JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

N. JOUKOVSKY

Sur la percussion des corps

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 4 (1878), p. 417-424.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1878_3_4__417_0>

Sur la percussion des corps;

PAR M. N. JOUKOVSKY,

Professeur à l'École Polytechnique de Moscou.

---

1. Poinsot, dans son Mémoire sur la percussion des corps [*], démontre que, dans les cas particuliers, on peut ramener la question relative à la percussion d'un corps et d'un point matériels dénués d'élasticité à la percussion de deux points. Les cas particuliers traités par l'auteur sont celui où la direction de percussion se trouve dans le plan passant par deux axes principaux d'inertie du corps, relatifs à son centre de gravité, et celui où la direction de percussion est perpendiculaire à ce plan.

Ce qui va suivre montre que la question la plus générale de percussion de deux corps libres, quel que soit leur degré d'élasticité, peut être ramenée à la percussion de deux points massifs.

2. Rappelons-nous auparavant les formules relatives à la percussion de deux billes.

Soient:

P l'impulsion des actions mutuelles;

m et m_1 les masses des billes;

v et v_1 les projections des vitesses des centres des billes sur la direction de P, où $v < v_1$;

u et u_1 les projections semblables après le choc.

---

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1857, 1859.

Nous aurons

$$(1) \qquad P = m(u - v) = m_1(v_1 - u_1),$$

$$(2) \qquad mv^2 + m_1 v_1^2 - mu^2 - m_1 u_1^2 = \varepsilon[m(v-u)^2 + m_1(v_1 - u_1)^2],$$

où ε est le coefficient du choc, qui est égal à zéro pour les billes parfaitement élastiques et à l'unité pour les billes dénuées d'élasticité.

Déformons l'équation (2) à l'aide de l'équation (1),

$$(3) \qquad u + v + \varepsilon(u - v) = u_1 + v_1 + \varepsilon(u_1 - v_1).$$

L'équation (3), réunie à l'équation (1), donne les quantités cherchées

$$(4) \qquad u = v + 2\frac{v_1 - v}{1+\varepsilon}\frac{m_1}{m + m_1},$$

$$(5) \qquad u_1 = v_1 - 2\frac{v_1 - v}{1+\varepsilon}\frac{m}{m + m_1},$$

$$(6) \qquad P = 2\frac{v_1 - v}{1+\varepsilon}\frac{mm_1}{m + m_1}.$$

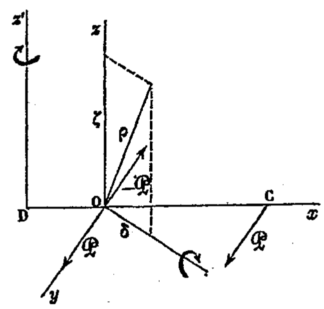
Les formules (4), (5) et (6) ne dépendent pas des rayons de billes; admettant que ces rayons diminuent à l'infini et que les masses des billes restent constantes, nous aurons le choc des points massifs.

3. Déterminons maintenant les changements des vitesses produites par le choc dans le mouvement d'un corps libre dont la masse est M. Menons par la direction de percussion P et le centre de gravité O du corps un plan, que nous nommerons plan de percussion. Abaissons du centre O une perpendiculaire sur la direction de P. Le point C de rencontre de cette perpendiculaire avec la direction de P sera, comme dans le Mémoire de Poinsot, le centre de percussion.

Posons $OC = h$.

Prenons les axes des coordonnées rectangulaires x, y, z, ayant pour origine le point O, pour le plan xOy le plan de percussion et pour l'axe Ox la droite OC.

En transportant le point d'application de la force P au point O, nous aurons une force P, dirigée vers l'axe Oy, et un couple (P, — P) dans



le plan xOy. La force P donnera au corps une vitesse de translation β dirigée vers l'axe Oy :

$$\beta = \frac{P}{M}. \tag{7}$$

Pour déterminer les vitesses angulaires θ_1, θ_2, θ_3 autour des axes Ox, Oy, Oz, produites par le couple (P, — P), représentons par

$$f(x, y, z) = 1 \tag{8}$$

l'équation d'un ellipsoïde d'inertie du corps par rapport au point O.

Nous aurons, à l'aide du théorème des moments,

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{d\theta_1}f(\theta_1,\theta_2,\theta_3) = 0,\\ &\frac{1}{2}\frac{d}{d\theta_2}f(\theta_1,\theta_2,\theta_3) = 0,\\ &\frac{1}{2}\frac{d}{d\theta_3}f(\theta_1,\theta_2,\theta_3) = Ph. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Soient θ la vitesse angulaire de rotation résultante, et ξ, η, ζ les coordonnées du point d'intersection de l'axe de cette rotation avec la surface d'ellipsoïde Nous pouvons présenter les équations (9) ainsi :

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{d\xi}f(\xi,\eta,\zeta)=0, \\ \dfrac{d}{d\eta}f(\xi,\eta,\zeta)=0, \\ \dfrac{\theta}{2\rho}\dfrac{d}{d\zeta}f(\xi,\eta,\zeta)=\mathrm{P}h, \end{cases}$$

ou $\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$.

Les deux premières équations (10) montrent que l'axe de rotation θ est le diamètre conjugué du plan de percussion par rapport à l'ellipsoïde (8). A l'aide du théorème bien connu des fonctions homogènes

$$\xi\frac{d}{d\xi}f(\xi,\eta,\zeta)+\eta\frac{d}{d\eta}f(\xi,\eta,\zeta)+\zeta\frac{d}{d\zeta}f(\xi,\eta,\zeta)=2f(\xi,\eta,\zeta)=2,$$

la troisième équation (10) peut être mise sous la forme

$$(11)\qquad \theta=\mathrm{P}h\rho\zeta.$$

En nommant δ la projection de ρ sur le plan xOy, nous pouvons décomposer la rotation θ par les deux suivantes :

$$(12)\qquad \theta_3=\mathrm{P}h\zeta^2,$$

$$(13)\qquad \sqrt{\theta_1^2+\theta_2^2}=\mathrm{P}h\zeta\delta,$$

dont la première a pour axe de rotation Oz, et la seconde la projection de ρ sur le plan xOy.

La rotation θ_3 se compose avec la translation β, et donne une rotation avec la même vitesse angulaire θ_3 autour d'un axe DZ′ parallèle à l'axe Oz. Cet axe coupe Ox dans un point D, pour lequel

$$\mathrm{OD}=\frac{\beta}{\theta_3}=\frac{1}{\mathrm{M}h\zeta^2}.$$

En posant

$$OD = i,$$

$$\frac{1}{M\zeta^2} = k^2, \tag{14}$$

nous trouvons

$$hi = k^2. \tag{15}$$

Les points C et D sont réciproques.

Ainsi la percussion augmente le mouvement du corps de deux rotations, dont l'une a pour vitesse angulaire $Ph\delta\zeta$ et pour axe δ, et l'autre a pour vitesse angulaire $Ph\zeta^2$ et pour axe la perpendiculaire au plan de percussion passant par le point D.

4. Nous chercherons maintenant à déterminer la grandeur de percussion à l'aide des vitesses des points s'entre-choquant des deux corps.

Soient v et u les projections des vitesses du point choqué sur la direction de la percussion P avant et après le choc. Le changement de v en u provient seulement de la rotation autour de l'axe perpendiculaire au plan du choc; nous pouvons donc écrire

$$u - v = Ph\zeta^2(h + i) = \frac{P}{M}\frac{h^2 + k^2}{k^2}.$$

Pour un autre corps M_1, qui se choque avec M, nous trouvons une formule semblable, en changeant P en $-$ P :

$$v_1 - u_1 = \frac{P_1}{M_1}\frac{h_1^2 + k_1^2}{k_1^2},$$

où h_1, k_1, v_1, u_1 ont pour le corps M_1 les mêmes significations que h, k, v, u pour le corps M, et

$$v_1 > v.$$

Nous trouvons maintenant les équations

$$(16)\qquad P = \frac{k^2}{h^2 + k^2} M(u - v) = \frac{k_1^2}{h_1^2 + k_1^2} M_1(v_1 - u_1).$$

qui se réduisent à (1), en posant

$$(17)\qquad m = M\frac{k^2}{h^2 + k^2}, \quad m_1 = M_1\frac{k_1^2}{h_1^2 + k_1^2}.$$

Nous nommerons m et m_1 les masses des corps ramenées au point du choc.

5. Il nous reste à considérer le changement de force vive des corps produit par le choc.

Soient

T et T_1 les forces vives des corps M et M_1 avant les chocs;
$\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}_1$ les forces vives des deux corps après le choc;
$\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{E}_1$ les forces vives des vitesses acquises ou perdues par les corps M et M_1 pendant le choc.

Nous aurons une équation connue [*]

$$T + T_1 - \mathfrak{T} - \mathfrak{T}_1 = \varepsilon(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_1),$$

dans laquelle ε est le coefficient du choc. Cette équation peut être mise sous la forme

$$(18)\qquad \mathfrak{T} - T + \varepsilon\mathfrak{E} = -(\mathfrak{T}_1 - T_1 + \varepsilon\mathfrak{E}_1).$$

Déterminons sa première partie.

Posons qu'avant le choc les projections de la vitesse du centre O sur les axes x, y, z seront

$$w_1, w_2, w_3,$$

[*] *Traité de Mécanique générale*, par Resal, t. I, p. 417.

et les vitesses angulaires autour de ces axes seront

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3.$$

Nous trouverons après le choc, pour les mêmes quantités,

$$w_1, \; w_2+\beta, \; w_3, \; \omega_1+\theta_1, \; \omega_2+\theta_2, \; \omega_3+\theta_3.$$

D'après l'équation (8), on peut écrire

$$\begin{aligned}
2\,\mathrm{T} &= \mathrm{M}(w_1^2+w_2^2+w_3^2)+f(\omega_1,\omega_2,\omega_3),\\
2\,\mathfrak{F} &= \mathrm{M}[w_1^2+(w_2+\beta)^2+w_3^2]+f(\omega_1+\theta_1,\,\omega_2+\theta_2,\,\omega_3+\theta_3),\\
2\,\varpi &= \mathrm{M}\beta^2+f(\theta_1,\theta_2,\theta_3).
\end{aligned}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}
&f(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=\frac{1}{2}\theta_3\frac{d}{d\theta_3}f(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=\mathrm{P}^2h^2\zeta^2,\\
&f(\theta_1+\omega_1,\,\theta_2+\omega_2,\,\theta_3+\omega_3)\\
&\quad=f(\theta_1,\theta_2,\theta_3)+\omega_1\frac{d}{d\theta_1}f(\theta_1,\theta_2,\theta_3)+\omega_2\frac{d}{d\theta^2}f(\theta_1,\theta_2,\theta_3)\\
&\qquad+\omega_3\frac{d}{d\theta_3}f(\theta_1,\theta_2,\theta_3)+f(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\\
&\quad=\mathrm{P}^2h^2\zeta^2+2\omega_3\mathrm{P}h+f(\omega_1,\omega_2,\omega_3).
\end{aligned}$$

Nous trouvons

$$\mathfrak{F}-\mathrm{T}+\varepsilon\varpi=\frac{\mathrm{P}}{2}\left[2(w_2+\omega_3h)+\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{M}}\frac{k^2+h^2}{k^2}+\varepsilon\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{M}}\frac{k^2+h^2}{k^2}\right],$$

ou, à cause de l'équation (16),

$$\mathfrak{F}-\mathrm{T}+\varepsilon\varpi=\frac{\mathrm{P}}{2}[u+v+\varepsilon(u-v)].$$

Pour le corps M_1, nous devons changer P en $-$ P, ce qui donne

$$(\mathfrak{F}_1-\mathrm{T}_1+\varepsilon\varpi_1)=-\frac{\mathrm{P}}{2}\,[(u_1+v_1+\varepsilon(u_1-v_1)].$$

En mettant les quantités trouvées dans l'équation (8) et la divisant par $\frac{P}{2}$, nous trouvons une équation toute semblable à l'équation (3).

6. La question de la percussion de deux corps libres est maintenant résolue. Il suffit seulement de concentrer dans les points s'entre-choquant des corps les masses ramenées, et de traiter le choc comme celui des points massifs, ayant le même coefficient du choc que les corps. En trouvant P par la formule (6), il reste à augmenter les mouvements des corps des rotations montrées dans le n° **2**.