurs, que ces deux polynômes $\varphi_s(x)$ et $\psi_s(x)$ ont pour degrés respectifs le plus grand nombre *pair* et le plus grand nombre *impair* non supérieurs à $\sigma - 1$.

Il résulte évidemment de tout cela que la première de nos séries (**12**) a pour somme l'expression

$$\Sigma\varphi_s(x)\cos(x\sqrt{s}) + \Sigma\psi_s(x)\sin(x\sqrt{s}),$$

dans laquelle les Σ s'étendent chacun à toutes les racines de l'équation génératrice.

16. Mais la racine quelconque s est (**5**) de la forme $(2j)^2$, le nombre j pouvant prendre toutes les valeurs $1, 2, 3, \ldots, \eta$, dont la dernière η est la partie entière de $\sqrt{t}$.

Mais, pour cette racine $(2j)^2$, la différence $\sigma - 1$ est (**5**) égale à $2t - 2j^2$.

Donc la somme de notre première série (**12**) peut s'écrire

$$\sum_1^\eta{}_j \sum_0^{t-j^2}{}_i g_{i,j}x^{2i}\cos 2jx + \sum_1^\eta{}_j \sum_0^{t-j^2-1} h_{i,j}x^{2i+1}\sin 2jx,$$

$g_{i,j}$ et $h_{i,j}$ étant des coefficients indépendants de x.

17. Par des raisonnements analogues à ceux qui précèdent, on verrait que la somme de notre seconde série (**12**) peut se mettre sous la forme

$$\Sigma\varphi_s(x)\sin(x\sqrt{s}) + \Sigma\psi_s(x)\cos(x\sqrt{s}),$$

dans laquelle les Σ s'étendent à toutes les racines de l'équation génératrice correspondante, et où $\varphi_s(x)$ et $\psi_s(x)$ représentent des polynômes entiers en x, n'en contenant, le premier que des puissances *paires*, le second que des puissances *impaires*, et ayant pour degrés respectifs le plus grand nombre *pair* et le plus grand nombre *impair* non supérieurs à $\sigma - 1$.

18. Mais, d'après les résultats indiqués précédemment (**5**), la racine quelconque s est, dans ce cas, de la forme $(2j+1)^2$, le nombre j pouvant prendre toutes les valeurs $0, 1, 2, \ldots, \eta$, dont la dernière η est la partie entière de $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{4t+1})$.

Mais, d'après les mêmes résultats (**5**), pour la racine $(2j+1)^2$, la différence $\sigma - 1$ est égale à $2t - 2j^2 - 2j$.

Donc la somme de notre seconde série (**12**) peut se mettre sous cette forme

$$\sum_0^{\eta}{}_j \sum_0^{t-j^2-j}{}_i g_{i,j}\, x^{2i} \sin(2j+1)x + \sum_0^{\eta}{}_j \sum_0^{t-j^2-j-1}{}_i h_{i,j}\, x^{2i+1} \cos(2j+1)x.$$

19. En opérant toujours de même, nous trouvons que la somme de notre troisième série (**12**) est de la forme

$$\Sigma\varphi_s(x)\cos(x\sqrt{s}) + \Sigma\psi_s(x)\sin(x\sqrt{s}),$$

dans laquelle les Σ présentent la même étendue et les symboles $\varphi_s(x)$ et $\psi_s(x)$ les mêmes significations que dans les formules analogues données précédemment (**15** et **17**).

20. Enfin, en nous reportant aux résultats (**5**) rappelés plusieurs fois déjà, nous voyons, dans ce cas de notre troisième série :

D'abord, que la racine quelconque s est de la forme $(2j+1)^2$, le nombre j pouvant prendre toutes les valeurs $0, 1, 2, \ldots, \eta$, dont la dernière η est la partie entière de $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{4t+1})$;

Ensuite que, pour cette racine $(2j+1)^2$, la différence $\sigma - 1$ est égale à $2t - 2j^2 - 2j$;

Et, par conséquent, que la somme de notre troisième série peut se mettre sous la forme

$$\sum_0^{\eta}{}_j \sum_0^{t-j^2-j}{}_i g_{i,j}\, x^{2i}\cos(2j+1)x + \sum_0^{\eta}{}_j \sum_0^{t-j^2-j-1}{}_i h_{i,j}\, x^{2i+1}\sin(2j+1)x.$$

§ IV. — *Formes des coefficients* A_t, B_t, C_t.

21. Si nous rapprochons les expressions des coefficients A_t, B_t, C_t, données au § II, des expressions trouvées au § III, pour les sommes des séries (**12**) correspondantes, nous pouvons écrire immédiatement

$$A_t = \alpha(x) + \sum_1^{\eta}{}_j \sum_0^{t-j^2}{}_i g_{i,j}\, x^{2i}\cos 2jx \qquad + \sum_1^{\eta}{}_j \sum_0^{t-j^2-1}{}_i h_{i,j}\, x^{2i+1}\sin 2jx,$$

$$B_t = \beta(x) + \sum_0^{\eta}{}_j \sum_0^{t-j^2-j}{}_i g_{i,j}\, x^{2i}\sin(2j+1)x + \sum_0^{\eta}{}_j \sum_0^{t-j^2-j-1}{}_i h_{i,j}\, x^{2i+1}\cos(2j+1)x,$$

$$C_t = \gamma(x) + \sum_0^{\eta}{}_j \sum_0^{t-j^2-j}{}_i g_{i,j}\, x^{2i}\cos(2j+1)x + \sum_0^{\eta}{}_j \sum_0^{t-j^2-j-1}{}_i h_{i,j}\, x^{2i+1}\sin(2j+1)x,$$

et ces égalités résolvent le problème que nous nous sommes proposé, car elles donnent les formes des coefficients A_t, B_t, C_t, et, par conséquent, celles des développements, suivant les puissances croissantes du module, des trois fonctions $\mathrm{Al}(x)$, $\mathrm{Al}_1(x)$, $\mathrm{Al}_2(x)$.

Seulement les présents résultats peuvent, par diverses considérations, être notablement simplifiés. C'est à ces simplifications que nous allons procéder.

22. Considérons en premier lieu la forme de A_t. On y peut supprimer le polynôme $\alpha(x)$, ou plutôt, ce qui est la même chose pour l'écriture, faire passer ce polynôme dans le deuxième terme du second membre.

Remplaçons, en effet, à la limite inférieure des Σ_j, l'unité par zéro. Ce changement n'altère en rien le troisième terme de notre second membre (**21**); mais il introduit au deuxième un polynôme entier en x, ne renfermant que des puissances paires de x et dont le degré est égal à $2t$, c'est-à-dire justement un polynôme capable (**9**) de remplacer $\alpha(x)$.

23. Dans les expressions (**21**) de B_t et de C_t, on peut de même supprimer $\beta(x)$ et $\gamma(x)$.

En effet, si l'on désigne par $\lambda(x)$ et $\mu(x)$ les deux premières fonctions elliptiques, on a les deux formules bien connues [*]

$$\mathrm{Al}_1(x) = \mathrm{Al}(x)\lambda(x), \quad \mathrm{Al}_2(x) = \mathrm{Al}(x)\mu(x).$$

Or, comme nous l'avons montré [**], chaque terme du développement, suivant les puissances du module k, soit de la fonction $\lambda(x)$, soit de la fonction $\mu(x)$, contient le sinus ou le cosinus d'un multiple *impair* de x. Donc il en est de même dans les développements, par rapport au module, des deux fonctions $\mathrm{Al}_1(x)$, $\mathrm{Al}_2(x)$. Donc, dans les coefficients B_t, C_t de ces derniers développements, les polynômes $\beta(x)$, $\gamma(x)$ sont identiquement nuls.

24. Nous pouvons donc écrire ces nouvelles égalités :

$$A_t = \sum_0^{\eta}{}_j \sum_0^{t-j^2}{}_i g_{i,j} x^{2i} \cos 2jx \qquad + \sum_0^{\eta}{}_j \sum_0^{t-j^2-1}{}_i h_{i,j} x^{2i+1} \sin 2jx,$$

$$B_t = \sum_0^{\eta}{}_j \sum_0^{t-j^2-j}{}_i g_{i,j} x^{2i} \sin(2j+1)x + \sum_0^{\eta}{}_j \sum_0^{t-j^2-j-1}{}_i h_{i,j} x^{2i+1} \cos(2j+1)x,$$

$$C_t = \sum_0^{\eta}{}_j \sum_0^{t-j^2-j}{}_i g_{i,j} x^{2i} \cos(2j+1)x + \sum_0^{\eta}{}_j \sum_0^{t-j^2-j-1}{}_i h_{i,j} x^{2i+1} \sin(2j+1)x.$$

Mais ce ne sont point encore là nos formules définitives, car les seconds membres de ces trois égalités peuvent, comme nous allons le voir, s'écrire d'une façon plus simple.

25. Rappelons-nous la signification (**5**) de la limite supérieure η des Σ_j dans l'expression de A_t. Ce nombre η est, dans cette expression, la partie entière de $\sqrt{t}$. Donc l'égalité qui donne A_t peut se mettre sous cette forme

$$A_t = \Sigma g_{i,j} x^{2i} \cos 2jx + \Sigma h_{i,j} x^{2i+1} \sin 2jx,$$

---

[*] BRIOT et BOUQUET, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 466.
[**] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 27 mai 1878.

les Σ s'étendant, le premier à tous les systèmes de valeurs des entiers non négatifs i et j qui satisfont à la fois aux deux relations

$$j \leqq \sqrt{t}, \quad i + j^2 \leqq t,$$

et le second à tous ceux qui satisfont à la fois aux deux relations

$$j \leqq \sqrt{t}, \quad i + j^2 \leqq t - 1.$$

On voit d'ailleurs immédiatement que, des deux relations correspondant au premier Σ, la seconde renferme la première, et qu'il en est de même pour les deux relations qui correspondent au second Σ.

26. Dans les expressions de B_t et de C_t, le nombre η est la partie entière de $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{4t+1})$. Nous pouvons donc écrire

$$B_t = \Sigma g_{i,j} x^{2i} \sin(2j+1)x + \Sigma h_{i,j} x^{2i+1} \cos(2j+1)x,$$
$$C_t = \Sigma g_{i,j} x^{2i} \cos(2j+1)x + \Sigma h_{i,j} x^{2i+1} \sin(2j+1)x,$$

les Σ s'étendant, dans chacune de ces nouvelles formules, le premier à tous les systèmes de valeurs de i et j qui satisfont aux deux relations

$$j \leqq \tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{4t+1}), \quad i + j^2 + j \leqq t,$$

et le second à tous ceux qui satisfont aux deux relations

$$j \leqq \tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{4t+1}), \quad i + j^2 + j \leqq t - 1.$$

Et l'on peut voir encore sans peine que, des deux relations correspondant au premier Σ, la seconde comprend la première, et qu'il en est de même pour les deux relations qui correspondent au second Σ.

27. En définitive, A_t est donné par la formule

$$A_t = \Sigma g_{i,j} x^{2i} \cos 2jx + \Sigma h_{i,j} x^{2i+1} \sin 2jx,$$

dans laquelle les Σ s'étendent, le premier à tous les systèmes de valeurs des entiers non négatifs i et j qui satisfont à la relation

$$i + j^2 \leqq t,$$

et le second à tous ceux qui satisfont à la relation

$$i + j^2 \leqq t - 1;$$

B_t et C_t sont donnés respectivement par les formules

$$B_t = \Sigma g_{i,j} x^{2i} \sin(2j+1)x + \Sigma h_{i,j} x^{2i+1} \cos(2j+1)x,$$
$$C_t = \Sigma g_{i,j} x^{2i} \cos(2j+1)x + \Sigma h_{i,j} x^{2i+1} \sin(2j+1)x,$$

dans chacune desquelles les Σ s'étendent, le premier à tous les systèmes de valeurs des entiers non négatifs i et j qui satisfont à la relation

$$i + j^2 + j \leqq t,$$

le second à tous ceux qui satisfont à la relation

$$i + j^2 + j \leqq t - 1.$$

28. Ces dernières formes des coefficients A_t, B_t, C_t sont fort analogues à celles que nous avons données [*] pour les coefficients des développements, par rapport au module, des fonctions elliptiques $\lambda(x)$, $\mu(x)$ et de leurs puissances. Ces deux sortes de formes diffèrent cependant entre elles, et d'une manière remarquable, par ce fait que les relations auxquelles satisfont, dans un même Σ, les entiers i et j ne renferment jamais j^2 lorsqu'il s'agit des fonctions elliptiques, et, au contraire, le renferment toujours lorsqu'il s'agit des fonctions de M. Weierstrass.

29. Quoi qu'il en soit de cette analogie et de cette différence, ce sont ces derniers résultats (**27**) que nous avons fait connaître dans notre Note à l'Académie des Sciences [**]. Comme nous l'avons dit dans notre Introduction, la formule qui donne A_t a été publiée pour la première fois par le R. P. Joubert [***]. Celles qui donnent B_t et C_t nous paraissent nouvelles.

---

[*] *Comptes rendus*, séance du 27 mai 1878.

[**] *Ibid.*, séance du 17 juin 1878.

[***] *Ibid.*, séances des 29 mai et 5 juin 1876.