

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. MANNHEIM

Sur les surfaces réglées

Journal de mathématiques pures et appliquées 3^e série, tome 4 (1878), p. 57-60.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1878_3_4_57_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

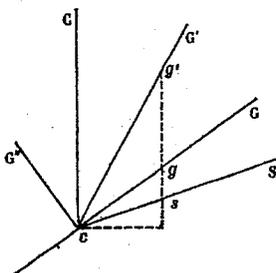
Sur les surfaces réglées ;

PAR M. A. MANNHEIM.

Le travail de M. Franke, *Sur la courbure des surfaces réciproques*, qui vient de paraître dans le numéro de décembre 1877 de ce journal, est l'occasion de cette courte Note.

Prenons comme plan de la figure le plan central relatif à une génératrice G d'une surface gauche (G) .

Appelons S la tangente en c à la ligne de striction (c) de (G) ; C la



direction conjuguée de S par rapport à l'indicatrice de (G) en c . Cette droite C est la caractéristique du plan central de G lorsqu'on passe du point central c au point infiniment voisin sur la ligne de striction (c). Menons sur le plan de la figure, et à partir de c , la droite G' faisant avec G un angle donné. En construisant ainsi une droite dans chacun des plans centraux de (G) , nous aurons pour le lieu de ces droites une surface (G') .

Je me propose de déterminer le rapport des paramètres de distribution des plans tangents à (G) et (G') pour les génératrices G, G' .

Considérons l'angle de grandeur invariable (G, G') , dont le sommet c décrit la ligne de striction (c) , dont le côté G coïncide successivement avec les génératrices de (G) et dont le plan reste tangent à cette surface aux différents points de (c) .

Le déplacement infiniment petit de cet angle est un déplacement hélicoïdal. Pendant ce déplacement, G et G' engendrent des éléments d'hélicoïde réglé qui se raccordent respectivement avec (G) et (G') le long de G et de G' .

L'axe du déplacement hélicoïdal est parallèle à C ; par suite, le plan central relatif à (G') doit être parallèle à cette droite, c'est-à-dire qu'il se confond avec le plan central de (G) , et alors c est le point central sur G' .

Ainsi la surface (G') a même ligne de striction que (G) ; ces deux surfaces sont circonscrites l'une à l'autre le long de cette ligne.

Pour construire le paramètre de distribution des plans tangents à l'hélicoïde réglé qui se raccorde avec G , voici la construction que je donne dans mon cours à l'École Polytechnique. On élève en c une perpendiculaire à C et l'on porte sur cette droite un segment égal à la plus courte distance entre G et l'axe du déplacement hélicoïdal. De l'extrémité de ce segment on mène une parallèle à C ; la portion sg interceptée sur cette droite par S et G est le paramètre de distribution cherché.

De même pour G' on a le paramètre sg' . Appelons $K_c, K_{c'}$ ces paramètres. On a alors

$$\frac{K_c}{K_{c'}} = \frac{sg}{sg'};$$

mais

$$sg = cs \frac{\sin(S, G)}{\sin(G, C)}, \quad sg' = cs \frac{\sin(S, G')}{\sin(G', C)}.$$

On a donc

$$(1) \quad \frac{K_c}{K_{c'}} = \frac{\sin(S, C) \sin(G', C)}{\sin(G, C) \sin(S, G')}.$$

Telle est la relation qui existe entre les paramètres de (G) et de (G') .

M. Franke a considéré le cas où G' est perpendiculaire à G ⁽¹⁾.

(1) C'est M. Chasles qui, le premier, a considéré ce cas (voir *Mémoire sur les surfaces engendrées par une ligne droite*).

Plaçons-nous dans cette hypothèse et appelons G'' la perpendiculaire à G menée du point c . Dans ce cas la formule (1) devient

$$(2) \quad \frac{K_g}{K_{g''}} = - \frac{\text{tang}(S, G)}{\text{tang}(G, C)}.$$

Transformons cette formule. Considérons une sphère de rayon 1 et sur cette sphère la courbe (γ) trace du cône qu'on obtient en menant du centre o de la sphère des rayons parallèles aux génératrices de (G).

Soit ol le rayon parallèle à G . Le plan normal à ce cône suivant ce rayon est parallèle au plan central relatif à G . Lorsqu'on passe au plan normal à ce cône, infiniment voisin de celui-ci, on a une caractéristique parallèle à C . Appelons oi cette caractéristique, le point i étant sur le plan tangent à la sphère en l .

Le segment il , qui est la tangente de l'angle iol , n'est autre que le rayon de courbure géodésique de la courbe (γ) au point l . Désignant par r ce rayon de courbure et remarquant que l'angle iol est égal à l'angle (G, C), la formule (2) peut s'écrire

$$(3) \quad \frac{K_g}{K_{g''}} = - \frac{\text{tang}(S, C)}{r}.$$

Cette formule revient à la formule (15) du travail de M. Franke.

Nous avons vu que la surface (G') circonscrite à (G) le long de (c) a aussi cette courbe pour ligne de striction. On peut encore démontrer cette propriété de la manière suivante. Menons respectivement par G et G' des plans normaux en c à (G). Ces plans déterminent un dièdre qui, d'après la construction des génératrices de (G'), reste de grandeur constante, quelle que soit la position du point c sur (c).

Déplaçons infiniment peu ce dièdre, de façon que son arête, toujours normale à (G), passe par c' , infiniment voisin de c sur (c) et que ses faces contiennent les génératrices de (G) et de (G') qui passent par c' .

Puisque c est le point central sur G , la face qui contient cette droite touche (G) à l'infini ; par suite, la caractéristique de cette face est parallèle à G , et elle est alors perpendiculaire à l'arête du dièdre. Mais, on sait que dans ces conditions la caractéristique de l'autre face est

aussi perpendiculaire à l'arête du dièdre ⁽¹⁾; la face du dièdre qui contient G' touche alors (G') à l'infini. Le plan tangent en c , qui est perpendiculaire à cette face, est donc le plan central pour G' et c est le point central sur cette droite. Comme c est un point arbitraire de (c) , cette courbe est alors la ligne de striction de (G') .

On démontre de la même manière que : *Si l'on construit comme précédemment une surface (G_1) en employant, au lieu de (c) , une courbe quelconque tracée sur (G) , les points où cette courbe rencontre la ligne de striction de (G) sont des points centraux relatifs à des génératrices de (G_1) .*

Ou autrement : *Les lignes de striction des surfaces (G) et (G_1) se coupent sur la courbe de contact de ces deux surfaces.*

⁽¹⁾ Voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 11 juin 1877.