JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

N. JOUKOVSKY

Sur un cas particulier de mouvement d'un point matériel

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 4 (1878), p. 425-428.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1878_3_4__425_0>

Sur un cas particulier de mouvement d'un point matériel;

PAR M. N. JOUKOVSKY,

Professeur à l'École Polytechnique de Moscou.

---

1. Ne se donnant pas la peine de trouver les intégrales générales des équations du mouvement d'un point matériel, on peut quelquefois donner des intégrales particulières de ces équations, en admettant que la vitesse initiale dépend des coordonnées initiales.

Nous allons montrer, dans ce qui suit, une manière bien facile de trouver de pareilles intégrales pour le mouvement sur un plan, quand les lignes de niveau seront des lignes isothermiques.

2. Soient

$$q = \text{const.} \tag{1}$$

l'équation de la famille des lignes de niveau, et

$$q_1 = \text{const.} \tag{2}$$

l'équation de la famille des lignes perpendiculaires aux lignes de niveau;

h et h_1 les paramètres différentiels des fonctions q et q_1;

ρ le rayon de courbure de la trajectoire;

g la force rapportée à l'unité de la masse;

$f(q)$ la fonction potentielle des forces;

v la vitesse;

θ l'angle entre la direction de la vitesse et la direction de la force;

ψ et φ les angles formés par ces directions et un axe donné.

En ayant égard à la figure, dans laquelle *ma* est la trajectoire du point matériel, *mb* la ligne de niveau et *mc* la ligne perpendiculaire aux lignes de niveau, nous pouvons écrire

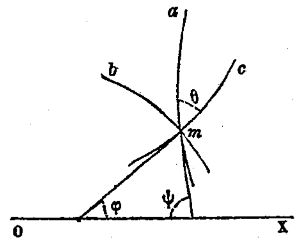
$$\frac{v^2}{\rho} = g \operatorname{sn}\theta = f'(q) h \operatorname{sn}\theta;$$

mais, si l'angle ψ est considéré comme une fonction de q_1, on aura

$$\frac{1}{\rho} = h_1 \frac{d\psi}{dq_1} \operatorname{sn}\theta;$$

d'où

$$\frac{d\psi}{dq_1} = \frac{h}{h_1} \frac{f'(q)}{v^2}.$$



A présent, si les lignes de niveau sont isothermiques, on pourra choisir les fonctions q et q_1, tellement que

$$h = h_1,$$

et notre formule deviendra

$$\frac{d\psi}{dq_1} = \frac{f'(q)}{v^2}.$$

Nous pouvons éliminer v^2 de cette équation à l'aide du théorème des forces vives,

(3) $$v^2 = 2f(q) + c,$$

et nous trouverons

(4) $$\frac{d\psi}{dq_1} = \frac{f'(q)}{2f(q) + c}.$$

3. Admettons encore que la fonction p satisfasse à l'équation

(5) $$\frac{f'(q)}{2f(q) + c} = \mu,$$

où μ est une quantité constante; après avoir intégré, nous aurons

(6) $$2f(q) + c = \beta e^{2\mu q}.$$

En même temps l'équation (4) donnera

$$(7)\qquad \frac{d\psi}{dq_1} = \mu,$$

$$(8)\qquad \psi + \alpha = \mu q_1,$$

β et α étant des constantes arbitraires.

En remarquant que

$$\theta = 180^\circ - \psi - \varphi,$$

nous trouverons, de la formule (8), l'équation différentielle de la trajectoire

$$(9)\qquad \operatorname{tang}(\mu q_1 + \varphi - \alpha) + \frac{dq_1}{dq} = 0.$$

Enfin, des équations (3) et (6), nous déduirons la vitesse pour chaque point de la trajectoire

$$(10)\qquad v^2 = \beta e^{2\mu q}.$$

Ainsi sera déterminé le mouvement d'un point matériel soumis à l'action de la force dont la fonction potentielle satisfait à l'équation (6); mais ce mouvement ne correspondra qu'à un cas particulier, la vitesse initiale étant donnée par l'équation (10).

4. Considérons, par exemple, le cas pour lequel les lignes (1) sont des cercles concentriques, et les lignes (2) les droites qui passent par le centre de ces cercles; après avoir désigné par r la distance du point considéré de ce centre commun, et remarqué que φ, dans ce cas, sera l'angle de r avec un axe donné, posons que

$$q = \log r, \quad q_1 = \varphi;$$

ce qui satisfait à la condition

$$h = h_1.$$

Les équations (6) et (10) deviendront

$$(11)\qquad 2f(q) + c = \beta r^{2\mu},$$

$$(12)\qquad v^2 = \beta r^{2\mu}.$$

La dérivée de la fonction $f(q)$, par rapport à r, nous donnera la force g,

$$g = \beta\mu r^{2\mu-1}; \tag{13}$$

elle sera attractive, si le coefficient μ est négatif, et répulsive, s'il est positif; car on voit de (12) que β doit être positif. L'équation (9) prendra la forme suivante :

$$d\log r + \frac{d\varphi}{\operatorname{tang}[\varphi(\mu+1)-\alpha]} = 0, \tag{14}$$

et pourra être intégrée

$$r^{\mu+1}\sin[(\mu+1)\varphi - \alpha] = \delta, \tag{15}$$

δ étant une constante.

L'équation (15) ne donne pas la trajectoire quand

$$\mu = -1;$$

mais, dans ce cas-là, l'équation (14) prend la forme

$$d\log r = \frac{d\varphi}{\operatorname{tang}\alpha},$$

d'où nous trouvons l'équation de la spirale logarithmique

$$r = \delta e^{\frac{\varphi}{\operatorname{tang}\alpha}}$$

Ainsi nous voyons qu'on peut trouver, de cette manière, le mouvement d'un point matériel dans le cas de la force centrale proportionnelle à r^k, quel que soit le nombre k; seulement la force doit être supposée attractive quand

$$\frac{k+1}{2} < 0,$$

et répulsive quand

$$\frac{k+1}{2} > 0.$$