JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

R. CLAUSIUS

Sur la déduction d'un nouveau principe d'Électrodynamique

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 4 (1878), p. 63-118.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1878_3_4__63_0>

Sur la déduction d'un nouveau principe d'Électrodynamique;

PAR M. R. CLAUSIUS,

Professeur à l'Université de Bonn.

Traduit de l'allemand par M. F. FOLIE.

Dans une courte Communication du 6 décembre 1875, j'ai énoncé un nouveau principe d'Électrodynamique, auquel j'ai donné une forme un peu plus simple dans une Communication du 7 février suivant. Dans ce qui suit, je vais m'occuper du développement nécessaire à l'établissement de ce principe, et montrer comment on peut, sans entrer dans aucune considération particulière sur la nature des forces électrodynamiques, déduire ce principe de faits bien établis, à l'aide d'hypothèses tout à fait générales, et qui ont déjà été faites fréquemment.

§ I. — *Différentes manières de voir sur l'électricité dynamique.*

On sait que M. W Weber a cherché à ramener tous les phénomènes électrodynamiques à un principe unique, à l'aide duquel il exprime la force que deux particules d'électricité en mouvement exercent l'une sur l'autre. Soient e et e' deux particules d'électricité supposées concentrées chacune en un point, et r leur distance mutuelle au temps t, l'action exercée par ces particules l'une sur l'autre consiste, d'après Weber, en une répulsion mesurée par l'expression

$$\frac{ee'}{r^2}\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{2}{c^2}r\frac{d^2r}{dt^2}\right],$$

dans laquelle c représente une constante.

Pour la déduction de cette formule, M. Weber est parti de cette idée que, dans un courant galvanique, des quantités égales d'électricité positive et d'électricité négative se meuvent en sens contraires, avec des vitesses égales, dans chaque élément conducteur. Cette idée est si compliquée, que déjà beaucoup de physiciens l'ont rejetée. Aussi longtemps, en effet, qu'il n'y a pas de motifs impérieux d'accepter l'hypothèse de ce double mouvement, il n'est pas permis d'abandonner cette idée plus simple, qu'un courant consiste dans le mouvement d'un seul fluide, et l'on doit chercher à en déduire l'explication des effets du courant galvanique.

Cette idée, qui a déjà été exprimée souvent et depuis longtemps, a reçu récemment, de M. C. Neumann, une forme plus déterminée, et il ajoute, à ce sujet, que ses réflexions concordent complétement avec celles que Riemann a déjà exprimées en 1854, dans la trentième réunion des naturalistes allemands. M. Neumann admet qu'un conducteur métallique renferme, à la vérité, dans chaque élément de volume, de l'électricité positive et de l'électricité négative, mais que la première seule est mobile, en ce sens qu'elle peut produire un courant dans le conducteur, tandis que la dernière est invariablement liée aux atomes pondérables.

Quant au point de savoir s'il est absolument nécessaire d'admettre, à côté de l'électricité positive mobile, une électricité négative liée aux atomes pondérables, ou bien si les forces attribuées à cette dernière électricité peuvent s'expliquer d'une autre manière, il y aurait encore peut-être différentes considérations à faire valoir. Toutefois, en traitant le sujet au point de vue mathématique, puisque les forces s'exercent absolument de la même manière qu'elles le feraient s'il y avait une électricité négative liée aux atomes, on peut considérer cette dernière comme existant, sans pour cela se décider relativement à son existence réelle. C'est dans ce sens que je prendrai pour base des considérations suivantes cette manière de voir, telle qu'elle a été formulée par M. Neumann.

§ II. — *Contradiction du principe de Weber avec l'hypothèse d'une seule électricité mobile dans un conducteur fixe.*

Posons-nous d'abord la question de savoir si le principe de Weber n'est pas en contradiction avec l'idée qu'il n'y a qu'une seule électricité qui puisse parcourir un conducteur fixe. Nous choisirons, à cette fin, la proposition expérimentale *qu'un courant galvanique fermé et constant, qui se trouve dans un conducteur au repos, n'exerce aucune force motrice sur l'électricité en repos,* et nous rechercherons si le principe de Weber conduit encore à cette proposition, lorsque l'on ne considère que l'une des deux électricités comme mobile.

Imaginons, au point x, y, z, une certaine quantité d'électricité, par exemple, *une unité* d'électricité positive, et au point x', y', z' un élément ds' d'un courant galvanique. Désignons par $h'ds'$ la quantité d'électricité positive en mouvement dans celui-ci. Cette quantité exerce, d'après Weber, sur l'unité d'électricité au repos, une répulsion qui est exprimée par

$$\frac{h'ds'}{r^2}\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{2}{c^2}r\frac{d^2r}{dt^2}\right],$$

expression qui, pour une valeur négative, indique naturellement une attraction. Dans le cas actuel, où la quantité r ne varie que par le mouvement de l'électricité qui se trouve dans l'élément de conducteur, nous pourrons poser

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds'}\frac{ds'}{dt},$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r}{ds'^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 + \frac{dr}{ds'}\frac{d^2s'}{dt^2},$$

et, dans cette dernière formule, nous devrons faire, pour un courant constant, $\frac{d^2s'}{dt^2} = 0$, si nous supposons le conducteur du courant homogène et partout de la même section, de sorte que h' a, pour toutes ses parties, une seule et même valeur. De cette manière, l'expression de la répulsion devient

$$\frac{h'ds'}{r^2}\left\{1+\frac{1}{c^2}\left[-\left(\frac{dr}{ds'}\right)^2+2r\frac{d^2r}{ds'^2}\right]\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\right\}.$$

Si l'on admet d'abord, avec Weber, que, dans l'élément de conducteur ds', il se meut une aussi grande quantité d'électricité négative en sens contraire, avec la même vitesse, on devra, pour obtenir la répulsion que celle-ci exercerait sur l'unité d'électricité au repos, affecter du signe — toute l'expression précédente, et en outre changer le signe du coefficient différentiel $\frac{ds'}{dt}$. Mais, comme ce coefficient différentiel n'entre qu'au carré, son changement de signe n'apportera aucune modification dans l'expression. L'action exercée par l'électricité négative serait donc égale et de signe contraire à celle qui est exercée par l'électricité positive, de sorte que ces deux forces se détruisent, et que l'élément de courant n'exercerait aucune action sur l'unité d'électricité au repos. Il en résulte donc que le principe de Weber, combiné avec l'idée de Weber sur le double mouvement de l'électricité, concorde avec la proposition expérimentale énoncée plus haut, puisque la force est nulle, non-seulement pour un courant fermé, mais encore pour tout élément de celui-ci en particulier.

Adoptons maintenant l'autre hypothèse, à savoir que l'électricité négative, qui se trouve dans le conducteur, ne s'écoule pas, mais soit invariablement fixée aux atomes pondérables. Alors l'action qu'elle exerce sur l'unité d'électricité au repos est simplement représentée par l'expression $-\frac{h'ds'}{r^2}$, donnée en Électrostatique. Il s'ensuit que les deux forces ne se détruisent pas dans ce cas, mais qu'il reste une répulsion donnée par l'expression

$$\frac{h'ds'}{c^2r^2}\left[-\left(\frac{dr}{ds'}\right)^2+2r\frac{d^2r}{ds'^2}\right]\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2.$$

On trouvera la composante de cette force, suivant l'axe des x, en multipliant cette expression par $\frac{x-x'}{r}$, et il en résulte l'équation suivante, si l'on représente cette composante par $\frac{d\mathfrak{X}}{ds'}ds'$:

$$(1)\qquad \frac{d\mathfrak{X}}{ds'}ds' = \frac{h'}{c^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 \frac{x-x'}{r^3}\left[-\left(\frac{dr}{ds'}\right)^2 + 2r\frac{d^2r}{ds'^2}\right]ds'.$$

On doit intégrer cette équation, relativement à s', dans toute l'étendue du courant fermé, pour obtenir la quantité $\mathfrak{X}$, c'est-à-dire la composante, suivant l'axe des x, de l'action que le courant tout entier exerce sur l'électricité au repos.

A cet effet, nous opérerons quelques transformations sur le second membre de cette équation. On peut poser

$$\frac{x-x'}{r^{\frac{3}{2}}} = 2\frac{d\sqrt{r}}{dx} \quad \text{et} \quad \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}}\left[-\left(\frac{dr}{ds'}\right)^2 + 2r\frac{d^2r}{ds'^2}\right] = 4\frac{d^2\sqrt{r}}{ds'^2}.$$

L'équation (1) devient ainsi

$$(2)\qquad \frac{d\mathfrak{X}}{ds'}ds' = \frac{8h'}{c^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 \frac{d\sqrt{r}}{dx}\frac{d^2\sqrt{r}}{ds'^2}ds'.$$

Dans celle-ci, on peut de plus poser

$$\begin{aligned}\frac{d\sqrt{r}}{dx}\frac{d^2\sqrt{r}}{ds'^2} &= \frac{d}{ds'}\left(\frac{d\sqrt{r}}{dx}\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\right) - \frac{d\sqrt{r}}{ds'}\frac{d^2\sqrt{r}}{ds'dx}\\ &= \frac{d}{ds'}\left(\frac{d\sqrt{r}}{dx}\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\right) - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\right)^2\right],\end{aligned}$$

ce qui transforme l'équation (2) en

$$(3)\qquad \frac{d\mathfrak{X}}{ds'}ds' = \frac{8h'}{c^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\left\{\frac{d}{ds'}\left(\frac{d\sqrt{r}}{dx}\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\right) - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\right)^2\right]\right\}ds'.$$

Si l'on intègre cette équation pour un circuit fermé, le premier terme de la parenthèse, qui est un coefficient différentiel, par rapport à s', donnera une valeur nulle. Le second terme, qui est un coefficient différentiel par rapport à x, peut être intégré sous le signe de la différentiation, puisque la variable x est indépendante de la variable s'; on trouvera ainsi

(4) $$\mathfrak{X} = -\frac{4h'}{c^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 \frac{d}{dx}\int\left(\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\right)^2 ds'.$$

On aura des expressions analogues pour les composantes de la force, suivant les axes des y et des z.

On voit immédiatement que l'intégrale qui entre dans ces expressions n'est pas nulle, et qu'en général ses coefficients différentiels, par rapport à x, y, z, ne seront pas nuls non plus. D'après cela, un courant fermé et constant, dans un conducteur au repos, devrait exercer une action sur l'électricité au repos; et cette action aurait un ergal, puisque ses composantes suivant les axes seraient représentées, en vertu de l'équation précédente, par les coefficients différentiels négatifs d'une quantité qui dépend des coordonnées de l'unité d'électricité au repos considérée. Le courant galvanique devrait donc, à la façon d'un corps chargé d'un excès d'électricité positive ou négative, produire une modification de la distribution de l'électricité, dans tout corps conducteur qui se trouve dans son voisinage [*]. Si l'on explique le magnétisme par des courants moléculaires électriques, on trouvera qu'un aimant exerce des actions analogues sur les corps conducteurs qui l'environnent. Or de semblables actions n'ont jamais été observées, malgré les nombreuses occasions que l'on aurait eues de le faire, et, par conséquent, on doit reconnaître comme une proposition expérimentale bien établie la proposition précédente qui exprime qu'elles n'ont pas lieu; or, puisque le résultat exprimé dans l'équation (4) est contradictoire avec cette proposition, on en déduit cette conclusion, que le principe de Weber est incompatible avec l'idée que l'électricité positive seule se meut dans un courant galvanique qui circule dans un conducteur fixe.

---

[*] La même conclusion a déjà été tirée par M. Riecke en 1873 (*Annales de Göttingue*, juillet 1873). Je ne connaissais pas cette circonstance lorsque j'ai écrit mon travail, et je viens de l'apprendre pendant l'impression, par un nouveau Mémoire de M. Riecke, qui vient de paraître (*Annales de Göttingue*, 28 juin 1876), et dans lequel le Mémoire précédent est cité.

§ III. — *Discussion d'une loi posée par Riemann relativement à la force, et envisagée au point de vue précédent.*

Tout récemment, après que ma première Communication sur le principe que j'ai posé avait été publiée, il a paru un Ouvrage [*] dans lequel on expose une autre loi électrodynamique donnée par Riemann dans ses Leçons; il sera utile, comme suite à ce qui précède, de considérer cette loi au même point de vue, c'est-à-dire de rechercher si elle est compatible avec l'hypothèse d'une seule électricité mobile dans le conducteur fixe.

Soient, comme plus haut, e et e' deux particules d'électricité supposées concentrées chacune en un point; x, y, z, x', y', z' leurs coordonnées rectangulaires au temps t; la composante suivant l'axe des x de la force que e' exerce sur e est, suivant Riemann (p. 327), exprimée par

$$(5)\qquad \mathrm{X} = \frac{ee'}{r^2}\frac{dr}{dx} + \frac{ee'}{c^2}\frac{d\left[\frac{2}{r}\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt}\right)\right]}{dt} + \frac{ee'}{c^2}\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dx}\left[\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz'}{dt}\right)^2\right];$$

et les composantes suivant les autres axes sont données par des expressions analogues.

Nous allons encore déterminer, au moyen de cette équation, l'action qu'un courant galvanique fermé exerce sur une unité d'électricité au repos. Posons donc

$$e = 1 \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0.$$

En outre, pour déterminer d'abord l'action exercée par l'électricité positive en mouvement dans l'élément du conducteur ds', remplaçons

[*] *Schwere Elektricität und Magnetismus. Nach den Vorlesungen von Bernhardt Riemann, bearbeitet von Karl Hattendorff;* Hannover, 1876.

e' par $h'ds'$. L'expression précédente deviendra

$$h'ds'\left\{\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dx}-\frac{1}{c^2}\frac{d\left(\frac{2}{r}\frac{dx'}{dt}\right)}{dt}+\frac{1}{c^2}\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dx}\left[\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz'}{dt}\right)^2\right]\right\}.$$

La dernière parenthèse peut se remplacer par $\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2$; et, dans le second terme de l'expression, on peut considérer x' et r comme fonction de s', et s' comme fonction de t; cela fait, on devra poser $\frac{d^2s'}{dt^2}=0$, puisque le courant est constant, et l'on aura

$$h'ds'\left[\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dx}-\frac{1}{c^2}\frac{d\left(\frac{2}{r}\frac{dx'}{ds'}\right)}{ds'}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2+\frac{1}{c^2}\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dx}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\right].$$

Partons d'abord de l'hypothèse que, dans l'élément de conducteur ds', une même quantité d'électricité négative circule, avec la même vitesse, en sens contraire; pour trouver la composante, suivant l'axe des x, de cette quantité d'électricité sur l'unité d'électricité au repos, nous n'aurons qu'à prendre l'expression précédente en signe contraire. Les deux forces se détruiront donc; et il en résulte que, dans l'hypothèse de deux électricités qui se meuvent dans le conducteur, la loi de Riemann est d'accord avec notre proposition expérimentale.

Partons au contraire de ce que l'électricité négative qui se trouve dans l'élément de conducteur ds' est au repos : la composante, suivant l'axe des x, de l'action qu'elle exerce sur l'unité d'électricité au repos, sera représentée par

$$h'ds'\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dx},$$

et nous aurons, par suite, en représentant par $\frac{d\mathfrak{X}}{ds'}ds'$ la composante, suivant l'axe des x, de l'action que l'élément de courant ds' exerce sur l'unité d'électricité au repos :

$$(6)\qquad \frac{d\mathfrak{X}_1}{ds'_1}ds'=\frac{h'}{c^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\left[-\frac{d\left(\frac{2}{r}\frac{dx'}{ds'}\right)}{ds'}+\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dx}\right]ds'$$

Si nous intégrons cette équation pour un courant fermé, le premier terme du second membre donnera une valeur nulle, et il viendra

$$\mathfrak{X} = \frac{h'}{c^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 \int \frac{1}{r^2}\frac{dr}{dx}\,ds',$$

ou bien

$$(7) \qquad \mathfrak{X} = -\frac{h'}{c^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 \frac{d}{dx}\int \frac{ds'}{r}.$$

On obtiendrait naturellement des expressions analogues pour les composantes suivant les deux autres axes.

L'intégrale précédente n'est pas nulle, et ses coefficients différentiels ne le sont généralement pas non plus. La loi de Riemann nous conduit donc au même résultat que celle de Weber, à savoir qu'un courant galvanique fermé, de même qu'un aimant, devrait exercer une action analogue à l'influence électrostatique, sur tout corps conducteur situé dans son voisinage. Et, comme ce résultat est en contradiction avec notre proposition expérimentale, nous pouvons dire également de la loi de Riemann *qu'elle est incompatible avec l'hypothèse d'une seule électricité mobile dans un conducteur fixe.*

§ IV. — *Expression des composantes de la force dans un système particulier de coordonnées.*

Cherchons maintenant à déduire, pour les composantes de l'action qu'une particule d'électricité e' en mouvement exerce sur une autre particule e aussi en mouvement, des expressions telles qu'elles donnent des résultats compatibles avec les proportions expérimentales, dans l'hypothèse qu'il n'y a qu'une seule électricité mobile dans le conducteur fixe.

Supposons que cette force dépende de la position mutuelle des particules, ainsi que des conditions de mouvement déterminées par les composantes de leur vitesse et de leur accélération; et formons, en conséquence, pour chacune des trois composantes suivant les axes, une expression générale qui dépende des coordonnées relatives de l'une des particules par rapport à l'autre, et des coefficients différentiels du premier et du second ordre, par rapport au temps, des coordonnées des deux particules. Nous ferons entrer provisoirement dans cette expression tous les termes possibles jusqu'au second ordre inclusivement, en entendant par là tous ceux qui proviennent d'une double différentiation par rapport au temps, et qui renferment comme facteurs, ou un coefficient différentiel du second ordre, ou deux coefficients différentiels du premier ordre.

Choisissons un système particulier de coordonnées. Soit prise, pour l'un des axes, la droite qui unit les deux points où se trouvent les particules d'électricité au temps t, comptée comme positive dans le sens de e' vers e. Soient l et l' les coordonnées, suivant cet axe, des deux particules. Les deux autres axes peuvent être pris arbitrairement, pourvu qu'ils soient perpendiculaires entre eux et au premier. Si l'on représente, en général, par m, n, m', n' les coordonnées des deux particules suivant ces axes, on devra poser, au temps t,

$$m = n = m' = n' = 0.$$

D'après cela, les coordonnées relatives, suivant ces deux axes, $m - m'$ et $n - n'$, sont aussi nulles au temps t, et l'ordonnée relative suivant la première direction, $l - l'$, a seule une valeur assignable, qui est égale à la distance mutuelle des deux particules, et peut être, par suite, représentée par r, conformément à la notation précédente. Il résulte de là que, dans ce système de coordonnées, les fonctions des coordonnées relatives, qui entrent dans les expressions des composantes de la force, ne peuvent être fonctions que de r. Ce système de coordonnées offre encore l'avantage d'autres simplifications; on voit immédiatement, en effet, par la manière dont les coefficients différentiels entreront dans les termes de l'expression, que certains termes ne peuvent avoir aucune influence sur la composante cherchée et que certains couples de termes doivent avoir une influence égale.

Commençons par chercher la composante suivant l'axe des l; représentons-la par Lee', et formons l'expression qui détermine la quantité L.

Cette expression doit d'abord renfermer un terme qui est indépendant des mouvements des particules, et qui représente la force électrostatique. Ce terme est parfaitement connu : c'est $\frac{1}{r^2}$.

Parmi les autres, considérons d'abord ceux qui ne renferment que des coefficients différentiels des coordonnées de la particule e.

Ceux qui ne renferment qu'un seul coefficient différentiel du premier ordre seront en général de la forme

$$A\frac{dl}{dt},\quad A'\frac{dm}{dt},\quad A''\frac{dn}{dt},$$

dans laquelle A, A', A'' représentent des fonctions de r; mais, relativement aux derniers, nous pouvons tirer immédiatement l'une des conclusions annoncées plus haut : car le terme $A'\frac{dm}{dt}$ change de signe avec $\frac{dm}{dt}$. Or la direction positive de l'axe des m se comporte, relativement à un point situé sur l'axe des l, absolument de la même manière que la direction négative; et, par suite, dans le cas actuel, où les deux points se trouvent sur l'axe des l, il n'y a pas de raison pour qu'un mouvement dans un sens ait pour conséquence une autre force, suivant l'axe des l, qu'un mouvement dans l'autre sens. D'après cela, ce terme doit disparaître de l'expression, c'est-à-dire qu'on doit avoir $A' = 0$. On peut conclure de même que $A'' = 0$. Des trois termes précédents, il ne reste donc que $A\frac{dl}{dt}$.

La même chose peut se dire des trois termes

$$A_1\frac{d^2l}{dt^2},\quad A'_1\frac{d^2m}{dt^2},\quad A''_1\frac{d^2n}{dt^2},$$

dont les deux derniers doivent aussi disparaître, de sorte que le premier reste seul.

Enfin, pour ce qui regarde les termes qui renferment comme facteurs les produits de deux coefficients différentiels du premier ordre, égaux ou inégaux, et dans lesquels entre par conséquent l'un des carrés ou des produits suivants :

$$\left(\frac{dl}{dt}\right)^2,\quad \left(\frac{dm}{dt}\right)^2,\quad \left(\frac{dn}{dt}\right)^2,\quad \frac{dl}{dt}\frac{dm}{dt},\quad \frac{dl}{dt}\frac{dn}{dt},\quad \frac{dm}{dt}\frac{dn}{dt},$$

on peut appliquer aux termes qui renferment les trois derniers produits ce qui vient d'être dit En effet, ces produits changent de signe avec $\frac{dm}{dt}$ et $\frac{dn}{dt}$, tandis que, dans la direction des m ou dans celle des n, le côté négatif se comporte, vis-à-vis des deux autres axes, absolument de la même manière que le côté positif. Des termes affectés de ces produits ne peuvent donc pas entrer dans l'expression. De plus, comme la position géométrique des axes des m et des n est la même, relativement à l'axe des l, les carrés $\left(\frac{dm}{dt}\right)^2$ et $\left(\frac{dn}{dt}\right)^2$ doivent avoir le même coefficient. Les termes considérés fourniront une somme de la forme

$$A'_2 \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + A_3 \left[\left(\frac{dm}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dn}{dt}\right)^2\right],$$

que nous transformons en

$$A_2 \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + A_3 \left[\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dm}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dn}{dt}\right)^2\right],$$

A_2 remplaçant la différence $A'_2 - A_3$. Mais, si nous désignons par v la vitesse de la particule e, nous aurons

$$\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dm}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dn}{dt}\right)^2 = v^2,$$

de sorte que la somme précédente pourra s'écrire

$$A_2 \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + A_3 v^2.$$

Si nous composons ensemble tous les termes qui ne renferment que des coefficients différentiels des coordonnées de la particule e, et que nous en désignions la somme par L_1, il viendra

$$L_1 = A \frac{dl}{dt} + A_1 \frac{d^2 l}{dt^2} + A_2 \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + A_3 v^2. \tag{8}$$

De même, nous pourrons écrire, si nous désignons par L_2, la somme des termes qui ne renferment que des coefficients différentiels des coordonnées de la particule e',

$$\text{(9)} \qquad L_2 = A_4 \frac{dl'}{dt} + A_5 \frac{d^2l'}{dt^2} + A_6 \left(\frac{dl'}{dt}\right)^2 + A_7 \rho'^2.$$

Il reste encore à considérer les termes qui renferment un produit de coefficients différentiels des coordonnées des deux particules, c'est-à-dire un des produits suivants :

$$\frac{dl}{dt}\frac{dl'}{dt}, \quad \frac{dm}{dt}\frac{dm'}{dt}, \quad \frac{dn}{dt}\frac{dn'}{dt},$$

$$\frac{dl}{dt}\frac{dm'}{dt}, \quad \frac{dl'}{dt}\frac{dm}{dt}, \quad \frac{dl}{dt}\frac{dn'}{dt}, \quad \frac{dl'}{dt}\frac{dn}{dt}, \quad \frac{dm}{dt}\frac{dn'}{dt}, \quad \frac{dm'}{dt}\frac{dn}{dt}.$$

Mais, de cette circonstance que les six derniers produits changent de signe avec $\frac{dm}{dt}$, $\frac{dm'}{dt}$, $\frac{dn}{dt}$, $\frac{dn'}{dt}$, on peut de nouveau conclure, comme plus haut, que les termes affectés de ces produits ne peuvent pas entrer dans l'expression des composantes de la force. Cette même conclusion n'est pas applicable au deuxième ni au troisième produit, quoique le changement de signe y ait lieu également; car, quand le coefficient différentiel $\frac{dm}{dt}$ change de signe, et que, par suite, la particule e change de direction dans son mouvement estimé suivant l'axe m, le nouveau mouvement se comporte à la vérité de la même manière que l'ancien, relativement à l'axe l, mais il se comporte autrement relativement au mouvement de la particule e', estimé suivant l'axe m et exprimé par $\frac{dm'}{dt}$. Si ces deux mouvements avaient lieu d'abord dans le même sens, ils ont lieu maintenant en sens contraire, et *vice versa*. Il n est donc pas nécessaire que les coefficients de ces deux produits soient nuls, mais il faut qu'ils soient égaux entre eux, puisque les directions m et n ont la même position géométrique par rapport à l'axe l.

Si nous appelons L_3 la somme des termes qui renferment des coefficients différentiels des coordonnées des deux particules, il résulte de ce qui précède que nous aurons

$$L_3 = A'_8 \frac{dl}{dt}\frac{dl'}{dt} + A_9 \left(\frac{dm}{dt}\frac{dm'}{dt} + \frac{dn}{dt}\frac{dn'}{dt}\right).$$

Nous allons procéder à la transformation de cette expression d'une manière analogue à celle dont nous avons déjà fait usage. Nous écrirons

$$L_3 = A_8 \frac{dl}{dt}\frac{dl'}{dt} + A_9 \left(\frac{dl}{dt}\frac{dl'}{dt} + \frac{dm}{dt}\frac{dm'}{dt} + \frac{dn}{dt}\frac{dn'}{dt}\right),$$

en posant A_8 au lieu de $A'_8 - A_9$. Or, si ε désigne l'angle des directions des deux particules e et e', on a

$$\frac{dl}{dt}\frac{dl'}{dt} + \frac{dm}{dt}\frac{dm'}{dt} + \frac{dn}{dt}\frac{dn'}{dt} = vv' \cos\varepsilon,$$

et l'équation précédente s'écrira par suite

$$L_3 = A_8 \frac{dl}{dt}\frac{dl'}{dt} + A_9 vv' \cos\varepsilon. \tag{10}$$

Nous venons de déterminer les différents groupes de termes dont la somme forme la quantité tout entière L, qui a pour expression

$$L = \frac{1}{r^2} + L_1 + L_2 + L_3. \tag{11}$$

Nous pourrons traiter d'une manière analogue les composantes de la force suivant les axes m et n, composantes que nous représenterons par $M ee'$ et $N ee'$; il n'est pas nécessaire que nous entrions de nouveau dans le détail du procédé, et il suffira d'écrire simplement les systèmes d'équations qui servent à la détermination de M et N. Ces systèmes sont

$$\tag{12} \left\{\begin{aligned} M_1 &= B \frac{dm}{dt} + B_1 \frac{d^2m}{dt^2} + B_2 \frac{dl}{dt}\frac{dm}{dt},\\ M_2 &= B_3 \frac{dm'}{dt} + B_4 \frac{d^2m'}{dt^2} + B_5 \frac{dl'}{dt}\frac{dm'}{dt},\\ M_3 &= B_6 \frac{dl}{dt}\frac{dm'}{dt} + B_7 \frac{dl'}{dt}\frac{dm}{dt},\\ M &= M_1 + M_2 + M_3; \end{aligned}\right.$$

$$\tag{13} \left\{\begin{aligned} N_1 &= B \frac{dn}{dt} + B_1 \frac{d^2n}{dt^2} + B_2 \frac{dl}{dt}\frac{dn}{dt},\\ N_2 &= B_3 \frac{dn'}{dt} + B_4 \frac{d^2n'}{dt^2} + B_5 \frac{dl'}{dt}\frac{dn'}{dt},\\ N_3 &= B_6 \frac{dl}{dt}\frac{dn'}{dt} + B_7 \frac{dl'}{dt}\frac{dn}{dt},\\ N &= N_1 + N_2 + N_3. \end{aligned}\right.$$

§ V. — *Expression des composantes de la force pour un système quelconque de coordonnées.*

Ayant exprimé les trois composantes de la force dans un système particulier de coordonnées, il nous sera facile de les exprimer dans un système quelconque.

Considérons un système d'axes rectangulaires, dans lequel les deux particules d'électricité ont les coordonnées x, y, z et x', y', z'. Représentons par Xee', Yee', Zee' les composantes, suivant les axes, de l'action que la particule e' exerce sur la particule e; il s'agit de déterminer les quantités X, Y, Z.

Pour exprimer X, désignons par (lx), (mx), (nx) les angles que l'axe des x fait avec les axes primitifs des l, m et n; nous aurons alors

$$X = L\cos(lx) + M\cos(mx) + N\cos(nx). \tag{14}$$

Mais on peut aussi exprimer les différentes parties constituantes de X, au moyen des parties correspondantes de L, M et N. Si l'on représente par X_1 la somme des termes de X, qui ne renferment que des coefficients différentiels des coordonnées de e; par X_2 la somme de ceux qui ne renferment que des coefficients différentiels des coordonnées de e'; par X_3 la somme de ceux qui renferment des produits des coefficients différentiels des coordonnées des deux particules, X_1 sera donné par l'équation

$$X_1 = L_1\cos(lx) + M_1\cos(mx) + N_1\cos(nx), \tag{15}$$

et l'on aura des équations analogues pour X_2 et X_3.

Si l'on remplace, dans l'équation précédente, L_1, M_1 et N_1 par leurs valeurs données dans (8), (12) et (13), et si l'on tient compte, dans l'addition, des relations

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dl}{dt}\cos(lx) + \left(\frac{dm}{dt}\right)\cos(mx) + \frac{dn}{dt}\cos(nx) = \frac{dx}{dt},\\ &\frac{d^2l}{dt^2}\cos(lx) + \frac{d^2m}{dt^2}\cos(mx) + \frac{d^2n}{dt^2}\cos(nx) = \frac{d^2x}{dt^2}, \end{aligned}\right. \tag{16}$$

il viendra

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} X_1 = {} & B\frac{dx}{dt} + B_1\frac{d^2x}{dt^2} + B_2\frac{dl}{dt}\frac{dx}{dt} \\ & + \left[(A - B)\frac{dl}{dt} + (A_1 - B_1)\frac{d^2l}{dt^2}\right. \\ & \qquad \left. + (A_2 - B_2)\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + A_3 v^2\right]\cos(lx). \end{aligned}\right.$$

Nous substituerons à $\cos(lx)$ sa valeur $\frac{x-x'}{r}$, en multipliant par $\frac{1}{r}$ tous les termes de la parenthèse carrée, et laissant $x - x'$ en facteur commun.

En outre, nous introduirons, au lieu des coefficients différentiels de l, ceux de r. Nous avons déjà dit plus haut que la distance mutuelle, au temps t, des particules e et e' est simplement représentée par la différence $l - l'$, parce qu'à cet instant les coordonnées m, n, m' et n' sont nulles. Mais, pour différentier r, on doit partir de l'expression générale

$$r = \sqrt{(l-l')^2 + (m-m')^2 + (n-n')^2},$$

et ce n'est qu'après la différentiation qu'on peut faire

$$m - m' = n - n' = 0.$$

Il y a encore à observer, relativement à cette différentiation, que les coordonnées l, m et n ne varient que par le mouvement de la particule e; l', m', n' par celui de la particule e', tandis que r varie par le mouvement des deux particules. On pourra distinguer les variations de r qui correspondent à ces deux mouvements en particulier, en regardant r comme fonction des deux arcs des trajectoires s et s', et ceux-ci mêmes comme fonctions de t. Les différentiations qui ne se rapportent qu'au mouvement de la particule e pourront alors s'effectuer comme il suit :

$$\frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{r}\left[(l-l')\frac{dl}{dt} + (m-m')\frac{dm}{dt} + (n-n')\frac{dn}{dt}\right],$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{dr}{ds}\frac{d^2s}{dt^2} = {} & -\frac{1}{r^3}\left[(l-l')\frac{dl}{dt} + (m-m')\frac{dm}{dt} + (n-n')\frac{dn}{dt}\right]^2 \\ & + \frac{1}{r}\left[\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dm}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dn}{dt}\right)^2\right] \\ & + \frac{1}{r}\left[(l-l')\frac{d^2l}{dt^2} + (m-m')\frac{d^2m}{dt^2} + (n-n')\frac{d^2n}{dt^2}\right]. \end{aligned}$$

Posant, dans ces équations, $m - m' = n - n' = 0$ et $l - l' = r$, et, en même temps,

$$\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dm}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dn}{dt}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

on obtiendra, pour les coefficients différentiels de l, les expressions suivantes :

$$(18) \qquad \frac{dl}{dt} = \frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt},$$

$$(19) \qquad \frac{d^2l}{dt^2} = \left[\frac{d^2r}{ds^2} + \frac{1}{r}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - \frac{1}{r}\right]\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{dr}{ds}\frac{d^2s}{dt^2},$$

Substituons ces expressions dans (17), en y remplaçant v^2 par $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ pour l'uniformité, et désignons, pour abréger, par C, C_1, C_2, C_3 les fonctions de r qui se trouvent entre parenthèses carrées dans cette équation, elle deviendra ainsi

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} X_1 = {} & B\frac{dx}{dt} + B_1\frac{d^2x}{dt^2} + B_2\frac{dr}{ds}\frac{dx}{dt}\frac{ds}{dt} \\ & + \left\{ C\frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt} + \left[C_1\frac{d^2r}{ds^2} + C_2\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + C_3\right]\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \right. \\ & \left. \qquad + C_1\frac{dr}{ds}\frac{d^2s}{dt^2} \right\}(x - x'). \end{aligned} \right.$$

On obtiendra de même

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} X_2 = {} & B_3\frac{dx'}{dt} + B_4\frac{d^2x'}{dt^2} + B_5\frac{dr}{ds'}\frac{dx'}{dt}\frac{ds'}{dt} \\ & + \left\{ C_4\frac{dr}{ds'}\frac{ds'}{dt} + \left[C_5\frac{d^2r}{ds'^2} + C_6\left(\frac{dr}{ds'}\right)^2 + C_7\right]\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 \right. \\ & \left. \qquad + C_5\frac{dr}{ds'}\frac{d^2s'}{dt^2} \right\}(x - x'). \end{aligned} \right.$$

Il reste encore à déterminer les quantités X_3 ; on devra, pour cela, remplacer, dans l'équation

$$X_3 = L_3\cos(lx) + M_3\cos(mx) + N_3\cos(nx),$$

L_3, M_3 et N_3 par leurs valeurs (10), (12) et (13). Mais si, dans l'addition, on a égard à la première des équations (16), il viendra

$$X_3 = B_6 \frac{dl}{dt}\frac{dx'}{dt} + B_7 \frac{dl'}{dt}\frac{dx}{dt} + \left[(A_8 - B_6 - B_7)\frac{dl}{dt}\frac{dl'}{dt} + A_9 \upsilon\upsilon' \cos\varepsilon\right] \cos(lx),$$

équation qui, conformément à ce qu'on a vu plus haut, peut s'écrire

$$(22) \quad \begin{cases} X_3 = B_6 \dfrac{dr}{ds}\dfrac{dx'}{dt}\dfrac{ds}{dt} + B_7 \dfrac{dr}{ds'}\dfrac{dx}{dt}\dfrac{ds'}{dt} \\ \quad + \left(C_8 \dfrac{dr}{ds}\dfrac{dr}{ds'} + C_9 \cos\varepsilon\right)(x - x')\dfrac{ds}{dt}\dfrac{ds'}{dt}. \end{cases}$$

Les quantités X_1, X_2, X_3 étant connues, on obtiendra X par l'équation

$$(23) \qquad X = \frac{x - x'}{r^3} + X_1 + X_2 + X_3.$$

On pourra naturellement représenter de même les quantités Y et Z; on n'aura, pour cela, qu'à changer, dans les équations précédentes, les quantités qui se rapportent à l'axe des x en celles qui se rapportent aux axes des y et des z, sans rien modifier à celles qui se rapportent à r.

Il s'agit actuellement de déterminer les fonctions de r, qui entrent dans les équations (20), (21) et (22), et qui sont, jusqu'à présent, indéterminées.

§ VI. — *Détermination des fonctions qui entrent dans* X_2.

Pour déterminer, tout d'abord, partiellement les fonctions qui entrent dans l'expression de X_2, nous ferons usage de la proposition qui a déjà été employée dans les §§ II et III, savoir : qu'*un courant quelconque fermé et constant dans un conducteur fixe n'exerce aucune force motrice sur l'électricité au repos.*

Imaginons donc, comme au § II, une unité d'électricité positive au repos, au point x, y, z, et, au point x', y', z', un élément de courant

ds', qui se compose de la quantité $h'ds'$ d'électricité positive en mouvement, et de la quantité $h'ds'$ d'électricité négative au repos. Ces deux quantités d'électricité exercent sur l'unité d'électricité au repos des actions dont les composantes, suivant l'axe des x, sont

$$h'ds'\left(\frac{x-x'}{r^3}+X_2\right) \quad \text{et} \quad -h'ds'\frac{x-x'}{r^3}.$$

La somme de ces composantes est la composante, suivant le même axe, de l'action exercée, par l'élément du courant, sur l'unité d'électricité, composante que nous représenterons, comme plus haut, par $\frac{d\mathfrak{X}}{ds'}ds'$. Nous aurons donc

$$\frac{d\mathfrak{X}}{ds'}ds' = h'ds'X_2,$$

expression dans laquelle nous devrons remplacer X_2 par sa valeur (21). Mais en même temps nous écrirons, au lieu de

$$\frac{dx'}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{d^2x'}{dt^2},$$

les expressions équivalentes

$$\frac{dx'}{ds'}\frac{ds'}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{d^2x}{ds'^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2+\frac{dx'}{ds'}\frac{d^2s'}{dt^2},$$

et nous pourrons faire $\frac{d^2s'}{dt^2}=0$, à cause de l'hypothèse que le courant est constant. Nous obtiendrons ainsi

$$(24)\left\{\begin{aligned}\frac{d\mathfrak{X}}{ds'}ds' = h'ds'\Bigg(&\left[B_3\frac{dx'}{ds'}+C_4(x-x')\frac{dr}{ds'}\right]\frac{ds'}{dt}\\ &+\left\{B_4\frac{d^2x'}{ds'^2}+B_5\frac{dr}{ds'}\frac{dx'}{ds'}\right.\\ &\quad\left.+\left[C_5\frac{d^2r}{ds'^2}+C_6\left(\frac{dr}{ds'}\right)^2+C_7\right](x-x')\right\}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\Bigg).\end{aligned}\right.$$

Cette expression, intégrée pour un courant fermé quelconque, doit donner une valeur nulle, d'après la proposition précédente. Mais, si l'intégrale de l'expression complète doit être nulle, quelle que soit l'intensite du courant, il faut que les intégrales des termes multipliés par $\frac{ds'}{dt}$ et par $\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2$ soient nulles séparément. Les expressions entre parenthèses qui forment ces termes doivent, d'après cela, être des coefficients différentiels complets par rapport à s', sans qu'il soit nécessaire d'admettre une relation particulière entre r et x'.

Pour que la première expression soit une différentielle complète par rapport à s', il faut, comme on le voit immédiatement à l'inspection de sa forme, qu'elle soit égale à

$$-\frac{d}{ds'}[B_3(x-x')];$$

et pour cela il est nécessaire que l'équation

$$(25) \qquad C_4 = -\frac{dB_3}{dr}$$

soit vérifiée.

De même, si l'on considère les termes de la seconde expression qui renferment des coefficients différentiels du deuxième ordre, on voit immédiatement qu'elle doit être identiquement égale au coefficient différentiel suivant :

$$\frac{d}{ds'}\left[B_4\frac{dx'}{ds'} + C_5(x-x')\frac{dr}{ds'}\right];$$

et, pour que cette condition soit remplie, il faut que les équations

$$(26) \qquad \begin{cases} B_5 = \dfrac{dB_4}{dr} - C_5, \\ C_6 = \dfrac{dC_5}{dr}, \\ C_7 = 0 \end{cases}$$

se vérifient.

De cette manière, les sept fonctions indéterminées qui entrent dans l'équation (21) se réduisent à trois, et cette équation peut s'écrire

$$(27) \qquad \begin{cases} X_2 = -\dfrac{d[B_3(x-x')]}{ds'}\dfrac{ds'}{dt} + \dfrac{d}{ds'}\left[B_4\dfrac{dx'}{ds'} + C_5(x-x')\dfrac{dr}{ds'}\right]\left(\dfrac{ds'}{dt}\right)^2 \\ \qquad + \left[B_4\dfrac{dx'}{ds'} + C_5(x-x')\dfrac{dr}{ds'}\right]\dfrac{d^2s'}{dt^2}. \end{cases}$$

§ VII. — *Détermination des fonctions qui entrent dans* X_1.

Pour traiter la quantité X_1, nous pouvons faire usage d'une proposition expérimentale analogue à la précédente, savoir : qu'*une quantité d'électricité en repos n'exerce aucune action sur un courant quelconque fermé et constant qui se meut dans un conducteur en repos*.

Cette proposition a besoin de quelque éclaircissement. Lorsque de l'électricité d'une certaine espèce, par exemple de l'électricité positive, se trouve accumulée en un lieu, celle-ci exerce par influence une action électrostatique sur tout corps conducteur placé dans son voisinage, et le conducteur du courant galvanique doit naturellement aussi subir cette action. La proposition précédente exprime seulement qu'en dehors de cette action il n'en subit pas encore une autre, occasionnée par ce courant, et dépendant, par suite, de l'intensité de celui-ci. Il faut encore remarquer, à ce sujet, que, si un courant galvanique fermé subissait une semblable action, un aimant devrait la subir aussi. Mais on a toujours observé que l'électricité au repos agit, sur un aimant au repos, de la même manière seulement que sur un morceau de métal non magnétique de la même grandeur et de la même forme. On n'hésitera donc pas à considérer la proposition précédente comme bien établie par l'expérience.

Pour l'appliquer, imaginons, au point x', y', z', une unité d'électricité en repos, et au point x, y, z un élément de courant ds, qui renferme la quantité d'électricité en mouvement hds, et la quantité d'électricité en repos $-hds$. Les composantes, suivant l'axe des x, des actions que ces deux électricités subissent de la part de l'unité d'électricité au repos sont

$$hds\left(\frac{x-x'}{r^3}+X_1\right) \quad \text{et} \quad -hds\,\frac{x-x'}{r^3}.$$

D'après cela, la composante de l'action que l'élément de courant subit de la part de l'unité d'électricité sera représentée par le produit $hdsX_1$, dans lequel nous aurons à remplacer X_1 par l'expression (20).

Et si, en même temps, nous écrivons de nouveau, au lieu de $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{d^2x}{dt^2}$,

$$\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{d^2x}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{dx}{ds}\frac{d^2s}{dt^2},$$

et que nous posions $\frac{d^2s}{dt^2} = 0$, puisque le courant doit être constant, cette expression deviendra

$$\begin{aligned} h\,ds\Bigg(&\left[B\frac{dx}{ds} + C(x - x')\frac{dr}{ds}\right]\frac{ds}{dt} \\ &+ \left\{B_1\frac{d^2x}{ds^2} + B_2\frac{dr}{ds}\frac{dx}{ds} + \left[C_1\frac{d^2r}{ds^2} + C_2\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + C_3\right](x - x')\right\}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\Bigg). \end{aligned}$$

De là nous pouvons tirer des conclusions tout à fait analogues à celles du paragraphe précédent. En effet, si l'unité d'électricité ne doit exercer, sur le courant tout entier, aucune action dirigée dans le sens de l'axe des x, l'intégrale de cette expression, étendue à tout le courant, doit être nulle, et l'on en conclut les équations suivantes, analogues à celles (25) et (26), qui précèdent,

$$(28) \qquad C = \frac{dB}{dr}, \quad B_2 = \frac{dB_1}{dr} + C_1, \quad C_2 = \frac{dC_1}{dr}, \quad C_3 = 0.$$

En outre, on peut tirer d'autres conclusions dans le cas actuel. La proposition, en effet, ne dit pas seulement que l'unité d'électricité ne tend à mouvoir le courant dans aucune direction, mais encore qu'elle ne tend à le faire tourner autour d'aucun axe, et de là on peut encore déduire certaines équations.

Comme le choix de l'axe est arbitraire, nous prendrons pour tel la droite menée par le point x', y', z', parallèlement à l'axe des z. Déterminons le moment de rotation autour de cet axe. L'expression précédente de la composante, suivant l'axe des x, de l'action que l'élément de courant ds subit de la part de l'unité d'électricité, peut se mettre, en vertu des équations (28), sous la forme

$$h\,ds\frac{dP}{ds},$$

dans laquelle P est une quantité déterminée par l'équation suivante :

$$(29) \qquad P = B(x - x')\frac{ds}{dt} + \left[B_1\frac{dx}{ds} + C_1(x - x')\frac{dr}{ds}\right]\left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

De même on a, pour la composante de cette force suivant l'axe des y, l'expression

$$h\,ds\frac{dQ}{ds},$$

dans laquelle Q est déterminé par l'équation

$$(30) \qquad Q = B(y - y')\frac{ds}{dt} + \left[B_1\frac{dy}{ds} + C_1(y - y')\frac{dr}{ds}\right]\left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

De là résulte, pour le moment de cette force autour de l'axe considéré, l'expression

$$h\left[(x - x')\frac{dQ}{ds} - (y - y')\frac{dP}{ds}\right]ds.$$

Or, si l'unité d'électricité en repos ne tend pas à faire tourner un courant fermé, l'intégrale de cette expression doit être nulle pour tout courant fermé; mais cette expression peut s'écrire

$$h\frac{d}{ds}[(x - x')Q - (y - y')P]\,ds - h\left(Q\frac{dx}{ds} - P\frac{dy}{ds}\right)ds,$$

et, comme le premier terme est une différentielle exacte, qui donnera une valeur nulle par l'intégration, il faut que le second donne aussi une valeur nulle. Celui-ci, si l'on y remplace P et Q par leurs valeurs (29) et (30), prend la forme

$$h\left[(x - x')\frac{dy}{ds} - (y - y')\frac{dx}{ds}\right]\left[B\frac{ds}{dt} + C_1\frac{dr}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right]ds,$$

et l'on voit immédiatement que cette expression n'est pas une différentielle exacte, et que, par suite, son intégrale ne peut être nulle, pour tout courant fermé, que si le second facteur entre parenthèses carrées devient lui-même nul; mais, pour qu'il en soit ainsi, indépendamment de l'intensité du courant, il faut que

$$(31)\qquad B = 0 \quad \text{et} \quad C_1 = 0.$$

Si l'on combine ces équations avec celles données sous le numéro (28), ces dernières deviendront

$$(32)\qquad C = 0, \quad B_2 = \frac{dB_1}{dr}, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 0.$$

De cette manière, les sept fonctions indéterminées qui entrent dans X_1 se réduisent à une seule, et l'équation (20) se transforme en

$$(33)\qquad X_1 = \frac{d}{ds}\left(B_1 \frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + B_1 \frac{dx}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}.$$

§ VIII. — *Détermination des fonctions qui entrent dans* X_3.

Pour déterminer les fonctions qui entrent dans l'expression de X_3, nous considérons l'action mutuelle de deux courants qui ont lieu dans des conducteurs en repos.

Soient, aux points x, y, z, et x', y', z', deux éléments de courant ds et ds', qui renferment les quantités d'électricité en mouvement $h ds$ et $h' ds'$, et les quantités d'électricité en repos $-h ds$ et $-h' ds'$. Pour déterminer l'action que l'élément de courant ds' exerce sur l'élément ds, nous avons à considérer les actions que la quantité d'électricité $h ds$ subit de la part de $h' ds'$ et de $-h' ds'$, et celles que la quantité d'électricité $-h ds$ subit également de la part de celles-ci. Les composantes, suivant l'axe des x, de ces quatre forces, sont

$$hh' ds ds' \left(\frac{x - x'}{r^3} + X_1 + X_2 + X_3\right),$$

$$-\, hh' ds ds' \left(\frac{x - x'}{r^3} + X_1\right),$$

$$-\, hh' ds ds' \left(\frac{x - x'}{r^3} + X_2\right),$$

$$hh' ds ds' \frac{x - x'}{r^3}.$$

Leur somme donne, pour la composante, suivant l'axe des x, de l'action que l'élément de courant ds' exerce sur l'élément ds, le produit

$$hh'ds\,ds'X_3,$$

dans lequel X_3 doit être remplacé par sa valeur (22).

Mais, auparavant, nous donnerons à cette dernière une forme plus commode pour l'intégration. Nous pouvons remplacer la quantité $\cos\varepsilon$, qui y entre, par un coefficient différentiel. De l'égalité

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

on tire, en effet, par une double différentiation,

$$(34) \qquad \frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} = -2\left(\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'}\right),$$

ou, comme l'expression entre parenthèses n'est autre que $\cos\varepsilon$,

$$(35) \qquad \cos\varepsilon = -\frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}.$$

Si nous remplaçons $\cos\varepsilon$ par cette valeur, et, en même temps, $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dx'}{dt}$ par $\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt}$, $\frac{dx'}{ds'}\frac{ds'}{dt}$, comme dans les paragraphes précédents, l'équation (22) s'écrira

$$(36) \qquad X_3 = \frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\left\{B_6\frac{dr}{ds}\frac{dx'}{ds'} + B_7\frac{dr}{ds'}\frac{dx}{ds} + \left[C_8\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} - \frac{1}{2}C_9\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\right](x - x')\right\}.$$

Il s'agit d'en faire disparaître le produit $C_8\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}$.

Dans ce but, introduisons une fonction E de r, liée à C_8 par la relation

$$E = \int r\,dr\int\frac{C_8}{r}dr,$$

de laquelle résultent

$$\frac{1}{r}\frac{dE}{dr} = \int\frac{C_8}{r}dr \quad \text{et} \quad r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dE}{dr}\right) = C_8.$$

Si nous différentions cette fonction E par rapport à s et s', nous pourrons donner à ses coefficients différentiels les formes suivantes :

$$\frac{dE}{ds} = \frac{dE}{dr}\frac{dr}{ds} = \frac{1}{2r}\frac{dE}{dr}\frac{d(r^2)}{ds},$$

$$\frac{d^2E}{ds\,ds'} = \frac{1}{2r}\frac{dE}{dr}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + \frac{1}{2}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dE}{dr}\right)\frac{dr}{ds'}\frac{d(r^2)}{ds}$$

$$= \frac{1}{2r}\frac{dE}{dr}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + C_8\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'},$$

et nous obtiendrons par là

$$C_8\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} = -\frac{1}{2r}\frac{dE}{dr}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + \frac{d^2E}{ds\,ds'}.$$

Si l'on remplace cette valeur de $C_8\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}$ dans l'équation (36), et que l'on dénote, pour abréger, par E_1 l'expression

$$-\frac{1}{2}\left(C_9 + \frac{1}{r}\frac{dE}{dr}\right),$$

il viendra

$$(37)\quad X_3 = \frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\left\{B_6\frac{dr}{ds}\frac{dx'}{ds'} + B_7\frac{dr}{ds'}\frac{dx}{ds} + \left[E_1\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + \frac{d^2E}{ds\,ds'}\right](x-x')\right\}.$$

En outre, on peut poser

$$\frac{d^2E}{ds\,ds'}(x-x') = \frac{d^2[E(x-x')]}{ds\,ds'} + \frac{dE}{ds}\frac{dx'}{ds'} - \frac{dE}{ds'}\frac{dx}{ds};$$

et si l'on écrit, pour abréger,

$$B_6 + \frac{dE}{dr} = E_2, \quad B_7 - \frac{dE}{dr} = E_3,$$

l'équation (37) deviendra

$$(38)\quad X_3 = \frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\left\{E_1(x-x')\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + E_2\frac{dr}{ds}\frac{dx'}{ds'} + E_3\frac{dr}{ds'}\frac{dx}{ds} + \frac{d^2[E(x-x')]}{ds\,ds'}\right\}.$$

Nous aurons à multiplier cette expression, ainsi transformée, de X_3

par $hh'dsds'$, pour obtenir la composante, suivant l'axe des x, de l'action que l'élément de courant ds' exerce sur l'élément ds.

Si, pour obtenir la composante, suivant cet axe, de l'action que le courant s' tout entier, supposé fermé, exerce sur ds, on effectue l'intégration par rapport à s', il se présentera quelques simplifications. Le dernier terme de l'expression précédente est, en effet, un coefficient différentiel par rapport à s'; l'avant-dernier renferme le facteur $\frac{dx}{ds}$, indépendant de s', et qui peut être regardé comme constant dans l'intégration, et son autre facteur $E_3\frac{dr}{ds'}$ est de nouveau un coefficient différentiel par rapport à s'. Ces deux termes donnent donc une valeur nulle, lorsqu'on intègre relativement à un circuit fermé, et il reste

$$(39)\quad hh'ds\int X_3 ds' = hh'\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}ds\int\left[E_1(x-x')\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + E_2\frac{dr}{ds}\frac{dx'}{ds'}\right]ds'.$$

Si l'on intègre encore cette expression par rapport à s, on aura la force avec laquelle le courant s' tend à écarter le courant s tout entier dans le sens de l'axe x. Cette intégration fait de nouveau disparaître un terme dans le cas où le courant s est aussi fermé. Dans le terme $E_2\frac{dr}{ds}\frac{dx'}{ds'}$, le facteur $\frac{dx'}{ds'}$ est, en effet, indépendant de s, et l'autre facteur $E_2\frac{dr}{ds}$, étant un coefficient différentiel par rapport à s, donne un résultat nul, par l'intégration. On a donc

$$(40)\qquad hh'\int\int X_3\,ds\,ds' = hh'\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\int\int E_1(x-x')\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}ds\,ds'.$$

Nous pourrons comparer ce résultat avec une conséquence parfaitement établie de la théorie d'Ampère, puique cette théorie peut être considérée comme tout à fait irréprochable, en tant qu'elle se rapporte aux actions exercées par des courants fermés les uns sur les autres. Or, d'après cette théorie, la force avec laquelle un courant fermé s' tend à mouvoir un autre courant fermé s, dans le sens de l'axe des x, est donnée par l'expression

$$-kii'\int\int\frac{x-x'}{r^3}\cos\varepsilon\,ds\,ds',$$

dans laquelle i et i' sont les intensités des deux courants, et k une constante. Si l'on remplace, dans cette expression, i et i' par $h\frac{ds}{dt}$ et $h'\frac{ds'}{dt}$, et $\cos\varepsilon$ par $-\frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}$, conformément à l'identité (35), elle prendra la forme

$$hh'\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\int\int\frac{k}{2r^3}(x-x')\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}ds\,ds'$$

et, en la comparant avec l'expression (40), on voit qu'il faut que

$$(41)\qquad E_1 = \frac{k}{2r^3}.$$

Pour déterminer encore l'autre fonction E_2, qui entre dans (39), nous ferons usage de cette proposition, bien établie par l'expérience, savoir qu'*un courant galvanique fermé et constant, qui a lieu dans un conducteur en repos, ne tend pas à modifier, en intensité, un autre courant galvanique fermé qui a lieu dans un conducteur en repos.*

L'expression (39), qui, après la substitution de la valeur trouvée pour E_1, s'écrit

$$hh'\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}ds\int\left[\frac{k(x-x')}{2r^3}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}+E_2\frac{dr}{ds}\frac{dx'}{ds'}\right]ds',$$

représente, d'après ce que nous avons vu, la composante, suivant l'axe des x, de l'action que le courant fermé s' exerce sur l'élément de courant ds, c'est-à-dire sur les deux quantités d'électricité $h\,ds$ et $-h\,ds$ qui se trouvent dans l'élément de conducteur ds. Or la quantité d'électricité négative $-h\,ds$ est en repos; et, d'après la proposition dont il a été fait usage au § VI, le courant galvanique fermé ne peut exercer aucune action sur l'électricité en repos. D'après cela, l'expression précédente peut aussi s'entendre en ce sens qu'elle représente la composante, suivant l'axe des x, de l'action *que le courant fermé s' exerce sur la quantité d'électricité $h\,ds$ qui se trouve dans l'élément de conducteur ds.*

Pour pouvoir représenter également, d'une manière commode, la composante de cette force qui est dirigée suivant l'élément ds, et qui tend, par suite, à augmenter l'intensité du courant, nous donnerons une forme un peu différente à notre expression. De l'égalité

$$r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$$

on tire

$$(42) \qquad \begin{cases} \dfrac{d(r^2)}{dx} = 2(x-x'), \\ \dfrac{d^2(r^2)}{dx\,ds'} = -2\dfrac{dx'}{ds'}. \end{cases}$$

Éliminant $x-x'$ et $\frac{dx'}{ds'}$ de l'expression précédente, au moyen de ces relations, en écrivant $\frac{1}{2r}\frac{d(r^2)}{ds}$ au lieu de $\frac{dr}{ds}$, celle-ci devient :

$$\frac{1}{4}hh'\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}ds\int\left[\frac{k}{r^3}\frac{d(r^2)}{dx}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} - \frac{E_2}{r}\frac{d(r^2)}{ds}\frac{d^2(r^2)}{dx\,ds'}\right]ds'.$$

Pour obtenir maintenant, au lieu de la composante de la force suivant l'axe arbitraire des x, la composante dirigée suivant l'élément ds, il suffira de remplacer les coefficients différentiels par rapport à x par les coefficients correspondants relatifs à s, et l'on aura

$$\frac{1}{4}hh'\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}ds\int\left[\frac{k}{r^3}\frac{d(r^2)}{ds}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} - \frac{E_2}{r}\frac{d(r^2)}{ds}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\right]ds',$$

ou, plus simplement,

$$\frac{1}{8}hh'\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}ds\int\left(\frac{k}{r^3} - \frac{E_2}{r}\right)\frac{d}{ds'}\left[\frac{d(r^2)}{ds}\right]^2 ds'.$$

Cette expression représente la force qui agit, dans un seul élément ds, dans le sens de l'accroissement de l'intensité du courant. Pour que celle-ci reste constante, il faut que l'intégrale de cette expression, étendue à tout le circuit fermé s, soit nulle. L'intégrale relative à s',

$$\int\left(\frac{k}{r^3} - \frac{E_2}{r}\right)\frac{d}{ds'}\left[\frac{d(r^2)}{ds}\right]^2 ds',$$

qui entre déjà dans l'expression, et qui multiplie l'élément ds, doit donc, ou bien être un coefficient différentiel par rapport à s, ou bien être nulle. Et, comme la première de ces conditions ne peut être remplie par aucune forme de la fonction E_2 de r, on devra déterminer cette dernière de telle sorte que l'intégrale soit nulle, ce qui exige qu'on ait

$$\frac{k}{r^3} - \frac{E_2}{r} = c,$$

c désignant une constante; car ce n'est qu'à cette condition que la quantité sous le signe intégral est une différentielle exacte, et que l'intégrale peut, par suite, être nulle pour tout circuit fermé.

De cette relation, il résulte

$$E_2 = \frac{k}{r^2} - cr;$$

mais, comme le terme $-cr$ donnerait, dans l'expression de X_3, un terme qui croîtrait en même temps que r, et qu'un pareil terme ne peut entrer dans l'expression de la composante de la force, la constante c doit être nulle, et l'on obtient ainsi pour E_2 l'expression

$$(43) \qquad E_2 = \frac{k}{r^2}.$$

Des quatre fonctions indéterminées de r, qui entraient dans l'expression (38) de X_3, il y en a donc deux qui sont déterminées; et, si on les remplace par leurs valeurs dans l'équation (38), celle-ci devient

$$(44) \quad X_3 = \left\{ \frac{k(x-x')}{2r^3} \frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + \frac{k}{r^2} \frac{dr}{ds} \frac{dx'}{ds'} + E_3 \frac{dr}{ds'} \frac{dx}{ds} + \frac{d^2[E(x-x')]}{ds\,ds'} \right\} \frac{ds}{dt} \frac{ds'}{dt}.$$

§ IX. — *Application des lois relatives à l'induction.*

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que des courants constants dans des conducteurs au repos; nous allons maintenant laisser de côté la restriction relative à la constance du courant, et supposer, en outre, que le conducteur s se meuve. Pour plus de simplicité, nous supposerons toutefois que le conducteur ne change pas de forme, et qu'il se meut seulement parallèlement à lui-même, de sorte que tous ses éléments parcourent, pendant l'élément de temps dt, un même élément de chemin $d\sigma$ dans une même direction.

Dans ce cas, chaque particule d'électricité positive, qui se trouve dans le conducteur s, est animée à la fois de deux mouvements, celui qu'elle a dans le conducteur, et dont la vitesse est $\frac{ds}{dt}$, et celui du conducteur lui-même, dont la vitesse est $\frac{d\sigma}{dt}$. Il s'ensuit que les coefficients différentiels, par rapport au temps, qui sont relatifs au mouvement de cette particule d'électricité, doivent maintenant être exprimés autrement que nous ne l'avons fait plus haut. Au lieu d'une expression de la forme

$$\frac{dU}{ds}\frac{ds}{dt},$$

dans laquelle U désigne une quantité qui dépend de la position de la particule d'électricité, nous aurons à poser

$$\frac{dU}{ds}\frac{ds}{dt}+\frac{dU}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dt};$$

et, au lieu d'une expression de la forme

$$\frac{d}{ds}\left(V\frac{dU}{ds}\right)\left(\frac{ds}{\partial t}\right)^2+V\frac{dU}{ds}\frac{d^2s}{dt^2},$$

dans laquelle V désigne une seconde quantité qui dépend de la position de la particule d'électricité, nous devons poser

$$\frac{d}{ds}\left(V\frac{dU}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\left[\frac{d}{d\sigma}\left(V\frac{dU}{ds}\right)+\frac{d}{ds}\left(V\frac{dU}{d\sigma}\right)\right]\frac{ds}{dt}\frac{d\sigma}{dt}+\frac{d}{d\sigma}\left(V\frac{dU}{d\sigma}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2\right.$$
$$\left.+V\frac{dU}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}+V\frac{dU}{d\sigma}\frac{d^2\sigma}{dt^2}.\right.$$

Si nous cherchons à déterminer la composante, suivant l'axe des x, de l'action que la particule d'électricité positive $h'ds'$, qui se trouve en ds', exerce sur la particule d'électricité positive hds, qui se trouve en ds, nous aurons à former, comme plus haut, pour exprimer cette composante, l'expression générale

$$hh'ds\,ds'\left(\frac{x-x'}{r^3}+X_1+X_2+X_3\right),$$

dans laquelle X_1, X_2 et X_3 devront être remplacés par les expressions (33), (27) et (44), après que nous y aurons fait les modifications que nous venons d'indiquer, ce qui donnera

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned} X_1 = {} & \frac{d}{ds}\left(B_1\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\left[\frac{d}{d\sigma}\left(B_1\frac{dx}{ds}\right)+\frac{d}{ds}\left(B_1\frac{dx}{d\sigma}\right)\right]\frac{ds}{dt}\frac{d\sigma}{dt} \\ & +\frac{d}{d\sigma}\left(B_1\frac{dx}{d\sigma}\right)\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2+B_1\frac{dx}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}+B_1\frac{dx}{d\sigma}\frac{d^2\sigma}{dt^2}, \end{aligned}\right.$$

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned} X_2 = {} & -\frac{d[B_3(x-x')]}{ds'}\frac{ds'}{dt}+\frac{d}{ds'}\left[B_4\frac{dx'}{ds'}+C_5(x-x')\frac{dr}{ds'}\right]\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 \\ & +\left[B_4\frac{dx'}{ds'}+C_5(x-x')\frac{dr}{ds'}\right]\frac{d^2s'}{dt^2}, \end{aligned}\right.$$

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned} X_3 = {} & \left\{\frac{k(x-x')}{2r^3}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}+\frac{k}{r^2}\frac{dr}{ds}\frac{dx'}{ds'}+E_3\frac{dr}{ds'}\frac{dx}{ds}+\frac{d^2[E(x-x')]}{ds\,ds'}\right\}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt} \\ & +\left\{\frac{k(x-x')}{2r^3}\frac{d^2(r^2)}{d\sigma\,ds'}+\frac{k}{r^2}\frac{dr}{d\sigma}\frac{dx'}{ds'}+E_3\frac{dr}{ds'}\frac{dx}{d\sigma}+\frac{d^2[E(x-x')]}{d\sigma\,ds'}\right\}\frac{d\sigma}{dt}\frac{ds'}{dt}. \end{aligned}\right.$$

Si nous cherchons, en outre, à déterminer la composante, suivant l'axe des x, de l'action que la particule d'électricité négative $-h'ds'$, qui se trouve en ds', exerce sur la particule d'électricité positive hds, qui se trouve en ds, nous n'aurons qu'à remplacer, dans l'expression précédente, $h'ds'$ par $-h'ds'$, et à faire en outre $\frac{ds'}{dt}=0$, puisque l'électricité négative qui se trouve en ds' est en repos. On trouvera ainsi $X_2=0$ et $X_3=0$, tandis que X_1 ne changera pas. L'expression de cette composante se réduit donc à

$$-hh'ds\,ds'\left(\frac{x-x'}{r^3}+X_1\right).$$

De là résulte, pour la composante, suivant l'axe des x, de l'action que la quantité d'électricité positive hds, qui se trouve en ds, subit de la part de l'élément de courant ds', c'est-à-dire des deux quantités d'électricité $h'ds'$ et $-h'ds'$ à la fois, l'expression

$$hh'\,ds\,ds'(X_2+X_3).$$

Si l'on intègre cette expression par rapport à s', on aura la composante, suivant l'axe des x, de l'action que la quantité d'électricité positive hds, qui se trouve en ds, subit de la part du courant s' tout entier; et, si nous représentons cette composante par $\mathfrak{X}hds$, nous aurons donc l'égalité

$$\mathfrak{X}=h'\int(X_2+X_3)\,ds', \tag{48}$$

dans laquelle on devra substituer à X_2 et X_3 leurs expressions (46) et (47). Si l'on effectue l'intégration, tous les termes de ces expressions, qui ont la forme de coefficients différentiels par rapport à ds', donneront zéro, et peuvent, par conséquent, être supprimés; on aura ainsi

$$\left\{\begin{aligned}\mathfrak{X}=h'\frac{d^2s'}{dt^2}&\int\left[B_4\frac{dx'}{ds'}+C_5(x-x')\frac{dr}{ds'}\right]ds'\\&+kh'\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\int\left[\frac{x-x'}{2r^3}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}+\frac{1}{r^2}\frac{dr}{ds}\frac{dx'}{ds'}\right]ds'\\&+kh'\frac{d\sigma}{dt}\frac{ds}{dt}\int\left[\frac{x-x'}{2r^3}\frac{d^2(r^2)}{d\sigma\,ds'}+\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\sigma}\frac{dx'}{ds'}\right]ds'.\end{aligned}\right. \tag{49}$$

On peut transformer cette égalité au moyen des équations

$$x-x'=r\frac{dr}{dx}\quad\text{et}\quad\frac{dx'}{ds'}=-\frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{dx\,ds'},$$

données au paragraphe précédent; elle devient alors

$$\left\{\begin{aligned}\mathfrak{X}=\frac{1}{2}h'\frac{d^2s'}{dt^2}&\int\left[-B_4\frac{d^2(r^2)}{dx\,ds'}+C_5\frac{dr}{dx}\frac{d(r^2)}{ds'}\right]ds'\\&+\frac{1}{2}kh'\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\int\left[-\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}+\frac{d\frac{1}{r}}{ds}\frac{d^2(r^2)}{dx\,ds'}\right]ds'\\&+\frac{1}{2}kh'\frac{d\sigma}{dt}\frac{ds'}{dt}\int\left[-\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\frac{d^2(r^2)}{d\sigma\,ds'}+\frac{d\frac{1}{r}}{d\sigma}\frac{d^2(r^2)}{dx\,ds'}\right]ds'.\end{aligned}\right. \tag{50}$$

Pour déduire de cette expression, relative à la direction x, l'expression correspondante relative à la direction de l'élément ds, nous n'aurons de nouveau qu'à changer les coefficients différentiels par rapport à x en ceux par rapport à s. Alors les deux termes qui figurent dans la seconde intégrale se détruisent, et nous obtenons, en désignant par $\mathfrak{S}h\,ds$ la composante, suivant la direction de l'élément ds, de l'action que la quantité d'électricité $h\,ds$ subit de la part du courant s', l'égalité

$$(51)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{S} &= \frac{1}{2}h'\frac{d^2s'}{dt^2}\int\left[-B_4\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + C_5\frac{dr}{ds}\frac{d(r^2)}{ds'}\right]ds' \\ &\quad + \frac{1}{2}kh'\frac{d\sigma}{dt}\frac{ds'}{dt}\int\left[-\frac{d\frac{1}{r}}{ds}\frac{d^2(r^2)}{d\sigma\,ds'} + \frac{d\frac{1}{r}}{d\sigma}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\right]ds'. \end{aligned}\right.$$

Le produit $\mathfrak{S}ds$ est ce qu'on appelle la *force électromotrice induite* dans l'élément de conducteur ds, et, par suite, l'intégrale $\int\mathfrak{S}ds$ est la force électromotrice induite dans le courant s tout entier.

L'intégration, effectuée par rapport à s, fait de nouveau disparaître un terme. Si nous considérons en effet l'intégrale double

$$\int\int\frac{d\frac{1}{r}}{ds}\frac{d^2(r^2)}{d\sigma\,ds'}\,ds\,ds',$$

il est à remarquer que la quantité

$$\frac{d^2(r^2)}{d\sigma\,ds'} = -2\left(\frac{dx}{d\sigma}\frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{d\sigma}\frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{d\sigma}\frac{dz'}{ds'}\right),$$

que nous pouvons également représenter par $-2\cos(\sigma s')$, si $(\sigma s')$ désigne l'angle compris entre l'élément de chemin $d\sigma$, parcouru par ds, et l'élément de courant ds' est indépendant de s, puisque le conducteur s se meut tout entier parallèlement à lui-même, et que tous ses éléments se meuvent, par suite, dans la même direction. On peut donc écrire l'intégrale précédente sous la forme

$$\int ds'\frac{d^2(r^2)}{d\sigma\,ds'}\int\frac{d\frac{1}{r}}{ds}\,ds.$$

L'intégration relative à s s'effectue ici immédiatement, et donne un résultat nul pour un courant fermé.

Considérons maintenant l'autre intégrale double

$$\int\int \frac{d\frac{1}{r}}{d\sigma} \frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} ds\,ds';$$

puisque le coefficient différentiel $\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}$, qui, en vertu de l'équation (35), est égal à $-2\cos\varepsilon$, ne varie pas pendant le mouvement du conducteur s, et, par suite, est indépendant de σ, nous pourrons poser

$$\frac{d\frac{1}{r}}{d\sigma} \frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} = \frac{d}{d\sigma}\left[\frac{1}{r} \frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\right],$$

et puisqu'en outre la quantité σ, par rapport à laquelle la différentiation doit être effectuée, est indépendante des quantités s et s', par rapport auxquelles nous aurons à intégrer toute l'expression, nous pourrons effectuer la différentiation en dehors du signe intégral, et écrire, au lieu de l'intégrale double qui précède,

$$\frac{d}{d\sigma}\int\int \frac{1}{r} \frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} ds\,ds'.$$

Nous aurons donc, pour déterminer la force électromotrice induite dans le conducteur s, l'équation

$$(52)\quad \left\{ \begin{aligned} \int \mathfrak{S}\,ds = \tfrac{1}{2}h' \frac{d^2 s'}{dt^2} \int\int \left[-\mathrm{B}_4 \frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + \mathrm{C}_5 \frac{dr}{ds} \frac{d(r^2)}{ds'} \right] ds\,ds' \\ + \tfrac{1}{2}kh' \frac{ds'}{dt} \frac{d\sigma}{dt} \frac{d}{d\sigma} \int\int \frac{1}{r} \frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} ds\,ds'. \end{aligned} \right.$$

Nous allons maintenant appliquer à cette équation la proposition suivante : *Si le conducteur s s'arrête dans une position déterminée, dans le voisinage du conducteur s', et que l'intensité du courant croisse, dans ce dernier, depuis zéro jusqu'à une valeur déterminée, ou* *bien si l'intensité du courant en s' a constamment cette valeur, et que s s'en rapproche jusqu'à cette même position, à partir d'un point infiniment éloigné, dans ces deux cas il se produit en s une égale force d'induction.*

Pour déterminer la force d'induction qui se produit pendant un certain temps, nous avons à multiplier par dt l'expression de la force électromotrice, et à intégrer entre les limites de l'intervalle de temps donné. Dans le premier des deux cas énoncés plus haut, $\frac{d\sigma}{dt} = 0$, de sorte que le second terme de l'expression (52) disparaît; dans le premier terme, l'intégrale double est indépendante du temps, et le coefficient différentiel $\frac{d^2 s'}{dt^2}$, dont ce terme est affecté comme facteur, doit seul être intégré par rapport à t, et donne $\frac{ds'}{dt}$. La force d'induction qui se produit dans ce cas est donc

$$\tfrac{1}{2} h' \frac{ds'}{dt} \int\int \left[-B_4 \frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + C_5 \frac{dr}{ds} \frac{d(r^2)}{ds'} \right] ds\,ds'.$$

Dans le second cas, $\frac{d^2 s'}{dt^2} = 0$, de sorte que le premier terme de l'expression disparaît; le second s'intègre immédiatement par rapport à t, et donne

$$\tfrac{1}{2} kh' \frac{ds'}{dt} \int\int \frac{1}{r} \frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} ds\,ds'.$$

Ces deux quantités devant être égales, en vertu de la proposition précédente, leur différence sera nulle, et l'on aura, par suite

$$(53) \qquad \int\int \left\{ \left[\frac{k}{r} + B_4 \right] \frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} - C_5 \frac{dr}{ds} \frac{d(r^2)}{ds'} \right\} ds\,ds' = 0.$$

Le second terme de la parenthèse carrée peut se transformer comme suit :

$$C_5 \frac{dr}{ds} \frac{d(r^2)}{ds'} = \frac{d}{ds} \left[\frac{d(r^2)}{ds'} \int C_5\, dr \right] - \frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} \int C_5\, dr,$$

et, puisque le premier des termes du second membre donne un résultat nul, lorsqu'on effectue l'intégration pour un circuit fermé, l'équation précédente devient

$$(54)\qquad \int\int\left[\frac{k}{r}+B_4+\int C_5\,dr\right]\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}ds\,ds'=0.$$

Si cette équation doit se vérifier pour deux courants fermés quelconques, l'expression qui s'y trouve comme facteur du coefficient différentiel du second ordre doit être constante; nous pourrons écrire, a désignant une constante,

$$(55)\qquad \frac{k}{r}+B_4+\int C_5\,dr=a.$$

Et, si nous représentons par un seul signe l'intégrale, diminuée de la constante a, en posant

$$G=\int C_5\,dr-a,$$

nous aurons

$$(56)\qquad \left\{\begin{aligned} B_4 &= -\left(\frac{k}{r}+G\right),\\ C_5 &= \frac{dG}{dr}.\end{aligned}\right.$$

Nous avons ainsi ramené à une seule deux des fonctions indéterminées qui entrent encore dans l'expression de X_2, et l'équation (27), qui sert à la détermination de cette quantité X_2, deviendra

$$X_2=-\frac{d[B_3(x-x')]}{ds'}\frac{ds'}{dt}+\frac{d}{ds'}\left[-\left(\frac{k}{r}+G\right)\frac{dx'}{ds'}+\frac{dG}{dr}(x-x')\frac{dr}{ds'}\right]\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2$$
$$+\left[-\left(\frac{k}{r}+G\right)\frac{dx'}{ds'}+\frac{dG}{dr}(x-x')\frac{dr}{ds'}\right]\frac{d^2s'}{dt^2},$$

ou bien

$$(57)\qquad \left\{\begin{aligned} X_2 = -\frac{d[B_3(x-x')]}{ds'}\frac{ds'}{dt}&+\frac{d}{ds'}\left\{-\frac{k}{r}\frac{dx'}{ds'}+\frac{d[G(x-x')]}{ds'}\right\}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\\ &+\left\{-\frac{k}{r}\frac{dx'}{ds'}+\frac{d[G(x-x')]}{ds'}\right\}\frac{d^2s'}{dt^2}.\end{aligned}\right.$$

§ X. — *Résumé des résultats obtenus.*

Après avoir donné, au moyen des considérations exposées dans les § VI à IX, aux expressions de X_1, X_2, X_3, les formes simplifiées (33), (57) et (44), nous les substituerons dans l'équation (23), savoir :

$$X = \frac{x-x'}{r^3} + X_1 + X_2 + X_3;$$

nous obtiendrons ainsi l'équation suivante, qui déterminera la composante, suivant l'axe des x, de l'action qu'une particule d'électricité, qui parcourt le chemin ds' pendant le temps dt, exerce sur une autre particule, qui parcourt le chemin ds pendant le même temps :

$$\begin{aligned} X = {} & \frac{x-x'}{r^3} + \frac{d}{ds}\left(B_1 \frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + B_1 \frac{dx}{ds}\frac{d^2 s}{dt^2} - \frac{d[B_3(x-x')]}{ds'}\frac{ds'}{dt} \\ & + \frac{d}{ds'}\left\{-\frac{k}{r}\frac{dx'}{ds'} + \frac{d[G(x-x')]}{ds'}\right\}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 + \left\{-\frac{k}{r}\frac{dx'}{ds'} + \frac{d[G(x-x')]}{ds'}\right\}\frac{d^2 s'}{dt^2} \\ & + \left\{\frac{k(x-x'}{2r^3}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + \frac{k}{r^2}\frac{dr}{ds}\frac{dx'}{ds'} + E_3 \frac{dr}{ds'}\frac{dx}{ds} + \frac{d^2[E(x-x')]}{ds\,ds'}\right\}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}. \end{aligned}$$

Il se présente quelques simplifications dans cette expression. Si l'on tient compte de ce que x' ne dépend que de s', tandis que r dépend de s et de s', on voit qu'on peut écrire

$$-\frac{d}{ds'}\left(\frac{k}{r}\frac{dx'}{ds'}\right)\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 - \frac{k}{r}\frac{dx'}{ds'}\frac{d^2 s'}{dt^2} + \frac{k}{r^2}\frac{dr}{ds}\frac{dx'}{ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt} = -k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right),$$

de sorte que trois des termes précédents se ramènent à un seul. En outre, on peut écrire, pour les mêmes raisons,

$$\frac{d}{ds}\left(B_1 \frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + B_1 \frac{dx}{ds}\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(B_1 \frac{dx}{dt}\right) - \frac{dB_1}{dr}\frac{dr}{ds'}\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Et si l'on pose, pour abréger,

$$E_3 \frac{dr}{ds'} - \frac{dB_1}{dr}\frac{dr}{ds'} = \frac{dF}{ds'},$$

et qu'on remplace B_1 et $-B_2$ par les signes plus simples H et J, l'équation qui détermine X prendra la forme

$$(58)\quad \left\{\begin{aligned} X = {} & \frac{x-x'}{r^3} + \frac{d[J(x-x')]}{ds'}\frac{ds'}{dt} + \frac{d^2[G(x-x')]}{ds'^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 \\ & + \frac{d[G(x-x')]}{ds'}\frac{d^2s'}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left(H\frac{dx}{dt}\right) - k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right) \\ & + \left\{\frac{k(x-x')}{2r^3}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + \frac{dF}{ds'}\frac{dx}{ds} + \frac{d^2[E(x-x')]}{ds\,ds'}\right\}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}. \end{aligned}\right.$$

Dans la déduction de cette équation, outre l'hypothèse qu'il n'y a qu'une seule électricité qui se meut dans un conducteur fixe, nous n'avons appliqué que des propositions relatives à l'action réciproque de deux courants fermés l'un sur l'autre; et, comme ces propositions peuvent être considérées comme parfaitement certaines, il est permis d'affirmer que l'expression de X, donnée dans cette équation, est la *seule possible* dans l'hypothèse d'une seule électricité mobile dans un conducteur solide.

Il est encore à remarquer que cette formule est admissible, non-seulement dans le cas où l'on suppose que dans le courant il n'y a qu'une seule électricité en mouvement, mais dans le cas même où l'on admet que le courant galvanique consiste en deux courants, l'un d'électricité positive, l'autre d'électricité négative, se mouvant en sens contraires, auquel cas il est indifférent que l'on considère ces deux courants comme égaux ou comme inégaux en intensité.

Si l'on voulait ajouter, aux propositions dont il a été fait usage ci-dessus, la condition que la loi, suivant laquelle la force dépend de la distance, a une forme simple, on pourrait déduire de la seule comparaison des termes, qui renferment encore des fonctions indéterminées de r, avec ceux dans lesquels les fonctions sont déjà déterminées, d'autres conséquences sur la forme de ces fonctions; on arriverait, par des considérations de cette nature, à ce résultat que les fonctions E, F, G et H doivent toutes avoir la forme $\frac{1}{r}\cdot$ const., de sorte qu'au lieu de ces fonctions indéterminées il ne resterait plus que des constantes indéterminées dans l'expression de X. Mais nous éviterons, pour le moment, de tirer des conséquences de cette sorte; nous allons plutôt faire usage encore d'une loi générale.

§ X. — *Application du principe de la conservation de l'énergie.*

Nous admettrons maintenant que les actions, que deux particules d'électricité en mouvement exercent l'une sur l'autre, satisfont, par elles-mêmes, au principe de la conservation de l'énergie; il faut, pour cela, que le travail, effectué par ces forces dans le mouvement des particules pendant l'élément de temps dt, puisse se représenter par la différentielle d'une quantité qui dépend des positions actuelles et de l'état de mouvement des particules.

Afin de pouvoir déterminer ce travail, supposons les expressions de Y et de Z formées à côté de l'expression (58) de X; et supposons de même formées les expressions des quantités X′, Y′, Z′ qui sont relatives à l'action que la particule e exerce sur la particule e', ce qui n'exige que la permutation des lettres accentuées et des non accentuées. Au moyen de ces expressions, formons la quantité

$$ee'\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}+X'\frac{dx'}{dt}+Y'\frac{dy'}{dt}+Z'\frac{dz'}{dt}\right)dt.$$

Pour que le principe de la conservation de l'énergie soit vérifié, il faut que cette quantité soit une différentielle exacte, c'est-à-dire que la somme des six produits entre parenthèses soit le coefficient différentiel, par rapport à t, d'une fonction des coordonnées et des vitesses composantes des deux particules.

Comme l'expression (58) de X est un peu longue, nous allons en considérer les termes, soit isolément, soit par petits groupes, afin de voir de quelle manière la somme des six produits en est formée.

Le *premier* terme est

$$\frac{x-x'}{r^3}\quad\text{ou}\quad -\frac{d\frac{1}{r}}{dx},$$

et la somme des six produits, relativement à ce terme, sera

$$-\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{d\frac{1}{r}}{dy}\frac{dy}{dt}+\frac{d\frac{1}{r}}{dz}\frac{dz}{dt}+\frac{d\frac{1}{r}}{dx'}\frac{dx'}{dt}+\frac{d\frac{1}{r}}{dy'}\frac{dy'}{dt}+\frac{d\frac{1}{r}}{dz'}\frac{dz'}{dt}\right)$$

et pourra se réduire à

$$-\frac{d\frac{1}{r}}{dt}.$$

Le *second* terme est

$$\frac{d[\mathrm{J}(x-x')]}{ds'}\frac{ds'}{dt}.$$

Pour le multiplier par le coefficient différentiel $\frac{dx}{dt}$, décomposons ce dernier dans le produit $\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt}$, et multiplions sous le signe de la différentiation par le facteur $\frac{dx}{ds}$, qui est indépendant de s'; nous aurons

$$\frac{d\left[\mathrm{J}(x-x')\frac{dx}{ds}\right]}{ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Formons les produits analogues relatifs aux axes des y et des z, et commençons par ajouter ces trois produits seulement, en tenant compte de la relation

$$(x-x')\frac{dx}{ds}+(y-y')\frac{dy}{ds}+(z-z')\frac{dz}{ds}=r\frac{dr}{ds},$$

nous obtiendrons

$$\frac{d\left(\mathrm{J}r\frac{dr}{ds}\right)}{ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Les trois autres produits donneront de même

$$\frac{d\left(\mathrm{J}r\frac{dr}{ds'}\right)}{ds}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Ces deux expressions sont égales entre elles; car, si nous posons

(59) $$\mathrm{K}=\int \mathrm{J}r\,dr,$$

le coefficient différentiel qui figure comme premier facteur dans ces expressions pourra se représenter par $\frac{d^2K}{ds\,ds'}$, et la somme des six produits prendra, en conséquence, la forme

$$2\frac{d^2K}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Le *troisième* et le *quatrième* terme de (58), savoir

$$\frac{d^2[G(x-x')]}{ds'^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2+\frac{d[G(x-x')]}{ds'}\frac{d^2s'}{dt^2},$$

pourront se traiter d'une manière tout à fait analogue. La somme des trois premiers produits donne

$$\frac{d^2\left[Gr\frac{dr}{ds}\right]}{ds'^2}\frac{ds}{dt}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2+\frac{d\left[Gr\frac{dr}{ds}\right]}{ds'}\frac{ds}{dt}\frac{d^2s'}{dt^2}:$$

en posant

(60) $$R=\int Gr\,dr,$$

cette somme pourra s'écrire

$$\frac{d^3R}{ds\,ds'^2}\frac{ds}{dt}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2+\frac{d^2R}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{d^2s'}{dt^2},$$

et les trois autres produits donneront de même

$$\frac{d^3R}{ds^2ds'}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{ds'}{dt}+\frac{d^2R}{ds\,ds'}\frac{ds'}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}.$$

La somme des six produits sera donc

$$\left(\frac{d^3R}{ds\,ds'^2}\frac{ds'}{dt}+\frac{d^3R}{ds^2ds'}\frac{ds}{dt}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}+\frac{d^2R}{ds\,ds'}\left(\frac{ds}{dt}\frac{d^2s'}{dt^2}+\frac{ds'}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}\right);$$

cette somme peut se réduire à

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2\mathrm{R}}{ds\,ds'}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}+\frac{d^2\mathrm{R}}{ds\,ds'}\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right)$$

et enfin à

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2\mathrm{R}}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right).$$

Le *cinquième* terme

$$\frac{d}{dt}\left(\mathrm{H}\frac{dx}{dt}\right)$$

donne, si l'on effectue d'abord la différentiation et qu'on multiplie ensuite par $\frac{dx}{dt}$,

$$\frac{d\mathrm{H}}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\mathrm{H}\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2};$$

cette somme peut aussi s'écrire sous la forme

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\mathrm{H}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right]+\frac{1}{2}\frac{d\mathrm{H}}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

On obtiendra de la même manière, pour l'autre produit relatif à l'axe des x, mais renfermant x' au lieu de x,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\mathrm{H}\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2\right]+\frac{1}{2}\frac{d\mathrm{H}}{dt}\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2.$$

Formant enfin les produits correspondants, relatifs aux axes des y et des z, on pourra réduire la somme des six produits à

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\mathrm{H}\left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\right]\right\}+\frac{1}{2}\frac{d\mathrm{H}}{dt}\left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\right].$$

Le *sixième* terme

$$-k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right)$$

donne, si l'on effectue la différentiation indiquée et qu'on multiplie par $\frac{dx}{dt}$,

$$-k\frac{d\frac{1}{r}}{dt}\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}-k\frac{1}{r}\frac{dx}{dt}\frac{d^2x'}{dt^2}.$$

On obtient de la même manière, pour l'autre produit relatif à l'axe des x, mais renfermant x' au lieu de x,

$$-k\frac{d\frac{1}{r}}{dt}\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}-k\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}.$$

La somme de ces deux produits peut s'écrire

$$-k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}\right)-k\frac{d\frac{1}{r}}{dt}\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}.$$

Formant les produits correspondants, relatifs aux axes des y et des z, et tenant compte de la relation

$$\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt}+\frac{dz}{dt}\frac{dz'}{dt}=-\frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt},$$

on obtiendra, pour la somme des six produits,

$$\frac{k}{2}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right]+\frac{k}{2}\frac{d\frac{1}{r}}{dt}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Le *septième* terme

$$\frac{k(x-x')}{2r^3}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt},$$

qui peut s'écrire

$$-\frac{k}{2}\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt},$$

donne, pour la somme des six produits,

$$-\frac{k}{2}\frac{d\frac{1}{r}}{dt}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Cette expression, et une partie de celle que nous avons obtenue pour le sixième terme, se détruisent; de sorte que le sixième et le septième terme réunis donnent simplement, pour la somme des six produits,

$$\frac{k}{2}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right].$$

Le *huitième* terme

$$\frac{dF}{ds'}\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}$$

donne, pour la somme des six produits, comme on le voit aisément

$$\frac{dF}{ds'}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{ds'}{dt}+\frac{dF}{ds}\frac{ds}{dt}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2.$$

Le *neuvième* et dernier terme

$$\frac{d^2[E(x-x')]}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}$$

peut s'écrire

$$\frac{d}{ds'}\left[\frac{dE}{ds}(x-x')+E\frac{dx}{ds}\right]\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt},$$

ou bien

$$\frac{d}{ds'}\left[r\frac{dE}{dr}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{dx}+E\frac{dx}{ds}\right]\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

En remplaçant encore $\frac{dx}{dt}$, qui doit multiplier cette expression, par $\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt}$, nous effectuerons la multiplication par $\frac{dx}{ds}$ sous le signe de la différentiation. Si nous formons ensuite les produits correspondants, relatifs aux axes des y et des z, et que nous fassions la somme de ces trois produits, nous obtiendrons

$$\frac{d}{ds'}\left[r\frac{dE}{dr}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2+E\right]\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{ds'}{dt},$$

et par suite, pour la somme des six produits,

$$\frac{d}{ds'}\left[r\frac{dE}{dr}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2+E\right]\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{ds'}{dt}+\frac{d}{ds}\left[r\frac{dE}{dr}\left(\frac{dr}{ds'}\right)^2+E\right]\frac{ds}{dt}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2.$$

Réunissant enfin toutes les expressions trouvées, pour la somme des six produits, dans les différents termes de (58), nous obtiendrons la somme totale

$$
\begin{aligned}
&-\frac{d\frac{1}{r}}{dt}+2\frac{d^2K}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}+\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2R}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right)\\
&+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{H\left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\right]\right\}+\frac{1}{2}\frac{dH}{dt}\left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\right]\\
&+\frac{k}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right)+\frac{dF}{ds'}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{ds'}{dt}+\frac{dF}{ds}\frac{ds}{dt}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\\
&+\frac{d}{ds'}\left[r\frac{dE}{dr}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2+E\right]\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{ds'}{dt}+\frac{d}{ds}\left[r\frac{dE}{dr}\left(\frac{dr}{ds'}\right)^2+E\right]\frac{ds}{dt}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2.
\end{aligned}
$$

Cette somme totale pourra s'écrire, en réunissant les termes qui sont des coefficients différentiels par rapport à t, et en ordonnant les autres,

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{-\frac{1}{r}+\left[\frac{k}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}+\frac{d^2R}{ds\,ds'}\right]\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}+\frac{1}{2}H\left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\right]\right\}\\
&\quad+2\frac{d^2K}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}+\frac{1}{2}\frac{dH}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3+\frac{1}{2}\frac{dH}{ds'}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^3\\
&\quad+\frac{d}{ds'}\left[r\frac{dE}{dr}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2+E+F+\frac{1}{2}H\right]\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{ds'}{dt}\\
&\quad+\frac{d}{ds}\left[r\frac{dE}{dr}\left(\frac{dr}{ds'}\right)^2+E+F+\frac{1}{2}H\right]\frac{ds}{dt}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2.
\end{aligned}
$$

Pour que les actions, que les deux particules d'électricité exercent l'une sur l'autre, satisfassent par elles-mêmes au principe de la conservation de l'énergie, il faut que toute cette expression soit un coefficient différentiel par rapport à t. Or cette condition est déjà manifestement remplie par la première partie de l'expression; nous n'avons donc plus qu'à en considérer la seconde partie, composée de cinq termes. Ces termes sont tous d'un degré supérieur au premier relativement aux coefficients différentiels du premier ordre $\frac{ds}{dt}$ et $\frac{ds'}{dt}$, tandis que les coefficients différentiels du second ordre $\frac{d^2s}{dt^2}$ et $\frac{d^2s'}{dt^2}$ n'y entrent pas comme facteurs. De là il résulte que ni l'un de ces termes, ni aucun groupe d'entre eux, ne peut être un coefficient différentiel par rapport à t. La somme de ces cinq termes doit donc être nulle, et il n'en peut être ainsi, pour des valeurs arbitraires de $\frac{ds}{dt}$ et $\frac{ds'}{dt}$, que si chacun des cinq termes est nul séparément. Nous obtenons ainsi les cinq équations de condition suivantes :

$$(61)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2K}{ds\,ds'} = 0, \\ \dfrac{dH}{ds} = 0, \\ \dfrac{dH}{ds'} = 0, \\ \dfrac{d}{ds'}\left[r\dfrac{dE}{dr}\left(\dfrac{dr}{ds}\right)^2 + E + F + \dfrac{1}{2}H\right] = 0, \\ \dfrac{d}{ds}\left[r\dfrac{dE}{dr}\left(\dfrac{dr}{ds'}\right)^2 + E + F + \dfrac{1}{2}H\right] = 0. \end{cases}$$

La première de ces équations, qui peut s'écrire aussi

$$\frac{dK}{dr}\frac{d^2r}{ds\,ds'} + \frac{d^2K}{dr^2}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} = 0,$$

ne peut être vérifiée, pour des trajectoires arbitraires des particules d'électricité, que si

$$\frac{dK}{dr} = 0,$$

d'où il résulte, en vertu de (59),

$$(62)\qquad J = 0.$$

La seconde et la troisième des équations (61)

$$\frac{dH}{ds} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dH}{ds'} = 0$$

donnent d'abord

$$H = \text{const}.$$

Mais, comme l'expression (58) de X renferme le terme H $\frac{d^2x}{dt^2}$ qui, pour le cas où H aurait une valeur assignable, représenterait une partie constituante de la force, indépendante de la distance mutuelle des particules d'électricité, ce qui ne peut pas être, on doit avoir

$$\text{H} = 0. \tag{63}$$

Les deux dernières des équations (61) s'écrivent, si l'on y fait $\text{H} = 0$, et que l'on effectue les différentiations indiquées,

$$\frac{d\left(r\frac{d\text{E}}{dr}\right)}{dr}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2\frac{dr}{ds'} + 2r\frac{d\text{E}}{dr}\frac{dr}{ds}\frac{d^2r}{ds\,ds'} + \frac{d(\text{E}+\text{F})}{dr}\frac{dr}{ds'} = 0,$$

$$\frac{d\left(r\frac{d\text{E}}{dr}\right)}{dr}\frac{dr}{ds}\left(\frac{dr}{ds'}\right)^2 + 2r\frac{d\text{E}}{dr}\frac{dr}{ds'}\frac{d^2r}{ds\,ds'} + \frac{d(\text{E}+\text{F})}{dr}\frac{dr}{ds} = 0.$$

Ces équations ne peuvent être vérifiées, pour des trajectoires quelconques des particules d'électricité, que si l'on a

$$\frac{d\text{E}}{dr} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\text{F}}{dr} = 0, \tag{64}$$

équations qui déterminent suffisamment E et F, puisque leurs coefficients différentiels seulement entrent dans (58).

Au moyen de ces déterminations, l'expression du travail effectué, pendant l'élément de temps dt, par les actions mutuelles des deux particules d'électricité, prendra cette forme simple :

$$ee'\frac{d}{dt}\left\{-\frac{1}{r} + \left[\frac{k}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + \frac{d^2\text{R}}{ds\,ds'}\right]\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right\}dt,$$

et l'équation (58) deviendra

$$\left\{\begin{aligned} \text{X} = {} & \frac{x-x'}{r^3} + \frac{d^2\left(\frac{d\text{R}}{dr}\frac{x-x'}{r}\right)}{ds'^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 + \frac{d\left(\frac{d\text{R}}{dr}\frac{x-x'}{r}\right)}{ds'}\frac{d^2s'}{dt^2} \\ & - k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right) + \frac{k(x-x')}{2r^3}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}. \end{aligned}\right. \tag{65}$$

Cette équation pourra encore s'écrire, plus simplement

$$(66)\quad \left\{\begin{aligned} X = &-\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\left[1+\frac{k}{2}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right]-k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right)\\ &+\frac{d}{dx}\left[\frac{d^2R}{ds'^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2+\frac{dR}{ds'}\frac{d^2s'}{dt^2}\right].\end{aligned}\right.$$

§ XII. — *Le potentiel électrodynamique.*

D'après le résultat auquel notre exposition vient de nous conduire, le travail effectué pendant l'élément de temps dt, par les actions que deux particules d'électricité en mouvement exercent l'une sur l'autre, est représenté par la différentielle de l'expression suivante :

$$-ee'\left\{\frac{1}{r}-\left[\frac{k}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}+\frac{d^2R}{ds\,ds'}\right]\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right\}.$$

Or, par la considération des forces électrostatiques, on sait que la quantité dont la différentielle négative représente le travail s'appelle le *potentiel* des deux particules d'électricité l'une sur l'autre; par analogie, on pourra donc envisager l'expression précédente, abstraction faite du signe —, comme un *potentiel*, dans un sens plus large. On pourra, en outre, considérer isolément la partie de ce potentiel qui se rapporte aux forces électrostatiques, et celle qui se rapporte aux forces dépendant du mouvement ou électrodynamiques, c'est-à-dire le potentiel *électrostatique* et le potentiel *électrodynamique*. Si nous représentons le premier par U et le second par V, nous aurons donc

$$(67)\qquad U=\frac{ee'}{r},$$

$$(68)\qquad V=-ee'\left[\frac{k}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}+\frac{d^2R}{ds\,ds'}\right]\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

L'expression que nous donnons ici du potentiel électrodynamique est la seule possible dans l'hypothèse d'une seule électricité en mouvement dans un conducteur solide.

La fonction indéterminée de r, qui y entre encore, et qui est désignée par R, ne peut pas se déterminer au moyen des effets des courants fermés; et, par suite, dans le cas où l'on voudrait la déterminer aussi, on en serait réduit, pour le moment, à se fonder sur des probabilités.

Si l'on fait l'hypothèse énoncée à la fin du § X, suivant laquelle la force serait une fonction simple de la distance, on arrive à la conclusion que

$$\mathrm{R} = k_1 r, \tag{69}$$

k_1 désignant une constante. L'équation (68) devient alors

$$\mathrm{V} = -\,ee'\left[\frac{k}{2r}\,\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + k_1\,\frac{d^2 r}{ds\,ds'}\right]\frac{ds}{dt}\,\frac{ds'}{dt}. \tag{70}$$

Si l'on cherche, en outre, par la détermination de la constante k_1, à rendre cette expression aussi simple que possible, on trouve d'abord deux valeurs qui fixent particulièrement l'attention en ce sens : ce sont les valeurs $k_1 = 0$ et $k_1 = -k$, qui donnent

$$\mathrm{V} = -\,k\frac{ee'}{2r}\,\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\,\frac{ds}{dt}\,\frac{ds'}{dt}, \tag{71}$$

$$\mathrm{V} = -\,k\frac{ee'}{r}\,\frac{dr}{ds}\,\frac{dr}{ds'}\,\frac{ds}{dt}\,\frac{ds'}{dt}. \tag{72}$$

Ces deux formules sont, dans leur aspect extérieur, à peu près d'une égale simplicité; mais, si l'on en fait usage dans le calcul, pour en déduire les composantes des forces, on trouve que la première donne des résultats beaucoup plus simples que la seconde, et, par suite, si l'on veut obtenir la loi de force qui est la plus simple possible, tout en satisfaisant aux phénomènes connus jusqu'à ce jour, on devra poser $k_1 = 0$, ou, ce qui revient au même, $\mathrm{R} = 0$.

Comme l'expression du potentiel électrodynamique est plus courte et plus facile à embrasser que celles des composantes des forces, elle est particulièrement propre à la comparaison des différentes formules fondamentales de l'Électrodynamique, posées jusqu'à ce jour (à l'exception de celle de Gauss, qui ne satisfait pas au principe de la conservation de l'énergie). Nous nous proposons de faire ici cette comparaison. L'équation qui sert à la détermination du potentiel électrodynamique est :

1° D'après Weber [*],

$$V = -\frac{1}{c^2}\frac{ee'}{r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2,$$

2° D'après Riemann [**],

$$V = -\frac{1}{c^2}\frac{ee'}{r}\left[\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}-\frac{dy'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}-\frac{dz'}{dt}\right)^2\right].$$

3° D'après l'analyse que je viens de faire :

a. Sous la forme la plus générale,

$$V = -ee'\left[\frac{k}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}+\frac{d^2 R}{ds\,ds'}\right]\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt};$$

b. Sous une forme plus simple,

$$V = -ee'\left[\frac{k}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}+k_1\frac{d^2 r}{ds\,ds'}\right]\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt};$$

c. Sous la forme la plus simple et, par suite, la plus probable,

$$V = -k\frac{ee'}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

On peut aussi mettre la dernière expression sous la forme

(73) $$V = k\frac{ee'}{r}\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt}+\frac{dz}{dt}\frac{dz'}{dt}\right),$$

---

[*] *Ann. de Pogg.*, volume jubilaire, p. 212.

[**] *Schwere, Elektricität und Magnetismus, nach den Vorlesungen von Bernh. Riemann*, bearbeitet von Hattendorff, Hannover, 1876, p. 326.

ou bien, si l'on représente par v et v' les vitesses des deux particules d'électricité, et par ε l'angle compris entre leurs directions,

$$(74) \qquad V = k\frac{ee'}{r} vv' \cos\varepsilon.$$

§ XIII. — *Déduction des composantes de la force au moyen du potentiel.*

Pour déduire maintenant, du potentiel électrostatique et électrodynamique, les composantes de la force, on aura à employer des équations, dans lesquelles le potentiel électrodynamique intervient de la même manière que la force vive dans les équations fondamentales de la Mécanique, données par Lagrange pour un système quelconque de coordonnées. Pour la composante, suivant l'axe des x, de l'action subie par la particule e, nous aurons l'équation

$$(75) \qquad \mathrm{X}ee' = \frac{d(\mathrm{V}-\mathrm{U})}{dx} - \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\frac{dx}{dt}}\right)$$

Dans celle-ci, nous devrons remplacer U et V par leurs expressions (67) et (68). De la première de ces expressions on tire simplement

$$(76) \qquad \frac{d\mathrm{U}}{dx} = ee'\frac{d\frac{1}{r}}{dx}.$$

La seconde devant être traitée, dans la différentiation, comme une fonction des six coordonnées et des six vitesses composantes, nous la transformerons de telle sorte que les vitesses composantes y entrent explicitement. Pour plus de facilité, nous décomposerons d'abord V en deux parties, en posant

$$(77) \qquad \mathrm{V} = \mathrm{V}_1 + \mathrm{V}_2,$$

V_1 et V_2 représentant les expressions suivantes :

$$V_1 = -\frac{kee'}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt} = \frac{kee'}{r}\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{dz'}{dt}\right),$$

$$\begin{aligned}
V_2 &= -ee'\frac{d^2R}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\\
&= -ee'\left(\frac{d^2R}{dx\,dx'}\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt} + \frac{d^2R}{dx\,dy'}\frac{dx}{dt}\frac{dy'}{dt} + \frac{d^2R}{dx\,dz'}\frac{dx}{dt}\frac{dz'}{dt}\right.\\
&\qquad + \frac{d^2R}{dy\,dx'}\frac{dy}{dt}\frac{dx'}{dt} + \frac{d^2R}{dy\,dy'}\frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt} + \frac{d^2R}{dy\,dz'}\frac{dy}{dt}\frac{dz'}{dt}\\
&\qquad \left. + \frac{d^2R}{dz\,dx'}\frac{dz}{dt}\frac{dx'}{dt} + \frac{d^2R}{dz\,dy'}\frac{dz}{dt}\frac{dy'}{dt} + \frac{d^2R}{dz\,dz'}\frac{dz}{dt}\frac{dz'}{dt}\right).
\end{aligned}$$

Nous obtiendrons ainsi, pour la première partie,

$$(78)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{dV_1}{dx} &= kee'\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{dz'}{dt}\right)\\
&= -\frac{k}{2}ee'\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt},\\
\frac{dV_1}{d\frac{dx}{dt}} &= \frac{kee'}{r}\frac{dx'}{dt},
\end{aligned}\right.$$

$$(79)\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dV_1}{d\frac{dx}{dt}}\right) = kee'\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right);$$

et pour la seconde partie

$$(80)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{dV_2}{dx} &= -ee'\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2R}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right),\\
\frac{dV_2}{d\frac{dx}{dt}} &= -ee'\left(\frac{d^2R}{dx\,dx'}\frac{dx'}{dt} + \frac{d^2R}{dx\,dy'}\frac{dy'}{dt} + \frac{d^2R}{dx\,dz'}\frac{dz'}{dt}\right)\\
&= -ee'\frac{d}{dx}\left(\frac{dR}{dx'}\frac{dx'}{dt} + \frac{dR}{dy'}\frac{dy'}{dt} + \frac{dR}{dz'}\frac{dz'}{dt}\right)\\
&= -ee'\frac{d}{dx}\left(\frac{dR}{ds'}\frac{ds'}{dt}\right),
\end{aligned}\right.$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dV_2}{d\frac{dx}{dt}}\right) = -ee'\frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{dR}{ds'}\frac{ds'}{dt}\right)\right],$$

ce qui pourra s'écrire

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dV_2}{d\frac{dx}{dt}}\right) = -ee'\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{dR}{ds'}\frac{ds'}{dt}\right)\right]$$

ou bien enfin

$$(81)\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dV_2}{d\frac{dx}{dt}}\right) = -ee'\frac{d}{dx}\left[\frac{d^2R}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt} + \frac{d^2R}{ds'^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 + \frac{dR}{ds'}\frac{d^2s'}{dt^2}\right].$$

Si l'on remplace dans l'équation (75) les expressions (76), (78), (79), (80) et (81), après avoir substitué à V, dans cette équation $V_1 + V_2$, on obtient

$$X = -\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\left[1 + \frac{k}{2}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right] - k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right) + \frac{d}{dx}\left[\frac{d^2R}{ds'^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 + \frac{dR}{ds'}\frac{d^2s'}{dt^2}\right],$$

ce qui est l'équation (66) donnée plus haut.

Le calcul se simplifie évidemment très-fort, si l'on attribue à R la valeur zéro, que nous avons regardée au § XII comme la plus probable. On obtient, dans ce cas,

$$(82)\quad \left\{\begin{aligned} X &= -\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\left(1 + \frac{k}{2}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right) - k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right) \\ &= -\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\left[1 - k\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{dz'}{dt}\right)\right] - k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right) \\ &= -\frac{d\frac{1}{r}}{dx}(1 - kvv'\cos\varepsilon) - k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right) \end{aligned}\right.$$

C'est sous cette forme que j'ai donné, dans une Communication provisoire du mois de février 1876, l'équation qui sert à la détermination de la composante de la force suivant l'un des axes coordonnés, et qui se forme naturellement d'une manière analogue relativement aux deux autres axes.

§ XIV. — *Loi de force pour des éléments de courant.*

Si l'on veut déterminer la composante, suivant l'axe des x, de l'action qu'un élément de courant ds' exerce sur un élément ds, on devra appliquer l'équation (66) aux quatre combinaisons suivantes de quantités d'électricité, prises deux à deux, $h\,ds$ et $h'ds'$, $h\,ds$ et $-h'ds'$, $-h\,ds$ et $h'ds'$, $-h\,ds$ et $-h'ds'$, en considérant les quantités $h\,ds$ et $h'ds'$ comme étant en mouvement, $-h\,ds$ et $-h'ds'$ comme étant en repos; et l'on aura à faire la somme algébrique des quatre expressions ainsi obtenues. On arrivera de cette manière à l'expression suivante de la composante cherchée :

$$hh'\,ds\,ds'\,k\left[-\frac{1}{2}\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}-\frac{d\frac{1}{r}}{ds}\frac{dx'}{ds'}\right]\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}$$

ou bien

$$hh'\,ds\,ds'\,k\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\cos\varepsilon-\frac{d\frac{1}{r}}{ds}\frac{dx'}{ds'}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Si l'on représente, pour les deux courants, respectivement par i et par i' l'intensité du courant, c'est-à-dire la quantité d'électricité qui traverse, pendant l'unité de temps, la section normale du conducteur, la quantité d'électricité étant mesurée d'après la même unité mécanique qui a été usitée dans toutes les équations précédentes, on pourra substituer i et i' aux produits $h\frac{ds}{dt}$ et $h'\frac{ds'}{dt}$, et l'on trouvera, pour la composante, suivant l'axe des x, de l'action que l'élément de courant ds' exerce sur l'élément ds, l'expression

$$kii'\,ds\,ds'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\cos\varepsilon-\frac{d\frac{1}{r}}{ds}\frac{dx'}{ds'}\right)$$

Dans cette expression ne figure pas la fonction indéterminée R, qui a disparu dans la formation de la somme mentionnée plus haut. Nous sommes donc arrivé, pour la composante, suivant une direction déterminée, de l'action qu'un élément de courant exerce sur un autre, à une expression entièrement déterminée, dont nous pouvons dire qu'elle est la seule qui soit compatible avec les deux hypothèses suivantes : qu'il n'y a qu'une seule électricité en mouvement dans un conducteur solide, et que les actions réciproques des deux particules d'électricité satisfont, par elles-mêmes, au principe de la conservation de l'énergie.