JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. DARBOUX

**Sur l'approximation des fonctions de très-grands nombres et sur une classe étendue de développements en série**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série*, tome 4 (1878), p. 377-416.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1878_3_4__377_0>

# *Sur l'approximation des fonctions de très-grands nombres et sur une classe étendue de développements en série;*

**Par M. G. DARBOUX.**

## DEUXIÈME PARTIE.

### VIII.

Revenons aux polynômes de la série hypergéométrique et rappelons quelques-unes de leurs propriétés qui sont connues, ou dont on trouvera facilement la démonstration.

Voici d'abord différents développements de ces polynômes :

$$(1)\quad \begin{cases} X_n = 1 - \dfrac{n(\alpha+n)}{1.\gamma}x + \ldots + (-1)^n \dfrac{(\alpha+n)\ldots(\alpha+2n-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}x^n \\ \quad = F(-n, \alpha+n, \gamma, x), \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} X_n = (1-x)^n - \dfrac{n(n+\alpha-\gamma)}{1.\gamma}x(1-x)^{n-1} + \ldots \\ \qquad + (-1)^n \dfrac{(\alpha+n-\gamma)\ldots(\alpha-\gamma+1)}{\gamma\ldots(\gamma+n-1)}x^n \\ \quad = (1-x)^n F\left(-n, \gamma-\alpha-n, \gamma, \dfrac{x}{x-1}\right), \end{cases}$$

$$(3)\quad X_n = (-1)^n \frac{(n+\alpha-\gamma)\ldots(1+\alpha-\gamma)}{\gamma\ldots(\gamma+n-1)} F(-n, \alpha+n, \alpha-\gamma+1, 1-x).$$

On a, en particulier,

$$(4)\qquad X_n(1) = (-1)^n \frac{(n+\alpha-\gamma)\ldots(\alpha-\gamma+1)}{\gamma.(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)},$$

valeur qui n'est égale à $1$ que si $\alpha - \gamma = \gamma - 1$ et, dans ce cas, la comparaison des développements précédents montre que le polynôme ne change pas de valeur absolue, si l'on change $x$ en $1 - x$. La valeur approchée pour $n$ très-grand de $X_n(1)$ est

$$(5) \qquad X_n(1) = \frac{\Gamma(\alpha - \gamma + 1)}{\Gamma(\gamma)} n^{\alpha - 2\gamma + 1},$$

valeur qui peut être nulle, très-grande ou très-petite. Ainsi l'on voit que, dans le voisinage de la valeur $x = 1$, l'ordre varie brusquement. Le polynôme qui était de l'ordre de $n^{\frac{1}{2} - \gamma}$ devient de celui de $n^{\alpha - 2\gamma + 1}$ Par exemple, si $\alpha = 1$, $\gamma = \frac{1}{2}$, il est fini pour toute valeur fixe de $x$ comprise entre zéro et $1$, et il devient infiniment grand pour $x = 1$.

Les développements, ou l'équation différentielle, montrent que tout est symétrique par rapport aux deux limites. On peut changer $x$ en $1 - x$, pourvu qu'on échange $\gamma - 1$ et $\alpha - \gamma$ : l'équation différentielle demeure la même. Cette remarque nous servira souvent à abréger les discussions.

On a, entre trois polynômes consécutifs, la relation

$$(6) \frac{(n+\alpha)(n+\gamma)}{2n+\alpha+1}(X_{n+1} - X_n) + (2n+\alpha)x X_n + \frac{n(n+\alpha-\gamma)}{2n+\alpha-1}(X_{n-1} - X_n) = 0,$$

qui est généralement du troisième degré en $n$; mais ce degré s'abaisse dans certains cas.

D'abord, si $\alpha = 1$, elle devient

$$(n+\gamma)(X_{n+1} - X_n) + 2(2n+1)x X_n + (n+1-\gamma)(X_{n-1} - X_n) = 0.$$

En second lieu, si l'on a $\alpha = 2\gamma - 1$, elle devient

$$\frac{n+\alpha}{2}(X_{n+1} - X_n) + (2n+\alpha)x X_n + \frac{n}{2}(X_{n-1} - X_n) = 0;$$

enfin, si $\alpha = 2\gamma$,

$$\frac{n+2\gamma}{2n+2\gamma+1}(X_{n-1} - X_n) + 2x X_n + \frac{n}{2n+2\gamma-1}(X_{n-1} - X_n) = 0.$$

Dans tous les autres cas, elle reste du troisième degré.

D'ailleurs, de l'identité

$$\begin{aligned}\frac{d^p}{dx^p}\mathrm{F}(\alpha,\beta,\gamma\; x) = {} & \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+p-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+p-1)} \times \beta.(\beta+1)\ldots(\beta+p-1)\\ & \times \mathrm{F}(\alpha+p,\, \beta+p,\, \gamma+p,\, x)\end{aligned}$$

on déduit

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{d^p\mathrm{X}_n}{dx^p} = {} & \frac{x^{1-\gamma-p}(1-x)^{\gamma-\alpha-p}(-1)^p}{n(n-1)\ldots(n-p+1)}\\ & \times \frac{(\alpha+n)\ldots(\alpha+n+p-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+p-1)}\,\frac{d^{n-p}}{dx^{n-p}}\,x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma},\end{aligned}\right.$$

relation bien connue pour les fonctions de Legendre.

Citons encore les identités suivantes :

$$(8)\qquad n\mathrm{X}_n - x\frac{d\mathrm{X}_n}{dx} = n\mathrm{X}_{n-1} + \frac{n}{n+\alpha-1}\,x\,\frac{d\mathrm{X}_{n-1}}{dx},$$

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}(\gamma+n)\mathrm{X}_{n+1} = {} & x(1-x)\frac{2n+\alpha+1}{n+\alpha}\frac{d\mathrm{X}_n}{dx}\\ & + \mathrm{X}_n[(n+\gamma)-x(2n+\alpha+1)],\end{aligned}\right.$$

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}(\gamma+n)\frac{d\mathrm{X}_{n+1}}{dx} = {} & \frac{n+1}{n+\alpha}[n+\alpha-\gamma+1-(2n+\alpha+1)x]\frac{d\mathrm{X}_n}{dx}\\ & -(n+1)(2n+\alpha+1)\mathrm{X}_n,\end{aligned}\right.$$

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} & (n+1)(n+\alpha-1)\int \mathrm{X}_n\,dx\\ & \quad + \frac{(n+\alpha)(n+\gamma)(n+\alpha-1)}{(2n+\alpha)(2n+\alpha+1)}\mathrm{X}_{n+1} - \frac{n(n+1)(n+\alpha-\gamma)}{(2n+\alpha)(2n+\alpha-1)}\mathrm{X}_{n-1}\\ & \quad + (2n+\alpha)[n(2\gamma-\alpha-1)+1-\alpha^2]\mathrm{X}_n = 0.\end{aligned}\right.$$

Une formule intéressante résulte du développement de $\frac{d\mathrm{X}_n}{dx}$ suivant les fonctions $\mathrm{X}_n$. Posons

$$\frac{d\mathrm{X}_n}{dx} = \mathrm{A}_0\mathrm{X}_0 + \ldots + \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{X}_{n-1}.$$

Si nous multiplions les deux membres par $\mathrm{X}_p x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}$ et que nous intégrions entre o et 1, nous aurons

$$A_p J_p = \int_0^1 X_p \frac{dX_n}{dx} x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} dx.$$

Substituons l'expression de $\frac{dX_n}{dx}$ déduite de la formule (7), nous aurons

$$J_p A_p = -\frac{n(\alpha+n)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(n+\gamma)} \int \frac{X_p}{x(1-x)} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma}] dx.$$

Décomposons en fractions simples $\frac{X_p}{x(1-x)}$, nous aurons

$$\frac{X_p}{x(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{\alpha_p}{1-x} + U_{p-2}, \quad \alpha_p = \frac{(-1)^p \Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+p)} \frac{\Gamma(\alpha-\gamma+p+1)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)},$$

$U_{p-2}$ désignant un polynôme de degré $p-2$ En intégrant par partie jusqu'à ce que la dérivée $n-1^{\text{ième}}$ ait disparu sous le signe d'intégration, $U_{p-2}$ disparaîtra, et il restera

$$A_p J_p = -\frac{n(\alpha+n)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(n+\gamma)} \int_0^1 [x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma} \\ + (-1)^{p-1} \alpha_p x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}] dx.$$

En remplaçant les intégrales eulériennes par leurs valeurs, on trouve l'expression de $A_p$, et l'on obtient la formule

$$\frac{dX_n}{dx} = -\frac{J_n(2n+\alpha)}{J_p} \sum_{p=0}^{p=n-1} \frac{X_p}{J_p} + (-1)^n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha+n)} \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^p \frac{\Gamma(\alpha+p)}{\Gamma(p+1)} (2p+$$

En combinant cette formule avec celle qu'on obtient en y changeant $n$ en $n+1$, on trouve

$$(13) \quad \frac{n+1}{\alpha+n} \frac{dX_n}{dx} + \frac{dX_{n+1}}{dx} = -J_n \frac{(n+1)(2n+\alpha)(2n+\alpha+1)}{(n+\alpha)(n+\gamma)} \sum_{p=0}^{p=n} \frac{X_p}{J_p}.$$

Les polynômes $X_n$ formant, d'après l'équation aux différences à laquelle ils satisfont, une suite de Sturm, on peut leur appliquer la formule fondamentale de mon *Mémoire sur le théorème de Sturm* [*], et l'on obtient la relation

$$(14)\quad \frac{(n+\alpha)(n+\gamma)}{J_n(2n+\alpha)(2n+\alpha+1)}\,\frac{Z_n X_{n+1} - X_n Z_{n+1}}{z - x} = \frac{X_0 Z_0}{J_0} + \frac{X_1 Z_1}{J_1} + \ldots + \frac{X_n Z_n}{J_n},$$

$Z_p$ désignant ce que devient $X_p$ quand on y remplace $x$ par $z$. Telle est la réunion des formules les plus essentielles de cette théorie. Elles ne nous seront pas toutes utiles; mais j'ai cru devoir les calculer et les réunir ici.

Je ferai remarquer que la démonstration de la formule (12) repose sur la considération d'intégrales qui n'ont un sens que si l'on a $\gamma > 0$, $\alpha - \gamma + 1 > 0$; mais le résultat, évidemment indépendant de ces hypothèses, subsiste dans tous les cas.

Parmi ces polynômes, un groupe spécial se rapproche plus particulièrement de ceux de Legendre : ce sont ceux pour lesquels on a

$$\alpha - \gamma = \gamma - 1.$$

Ils admettent d'abord une fonction génératrice spéciale, et l'on a, en posant $z = 1 - 2x$,

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} (1 - 2hz + h^2)^{\frac{1}{2}-\gamma} &= \sum 4^n h^n \frac{(\gamma - \frac{1}{2})\ldots(\gamma + n - \frac{1}{2})}{(2\gamma + n - 1)\ldots(2\gamma + 2n - 2)} \\ &\quad \times x^{1-\gamma}(1-x)^{1-\gamma}\frac{d^n}{dx^n}[x(1-x)]^{n+\gamma-1} \end{aligned} \right.$$

Beaucoup des méthodes applicables aux polynômes de Legendre subsistent pour ces polynômes et non pour les polynômes généraux. Par exemple, en posant $x = \sin^2\varphi$, on peut les développer suivant les cosinus des multiples de $\varphi$. La relation entre trois polynômes consécutifs est du premier degré par rapport à $n$, etc.

---

[*] *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. VIII, p. 92.

## IX.

Nous sommes maintenant en mesure de traiter d'une manière complète la théorie d'une classe de développements en série, de ceux qui sont ordonnés suivant les polynômes $X_n$ que nous venons d'étudier. Nous avons vu que, si l'on suppose

$$\gamma > 0, \quad \alpha - \gamma + 1 > 0,$$

on a

$$\int_0^1 X_m X_n x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} dx = 0, \quad \int_0^1 X_n^2 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} dx = J_n.$$

La valeur de $J_n$ a été donnée à l'article VII.

Ces points étant admis, étant donnée une fonction quelconque $f(x)$ continue ou discontinue, supposons qu'on se propose de la développer en une série de la forme suivante :

$$f(x) = A_0 X_0 + A_1 X_1 + \ldots + A_n X_n + \ldots.$$

Si nous multiplions les deux membres par $X_n x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} dx$, et que nous intégrions entre les limites 0 et 1, nous aurons

$$A_n J_n = \int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} X_n f(x) dx. \tag{16}$$

Tous les coefficients seront successivement déterminés par cette formule.

Un artifice particulier permet de simplifier, dans bien des cas, la recherche et le calcul de tous les coefficients $A_n$.

Reprenons l'équation du second degré

$$y = x + ty(1-y)$$

et le développement

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} y^{\gamma-1}(1-y)^{\alpha-\gamma}\frac{\partial y}{\partial x} &= \sum \frac{t^n}{\Gamma(n+1)} \frac{d^n}{dx^n} x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma} \\ &= \sum \frac{t^n \Gamma(\gamma+n)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(n+1)} X_n x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}, \end{aligned} \right.$$

auquel elle donne naissance, et qui est convergent pour des valeurs suffisamment petites de $t$. Si nous multiplions par $f(x)\,dx$, et que nous intégrions entre les limites zéro et $1$, nous aurons, en nous rappelant la formule (16),

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx\, y^{\gamma-1}(1-y)^{\alpha-\gamma}\frac{\partial y}{\partial x}\\ = \sum \mathrm{A}_n \frac{t^n\Gamma(\gamma+n)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(n+1)}\mathrm{A}_n\mathrm{J}_n = \sum \mathrm{A}_n\frac{t^n\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+n-\gamma+1)}{(2n+\alpha)\Gamma(n+\alpha)}.\end{aligned}$$

Le premier membre est une intégrale dans laquelle $t$ est constant et $y$ fonction de $x$. Prenons $y$ comme variable indépendante, on aura

$$x = y - ty(1-y).$$

Les limites de $y$ seront encore zéro et $1$, et l'on aura

$$\int_0^1 f[y - ty(1-y)]\,y^{\gamma-1}(1-y)^{\alpha-\gamma}\,dy = \sum \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+n-\gamma+1)}{(2n+\alpha)\Gamma(n+\alpha)}\mathrm{A}_n t^n.$$

Ainsi il suffira d'effectuer la quadrature du premier membre ou d'obtenir son développement en série pour connaître tous les coefficients $\mathrm{A}_n$. Cette remarque permet de trouver beaucoup de développements en série.

Supposons, par exemple, que la fonction $f(x)$ se réduise à $x^p$, $p$ étant quelconque. On aura à effectuer la quadrature

$$\int_0^1 y^{\gamma-1}(1-y)^{\alpha-\gamma}y^p[1-t(1-y)]^p\,dy,$$

ou plutôt à la développer suivant les puissances de $t$. Le coefficient de $t^n$ sera

$$\begin{aligned}(-1)^n\frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{1.2\ldots n}\int_0 y^{p+\gamma-1}(1-y)^{\alpha+n-\gamma}\,dy\\ = (-1)^n\frac{p\ldots(p-n+1)}{1.2\ldots n}\,\frac{\Gamma(p+\gamma)\Gamma(\alpha+n-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+n+p+1)},\end{aligned}$$

et l'on aura par conséquent

$$(18)\quad \begin{cases} x^p = A_0 X_0 + A_1 X_1 + \ldots, \\ A_n = (-1)^n \dfrac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{1.2\ldots n}\,\dfrac{\Gamma(n+\alpha)\,(2n+\alpha)\,\Gamma(p+\gamma)}{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha+n+p+1)}. \end{cases}$$

La suite (18) se termine toutes les fois que $p$ est entier, comme on devait s'y attendre. En l'appliquant à chacun des termes d'un polynôme, on pourra remplacer ce polynôme par une suite formée d'un nombre limité de fonctions $X_n$. Elle nous sera très-utile aussi quand on y fera $p$ fractionnaire.

Après cette remarque sur la détermination des coefficients, revenons à la série qui sert de développement à une fonction quelconque $f(x)$,

$$(19)\qquad f(x) = \sum \frac{X_n}{J_n} \int_0^1 z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma} f(z) Z_n dz,$$

où $Z_n$ désigne le polynôme $X_n$, dans lequel on a remplacé $x$ par $z$. Nous devons nous demander si elle est convergente et si elle représente la fonction. A cet effet, nous allons étudier la somme des $n+1$ premiers termes de la série et en chercher la limite quand $n$ croît. Cette somme est

$$(20)\qquad S_n = \int_0^1 z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma} f(z) dz \left(\frac{X_0 Z_0}{J_0} + \frac{X_1 Z_1}{J_1} + \ldots + \frac{X_n Z_n}{J_n}\right).$$

D'après une formule donnée à l'article précédent, elle peut être remplacée par l'intégrale plus simple

$$(21)\; S_n = \frac{(n+\alpha)(n+\gamma)}{(2n+\alpha)(2n+\alpha+1) J_n} \int_0^1 z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma} f(z) \frac{Z_n X_{n+1} - X_n Z_{n+1}}{z-x} dz,$$

dont il y a à déterminer la limite quand $n$ croît indéfiniment. Nous pouvons, en commettant une erreur relative d'autant plus faible que $n$ est plus grand, remplacer le coefficient numérique de l'intégrale par $\frac{1}{4J_n}$. Nous décomposerons en outre l'intervalle de zéro à 1 en trois : l'un de zéro à $\varepsilon$, l'autre de $\varepsilon$ à $1-\varepsilon$, le troisième de $1-\varepsilon$ à 1, $\varepsilon$ étant aussi petit qu'on le voudra, mais fixe quand $n$ augmentera indéfiniment. Ainsi, nous avons à chercher la limite de l'intégrale

$$(22) \qquad \frac{1}{4J_n}\int z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma} f(z)\frac{Z_n X_{n+1}-X_n Z_{n+1}}{z-x}dz,$$

prise successivement dans les trois intervalles $(0, \varepsilon)(\varepsilon, 1-\varepsilon)(1-\varepsilon, 1)$. Nous commencerons par considérer le second et le plus grand de ces trois intervalles, et nous y remplacerons $X_n$, $Z_n$, $X_{n+1}$, $Z_{n+1}$ par leurs expressions approchées.

Posons

$$x = \sin^2\psi, \quad z = \sin^2\varphi,$$

$\varphi$ et $\psi$ étant compris entre $0$ et $\frac{\pi}{2}$; $f(z)\,dz$ prendra la forme $f_1(\varphi)\,d\varphi$. On a

$$X_n = \sqrt{\frac{2J_n}{\pi}}\sin^{\frac{1}{2}-\gamma}\psi\cos^{\gamma-\alpha-\frac{1}{2}}\psi\cos\left[(2n+\alpha)\psi-\frac{\pi}{4}(2\gamma-1)\right],$$

$$X_{n+1} = \sqrt{\frac{2J_n}{\pi}}\sin^{\frac{1}{2}-\gamma}\psi\cos^{\gamma-\alpha-\frac{1}{2}}\psi\cos\left[(2n+\alpha+2)\psi-\frac{\pi}{4}(2\gamma-1)\right],$$

et des expressions analogues pour $Z_n$, $Z_{n+1}$. En les substituant, nous trouvons

$$\frac{1}{\pi}\int\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}\right)^{\gamma-\frac{1}{2}}\left(\frac{\cos\varphi}{\cos\psi}\right)^{\alpha-\gamma+\frac{1}{2}} f_1(\varphi)\,d\varphi\,\frac{\sin\left[(2n+\alpha+1)(\varphi+\psi)-\frac{\pi}{4}(2\gamma-1)\right]}{\sin(\varphi+\psi)}$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}\right)^{\gamma-\frac{1}{2}}\left(\frac{\cos\varphi}{\cos\psi}\right)^{\alpha-\gamma+\frac{1}{2}} f_1(\varphi)\,d\varphi\,\frac{\sin[(2n+\alpha+1)(\varphi-\psi)]}{\sin(\varphi-\psi)}.$$

Ces intégrales sont bien connues : on les rencontre dans la théorie des séries trigonométriques. La première tend vers zéro, la seconde vers la limite

$$\tfrac{1}{2}f_1(\psi+0)+\tfrac{1}{2}f_1(\psi-0)=\tfrac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)],$$

lorsque $f(x)$ est finie, ou devient infinie si $f(x)$ est infinie.

Ainsi l'une des trois parties dont nous devons chercher la limite, *nous donne le même résultat que si la série était trigonométrique* [**].

[**] Au tome I (3e série, p. 194) de ce Journal, M. Laurent a déjà indiqué, pour le cas spécial des séries ordonnées suivant les polygones de Legendre, une méthode semblable à celle qui est développée ici.

Toutefois, cette partie de la démonstration est sujette à une objection grave qu'il importe de lever. Dans le calcul de l'intégrale que nous venons d'étudier, nous avons admis qu'on peut remplacer les polynômes par leurs expressions approchées. Cette substitution est-elle légitime? En l'effectuant, nous avons commis une erreur, et il est indispensable d'examiner si cette erreur n'augmente pas indéfiniment avec $n$. Désignons, pour abréger, par $X'_n\sqrt{J_n}$, $Z'_n\sqrt{J_n}$ les expressions approchées de $X_n Z_n$. Nous avons établi, en toute rigueur (art. VII), que l'on a

$$Z_n = \sqrt{J_n}\left(Z'_n + \frac{p}{n}\right), \quad X_n = \sqrt{J_n}\left(X'_n + \frac{p_1}{n}\right),$$

$p, p_1$ demeurant au-dessous d'une certaine limite, quel que soit $n$, si $x$ et $z$ demeurent compris entre $\varepsilon$ et $1-\varepsilon$. Il suit de là que remplacer les polynômes par leurs expressions approchées, c'est négliger, dans l'intégrale (22), un groupe de termes de la forme

$$\frac{1}{n}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\frac{Pf(z)\,dz}{z-x},$$

P étant une fonction telle que $p, p_1$ demeurant au-dessous d'un nombre fixe quand $n$ croît indéfiniment. D'ailleurs $\frac{P}{x-z}$ demeure finie pour $x=z$, puisque cette propriété appartient à la fois au terme

$$\frac{Z_{n+1}X_n - X_{n+1}Z_n}{z-x},$$

et à ceux que l'on a obtenus en remplaçant les polynômes par leurs expressions approchées.

Mais, si P a la propriété, comme $p$ et $p_1$, de demeurer au-dessous d'une limite fixe, cette propriété ne peut s'étendre au quotient $\frac{P}{x-z}$, au moins dans le voisinage de la valeur $z=x$, et l'on ne peut pas affirmer que la partie suivante de l'intégrale

$$\frac{1}{n}\int_{x-h}^{x+h} z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}f(z)\frac{P}{x-z}\,dz,$$

qui est d'ailleurs finie, tende vers zéro, et n'augmente pas indéfiniment quand $n$ croît.

Pour résoudre la difficulté précédente, je ne vois d'autre moyen que l'emploi de la deuxième approximation des polynômes $X_n$, telle qu'elle a été donnée à la fin de la première Partie.

Nous avons remarqué que les formules qui réalisent cette approximation contiennent : 1° les termes de l'ordre de $\sqrt{J_n}$ qui se trouvent dans la première ; 2° des termes de l'ordre de $\frac{\sqrt{J_n}}{n}$ ; 3° enfin l'erreur commise est de l'ordre de $\frac{\sqrt{J_n}}{n^2}$. On a des formules telles que les suivantes :

$$Z_n = \sqrt{J_n}\left(Z'_n + \frac{Z''_n}{n} + \frac{p}{n^2}\right),$$

$$X_n = \sqrt{J_n}\left(X'_n + \frac{X''_n}{n} + \frac{p_1}{n^2}\right);$$

$p$ $p_1$ demeurant toujours au-dessous d'un nombre fixe, et les dérivées $p'$, $p'_1$ étant des formes $nq$, $nq_1$, où $q$, $q_1$ demeurent, comme $p$, $p_1$, inférieurs à un nombre fixe pour les valeurs de $x$ et de $z$ comprises entre $\varepsilon$ et $1 - \varepsilon$. Il suit de là que, si nous substituons dans l'intégrale (22) les expressions de $X_n$, $Z_n$, $X_{n+1}$, $Z_{n+1}$, déduites des formules précédentes, nous obtiendrons le résultat suivant :

1° Les termes résultant de la première approximation ont été calculés et nous donneront comme limite

$$\tfrac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)];$$

2° Les seconds termes des expressions approchées, combinés entre eux ou avec les précédents, donneront des intégrales toutes pareilles à celles qui proviennent des termes du premier ordre, *mais divisées par n* ou par $n^2$ elles auront toutes zéro pour limite;

3° Il restera enfin le groupe des termes contenant tous au moins une des fonctions inconnues, telles que $p$ et $p_1$, et qu'on pourra écrire

$$\frac{1}{n^2}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} f(z) z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\frac{P(z)}{x-z}\,dz,$$

$P(z)$ étant une fonction des quantités, telles que $p, p_1$, $\sin 2n\varphi$, $\cos 2n\varphi$, et demeurant par conséquent au-dessous d'un nombre fixe dans toute l'étendue de l'intégration. On a, en outre, $P(x) = 0$, pour la raison qui a déjà été donnée à propos de la première approximation.

D'après ce que nous savons sur les dérivées des fonctions $p, p_1$ et sur celle des sinus, on peut affirmer que l'on a

$$P'(z) = nQ(z),$$

$Q(z)$ demeurant au-dessous d'un nombre fixe, quel que soit $n$. D'après cela, si l'on remarque que l'on a

$$\frac{P(z) - P(x)}{z - x} = \frac{P(z)}{z - x} = P'[x + \theta(z - x)] = nQ[x + \theta(x - z)],$$

on voit que l'intégrale à examiner prendra la forme

$$\frac{1}{n}\int f(z) z^{\gamma-1}(1 - z)^{\alpha-\gamma} Q[x + \theta(z - x)]\, dz,$$

et Q demeurant au-dessous d'une limite fixe, on voit que cette intégrale tendra vers zéro quand $n$ croîtra indéfiniment, ce qui complète notre démonstration.

En résumé, la considération de la première partie de l'intégrale nous donne des *conclusions aussi étendues, s'appliquant à des fonctions aussi générales que celles considérées par Dirichlet dans son travail classique sur les séries trigonométriques*.

Examinons maintenant l'intégrale (22) prise entre les limites $0, \varepsilon$; $1 - \varepsilon, 1$. A cause de la symétrie par rapport aux limites, signalée à l'article précédent, il suffira de trouver la limite de l'intégrale prise dans l'intervalle $(0, \varepsilon)$.

Dans cet intervalle, nous le savons, l'expression approchée de nos polynômes ne peut plus être employée, et un examen sérieux de cette partie de l'intégrale est d'autant plus nécessaire que quelques-uns de ces polynômes croissent indéfiniment avec $n$. Reprenons donc l'expression

$$\frac{1}{4J_n}\int_0^{\varepsilon} z^{\gamma-1}(1 - z)^{\alpha-\gamma} \frac{Z_n X_{n+1} - X_n Z_{n+1}}{z - x} f(z)\, dz,$$

et cherchons si cette intégrale peut être rendue infiniment petite avec $\varepsilon$, *quel que soit n*. On peut l'écrire

$$\frac{X_{n+1}}{4J_n}\int_0^\varepsilon z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\frac{f(z)}{z-x}Z_n\,dz-\frac{X_n}{4J_n}\int_0^\varepsilon z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\frac{f(z)}{z-x}Z_{n+1}\,dz.$$

Les deux intégrales précédentes ont la même forme. Elles sont multipliées toutes deux par des coefficients de l'ordre de $n^{\gamma-\frac{1}{2}}$. Si donc on pose, pour abréger,

$$\varphi(z)=\frac{f(z)}{z-x},$$

il suffira de prouver que l'intégrale

$$(23)\qquad n^{\gamma-\frac{1}{2}}\int_0^\varepsilon z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\varphi(z)Z_n\,dz,$$

où $\varphi(z)$ est une fonction finie, peut être rendue infiniment petite avec $\varepsilon$, même quand $n$ croît au delà de toute limite.

A cet effet, imitant un procédé déjà employé à l'article VII, comparons-la à la suivante :

$$(24)\qquad \int_0^\varepsilon z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}Z_n^2\,dz=\theta J_n=\theta\frac{\Gamma^2(\gamma)}{2}n^{1-2\gamma},$$

considérée au même article où nous avons prouvé que $\theta$ est infiniment petit avec $\varepsilon$ quand $n$ grandit sans limite.

Décomposons l'intervalle $(0, \varepsilon)$ en deux autres séries d'intervalles : les uns, pour lesquels $Z_n$ sera inférieur à $Hn^{\frac{1}{2}-\gamma}$, H étant quelconque; les autres, pour lesquels il sera supérieur à la même quantité. Pour les premiers intervalles, l'intégrale (46) sera plus petite que le résultat obtenu en remplaçant $Z_n$ par sa limite supérieure, ce qui donnera

$$H\int z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\varphi(z)\,dz=\theta' H,$$

$\theta'$ étant infiniment petite avec $\varepsilon$, puisque l'intégrale précédente indépendante de $n$ s'étend dans un intervalle au plus égal à $\varepsilon$.

Prenons maintenant l'intégrale (20) dans les autres intervalles, ceux pour lesquels $Z_n$ est supérieur à $\mathrm{H}n^{\frac{1}{2}-\gamma}$, et comparons-la à l'intégrale (24) prise dans les mêmes intervalles, on aura

$$\frac{\int z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\varphi(z)Z_n\,dz}{\int z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}Z_n^2\,dz} = \theta_1 \frac{z'^{\gamma-1}(1-z')^{\alpha-\gamma}\varphi(z')Z'_n}{z'^{\gamma-1}(1-z')Z'^2_n} = \frac{\theta_1 \varphi(z')}{Z'_n},$$

$z'$ désignant une valeur de $z$ prise dans l'un des intervalles de l'intégration, $\theta_1$ une quantité au plus égale à l'unité. Si nous remplaçons $Z'_n$ par sa limite inférieure $\mathrm{H}n^{\frac{1}{2}-\gamma}$, nous déduirons de l'équation précédente

$$\int z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\varphi(z)Z_n\,dz < \frac{\varphi(z')}{\mathrm{H}}n^{\gamma-\frac{1}{2}}\int z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}Z_n^2\,dz,$$

l'inégalité ayant lieu en valeur absolue. Or l'intégrale du second membre est plus petite que l'intégrale (24). On a donc ainsi une limite supérieure des deux parties dans lesquelles on a décomposé l'intégrale (20). En réunissant les deux résultats obtenus, on a l'inégalité

$$n^{\gamma-\frac{1}{2}}\int_0^{\varepsilon} z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\varphi(z)Z_n\,dz < \mathrm{H}\theta' + \theta\,\frac{\Gamma^2(\gamma)\,\varphi(z')}{\mathrm{H}},$$

$\theta, \theta'$ étant infiniment petits avec $\varepsilon$, quel que soit $n$. Si donc la fonction $\varphi(z')$ ou $\frac{f(z')}{z'-x}$ demeure finie dans le voisinage de la valeur $z'=0$, on voit que l'intégrale (20) est infiniment petite avec $\varepsilon$, quel que soit $n$, et, par conséquent, qu'on peut la négliger dans la recherche de la limite de la somme $S_n$ des $n$ premiers termes de la série. En nous rappelant que les mêmes conclusions s'appliquent à l'intégrale prise dans le voisinage de la valeur $1$ de $z$, nous obtenons la proposition suivante :

*Toutes les fois qu'une fonction est telle que les coefficients de la série sont des intégrales ayant un sens déterminé, si la fonction ne devient infinie ni pour $x=0$ ni pour $x=1$, la série représente la fonction avec les mêmes particularités que les séries trigonométriques.*

Notre raisonnement ne s'applique pas, on le voit, au cas où la fonction deviendrait infinie pour une des limites. C'est qu'en effet, en examinant cette hypothèse, nous allons être conduits à cette conclusion inattendue que, dans ce cas, la série peut bien être divergente.

Pour le prouver, nous traiterons le cas où la fonction se ramène à une somme de termes de la forme $ax^p$, en nombre limité, $p$ étant négatif, auxquels s'ajoute une fonction finie pour $x = 0$. Cette fonction finie, nous n'avons pas à nous en occuper : on lui appliquera les méthodes précédentes. Il suffira donc d'examiner chacun des termes tels que $ax^p$ ou $x^p$, le coefficient ne jouant aucun rôle.

Or nous avons déjà trouvé les coefficients du développement de $x^p$, quand il est possible. Si l'on pose

$$x^p = A_0 X_0 + A_1 X_1 + \dots,$$

$A_n$ est donné par la formule (18), et il est de l'ordre de $n^{-2p-1}$. Comme $X_n$ est de l'ordre de $n^{\frac{1}{2}-\gamma}$, on voit que les termes de la série précédente seront de l'ordre de $n^{-2p-\frac{1}{2}-\gamma}$. Il faut donc, pour qu'ils tendent vers zéro, que l'on ait

$$p > -\frac{\gamma}{2} - \frac{1}{4}. \tag{25}$$

Pour que les intégrales, au moyen desquelles se calculent les coefficients $A_n$, aient un sens, il faut déjà que l'on ait $p + \gamma > 0$. Mais cette dernière condition n'entraîne la précédente que si l'on a $\gamma < \frac{1}{2}$.

On peut, du reste, prouver que, si l'inégalité (25) est vérifiée, la série que développe $x^p$ est effectivement convergente et qu'elle a pour somme $x^p$.

Appliquons, en effet, à cette fonction particulière la méthode générale. Nous aurons à trouver la limite de

$$-\frac{1}{4 J_n} \int_0^1 \frac{Z_n X_{n+1} - X_n Z_{n+1}}{x - z} z^p z^{\gamma-1} (1 - z)^{\alpha-\gamma} dz. \tag{26}$$

Posons

$$\frac{z^p}{x - z} = \frac{z^p}{x} + \frac{z^{p+1}}{(x - z) x};$$

nous aurons d'abord à trouver la limite de

$$-\frac{1}{4J_n x}\int (Z_n X_{n+1} - X_n Z_{n+1})\, z^p z^{\gamma-1} (1-z)^{\alpha-\gamma}\, dz$$

ou

$$-\frac{X_{n+1}}{4J_n x}\int_0^1 Z_n z^{p+\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\,dz + \frac{X_n}{4xJ_n}\int_0^1 Z_{n+1} z^{p+\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\,dz.$$

Les deux intégrales précédentes sont du même ordre que deux termes de la série trouvée pour $x^p$ : elles tendent donc vers zéro. Il nous reste à considérer

$$-\frac{1}{4J_n x}\int_0^1 z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\frac{z^{p+1}}{x-z}(Z_n X_{n+1} - X_n Z_{n+1})\,dz;$$

mais cette intégrale ne diffère que par la forme de l'intégrale (26); $p$ y est changé en $p+1$, et elle est divisée par $x$. En répétant la même opération $q$ fois jusqu'à ce que $p+q$ soit devenu positif, on aura

$$-\frac{1}{4J_n x^q}\int_0^1 z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\frac{z^{p+q}}{x-z}(Z_n X_{n+1} - X_n Z_{n+1})\,dz;$$

l'intégrale correspondra à une fonction $z^{p+q}$, qui ne deviendra plus infinie et aura par conséquent pour limite

$$\frac{x^{p+q}}{x^q} = x^p.$$

Ainsi, tant que $p$ satisfait à l'inégalité (25), la série qui sert de développement à $x^p$ est convergente et a pour somme $x^p$.

On verra de même que $(1-x)^q$ est développable en série convergente tant que $q$ satisfait à l'inégalité

$$q > -\frac{\alpha-\gamma+1}{2} - \frac{1}{4}. \tag{27}$$

Nous avons donc le théorème suivant :

*Pour qu'une fonction soit développable en une série convergente de* *fonctions* $X_n$, *il faut et il suffit : 1° que les intégrales qui déterminent les coefficients de la série aient un sens; 2° que si la fonction devient infinie pour* $x=0$, *elle le soit d'un ordre inférieur à* $\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{4}$; *3° que si elle devient infinie pour* $x=1$, *elle le soit d'un ordre inférieur à* $\frac{\alpha-\gamma+1}{2}+\frac{1}{4}$.

Par exemple, dans le cas des polynômes de Legendre, toute fonction qui deviendrait infinie d'un ordre égal ou supérieur à $\frac{3}{4}$ pour $x=\pm 1$ ne serait pas développable en une série formée de ces polynômes.

Pour terminer ce sujet, il nous reste à dire quelques mots d'un cas qui n'a pas été traité, et à voir ce que devient la série pour les valeurs extrêmes $x=0$, $x=1$, par exemple, pour $x=0$; on aura, dans ce cas, à chercher la limite de l'intégrale

$$(28)\qquad -\frac{1}{4J_n}\int_0 \frac{Z_{n+1}-Z_n}{z} f(z)\, z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\, dz,$$

à laquelle, en vertu des formules (13) et (14), on peut donner la forme

$$-\frac{1}{4nJ_n}\int_0^1 \left(\frac{n+1}{n+\alpha}\frac{dX_n}{dx}+\frac{dX_{n+1}}{dx}\right) f(x)\, x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\, dx.$$

On examinera la limite de l'une ou de l'autre de ces intégrales, limite qui n'est pas toujours égale à la fonction $f(0)$. J'ai déjà fait la discussion de cette question, pour le cas particulier des fonctions de Legendre, dans mon Mémoire *Sur les fonctions de deux angles*, etc. (*Journal de M. Liouville*, t. XIX, 2<sup></sup>e série, p. 1).

Comme il s'agit ici d'une valeur particulière, je me bornerai à examiner le cas où $f(x)-f(0)$ est de l'ordre de $x$ et je poserai

$$f(x)=f(0)+x\varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant finie pour $x=0$. Alors l'intégrale (28) se ramènera à une somme de deux autres, l'une dans laquelle on remplacerait $f(x)$ par $f(0)$ et qui donnera comme limite $f(0)$, puisque, dans le développement d'une constante, la série se réduit à son premier terme $f(0)X_0$, l'autre dans laquelle la fonction $f(z)$ sera remplacée par $z\varphi(z)$ et qui sera

$$(29)\qquad -\frac{1}{4J_n}\int_0^1 (Z_{n+1}-Z_n)\,\varphi(z)\,z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\,dz,$$

et l'on appliquera à cette intégrale les méthodes que nous avons employées. On verra, comme précédemment, que l'on peut négliger la partie de l'intégrale dans laquelle $z$ est voisine soit de o, soit de 1 au moins pour $\gamma$ supérieur à $\frac{1}{2}$, et l'on pourra ensuite, en prenant l'intégrale entre les limites $\varepsilon$, $1-\varepsilon$, remplacer les polynômes par leurs expressions approchées, ce qui donnera une intégrale de la forme

$$\frac{2n^{\gamma-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\gamma)}\int \sin^{\gamma-\frac{1}{2}}\varphi\cos^{\alpha-\gamma+\frac{1}{2}} f_1(\varphi)\,d\varphi\,\sin\left[(2n+\alpha+1)\varphi-\frac{\pi}{4}(2\gamma-1)\right];$$

or l'évaluation de l'ordre de cette intégrale est le point de départ de notre travail. On saura donc traiter cette question, sur laquelle nous n'insisterons pas pour les raisons déjà indiquées.

Nous terminerons cet article par une remarque essentielle. Il n'est pas nécessaire que la fonction $f(x)$ qu'on développe soit réelle; si elle est imaginaire, il suffira de considérer successivement la partie réelle et la partie imaginaire. Les raisonnements ne subiront aucune modification.

## X.

Après avoir examiné les séries ordonnées suivant les polynômes $X_n$, quand la variable $x$ demeure réelle et comprise entre $-1$ et $+1$, on peut se demander si elles sont convergentes dans une étendue plus grande et il est maintenant très-facile de résoudre cette question.

Cherchons d'abord les limites de la convergence d'une série de polynômes $X_n$

$$A_0X_0+A_1X_1+\ldots+A_nX_n+\ldots;$$

il résulte de l'expression approchée de nos polynômes

$$X_n = \varphi(\xi)\, n^{\frac{1}{2}-\gamma}\, \xi^n (1 + \varepsilon_n),$$

donnée à l'article II, qu'on peut assimiler les séries de ce genre à celles qui sont ordonnées suivant les puissances entières de la variable $\xi$. Les courbes limitant la région de convergence seront celles pour lesquelles $\xi$ aura un module constant, c'est-à-dire que ce seront des ellipses ayant pour foyers les deux points o et 1. Ainsi toutes les séries de fonctions $X_n$, quels que soient les nombres $\alpha$ et $\gamma$, si elles sont convergentes, le sont à l'intérieur d'une certaine ellipse qui peut, d'ailleurs, se réduire à la portion de ligne droite comprise entre les foyers.

Admettons que la convergence ait lieu à l'intérieur d'une de ces ellipses, je dis que, dans la région de convergence, la série représentera une fonction finie, continue, qu'elle pourra être différentiée, intégrée, etc.

Soit, en effet, $a$ le module de $\xi$ sur l'ellipse de convergence, à l'intérieur de toute ellipse correspondant au module $a - \rho$ plus petit que $a$; la série de fonctions $X_n$ sera uniformément convergente, et, comme ses termes sont des fonctions continues, elle sera elle-même continue; elle pourra être différentiée, intégrée. On voit, d'après cela, que si l'on développe sur le segment (o, 1), d'après les méthodes précédentes, une fonction discontinue, ou devenant infinie, ou telle qu'une de ses dérivées soit discontinue ou infinie sur le même segment, la convergence de la série ne pourra s'étendre au delà de ce segment.

Ces remarques nous permettent d'étendre, au moins pour une classe importante de fonctions, les résultats que nous avons trouvés. Supposons qu'il s'agisse de développer une fonction $f(x)$ suivant une série formée de ces polynômes que nous avons écartés, et pour lesquels l'une au moins des quantités $\gamma$, $\alpha - \gamma + 1$ est négative. Si la fonction est continue et uniforme à l'intérieur d'une certaine ellipse, le développement est possible; nous le démontrerons plus loin. Soit

$$f(x) = \Sigma A_n X_n$$

ce développement.

Pour en déterminer les coefficients, on remarquera que, si l'on prend la dérivée d'ordre $p$, on a

$$\frac{d^p f(x)}{dx^p} = \Sigma A_n \frac{d^p X_n}{dx^p}.$$

Or les coefficients $\frac{d^p X_n}{dx^p}$ sont aussi des séries hypergéométriques qui ne diffèrent des polynômes $X_n$ qu'en ce que $\gamma$ et $\alpha - \gamma$ sont augmentés de $p$. En prenant les dérivées jusqu'à un ordre convenable, on aura donc des polynômes, pour lesquels $\gamma$ et $\alpha - \gamma + 1$ seront positifs, et auxquels on pourra, par conséquent, appliquer les méthodes précédentes de détermination des coefficients.

## XI.

Nous allons maintenant démontrer que, si une fonction est continue et uniforme à l'intérieur d'une ellipse donnée, elle est développable en une série de fonctions $X_n$ convergentes à l'intérieur de cette ellipse. A cet effet, nous emploierons la méthode suivie par MM. Neumann et Heine dans le cas particulier des polynômes de Legendre, et nous développerons d'abord $\frac{1}{x-y}$ en une série de fonctions $X_n$.

Posons

$$\frac{1}{x-y} = \Sigma \frac{X_n Q_n}{J_n}. \tag{30}$$

Les coefficients $Q_n$ sont des fonctions de $y$, qu'il s'agit d'étudier et de déterminer. Si nous supposons encore $\gamma$, $\alpha - \gamma + 1$ positifs, nous aurons

$$Q_n = \int_0^1 \frac{X_n x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} dx}{x-y}. \tag{31}$$

Ces fonctions $Q_n$ seront appelées *fonctions de seconde espèce*. Elles satisfont à une équation différentielle qu'on peut former de la manière suivante :

$u$ désignant $\frac{1}{x-y}$, on peut établir une identité de la forme suivante :

$$x(1-x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+[\gamma-(\alpha+1)x]\frac{\partial u}{\partial x}+n(n+\alpha)u$$
$$=y(1-y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f_1(y)\frac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{H}u.$$

Il suffit de prendre

$$f_1(y)=2-\gamma+(\alpha-3)y,\quad \mathrm{H}=(n+1)(n+\alpha-1).$$

En substituant à la place de $u$ son développement en série, et en tenant compte de l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $\mathrm{X}_p$, le premier membre prend la forme

$$\Sigma[n(n+\alpha)-p(p+\alpha)]\frac{\mathrm{X}_p\mathrm{Q}_p}{\mathrm{J}_p},$$

et ne contient plus le terme en $\mathrm{X}_n$. Il doit donc en être de même du second. En égalant le coefficient de $\mathrm{X}_n$ à zéro, on trouve

$$(32)\qquad \left\{\begin{aligned} &y(1-y)\frac{d^2\mathrm{Q}_n}{dy^2}+[2-\gamma+(\alpha-3)y]\frac{d\mathrm{Q}_n}{dy}\\ &\qquad\qquad+(n+1)(n+\alpha-1)\mathrm{Q}_n=0,\end{aligned}\right.$$

équation différentielle à laquelle satisfait $\mathrm{Q}_n$, et que l'on peut vérifier en prenant pour $\mathrm{Q}_n$ l'intégrale (31).

Cette équation différentielle, obtenue par différents auteurs dans le cas des polynômes de Legendre, se confond alors ($\gamma=\alpha=1$) avec celle qui caractérise les polynômes $\mathrm{X}_n$. Dans les autres cas, elle en est, comme on voit, différente par les coefficients. Mais, si l'on pose

$$(33)\qquad \mathrm{Q}_n=y^{\gamma-1}(1-y)^{\alpha-\gamma}\mathrm{U}_n,$$

un calcul qui ne présente aucune difficulté montre que $\mathrm{U}_n$ satisfait à la même équation que les polynômes $\mathrm{X}_n$. C'est là un résultat remarquable qui ramène la théorie des fonctions de première et de seconde espèce à la considération d'une seule équation différentielle; mais il est utile de remarquer que les fonctions $\mathrm{Q}_n$, d'après leur expression

(31), sont continues et finies dans toute l'étendue du plan, sauf sur le segment (o, 1), propriété qui, d'après la formule (33), n'appartiendra que très-exceptionnellement à $U_n$.

Si les fonctions $Q_n$ ne satisfont pas à la même équation différentielle que les polynômes $X_n$, elles s'en rapprochent à un autre point de vue : elles satisfont à la même équation aux différences, c'est-à-dire il y a entre trois fonctions $Q_n$ consécutives la même relation qu'entre les trois fonctions $X_n$ de même rang. C'est ce que l'on établira de la manière suivante. L'équation (30) peut s'écrire

$$X_0 = 1 = \sum \frac{Q_n}{J_n}(xX_n - yX_n).$$

Exprimons, au moyen de l'équation (6), $xX_n$ en fonction linéaire de $X_{n-1}$, $X_n$, $X_{n+1}$, et substituons cette expression dans la formule précédente, nous aurons

$$(34)\quad \left\{ \begin{aligned} X_0 = \sum \frac{X_n}{J_n(2n+\alpha)} \Bigg[ & \frac{(n+\alpha)(n+\gamma)}{2n+\alpha+1}(Q_n - Q_{n+1}) \\ & + \frac{n(n+\alpha-\gamma)}{2n+\alpha-1}(Q_n - Q_{n-1}) - y(2n+\alpha)Q_n \Bigg]. \end{aligned} \right.$$

Tant que $n$ est différent de zéro, le coefficient de $X_n$ doit être nul. On a donc

$$(35)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{(n+\alpha)(n+\gamma)}{2n+\alpha+1}(Q_n - Q_{n+1}) \\ & \quad + \frac{n(n+\alpha-\gamma)}{2n+\alpha-1}(Q_n - Q_{n-1}) - y(2n+\alpha)Q_n = 0. \end{aligned} \right.$$

C'est la même équation, sauf le changement de $x$ en $y$, que pour les polynômes $X_n$; mais il convient de remarquer qu'elle ne s'applique pas pour $n = 0$. En effet, le coefficient de $X_0$ dans le second membre de la formule (34) doit être égal, non plus à 0, mais à 1. On a donc

$$(36)\quad \left\{ \begin{aligned} Q_1 &= Q_0\left[1 - \frac{(\alpha+1)y}{\gamma}\right] - \frac{\alpha+1}{\gamma}J_0 \\ &= Q_0\left[1 - \frac{(\alpha+1)y}{\gamma}\right] - \frac{\alpha+1}{\gamma}\,\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+1)}. \end{aligned} \right.$$

Cette équation montre qu'il suffira de connaître l'une des fonctions pour en déduire toutes les autres.

On voit que $Q_n$ s'exprimera en fonction linéaire de $Q_0$, le coefficient de $Q_0$ et le terme indépendant étant deux polynômes. De plus, le coefficient de $Q_0$ dans l'équation précédente étant le polynôme $X_1$, où l'on a remplacé $x$ par $y$, le coefficient de $Q_0$ dans $Q_n$ sera de même le polynôme $X_n(y)$. C'est, du reste, une forme de $Q_n$, qu'on peut mettre directement en évidence. La formule (32) peut s'écrire

$$Q_n = \int_0^1 \frac{X_n - Y_n}{x - y} x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} dx + Y_n \int_0^1 \frac{x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} dx}{x - y},$$

$Y_n$ désignant le polynôme $X_n$, où l'on a remplacé $x$ par $y$. On a donc

$$Q_n(y) = \int_0^1 \frac{X_n - Y_n}{x - y} x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} dx + Y_n Q_0.$$

En remarquant que $X_n - Y_n$ est divisible par $x - y$, et posant

$$R_n(y) = \int_0^1 \frac{X_n - Y_n}{x - y} x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} dx, \tag{37}$$

on voit que $R_n$ est un polynôme en $y$ d'ordre $n-1$, et l'on a

$$Q_n(y) = Y_n Q_0(y) + R_n(y), \tag{38}$$

ce qui met en évidence l'expression de $Q_n(y)$ en fonction de $Q_0(y)$.

D'après cela, si l'on veut résoudre complétement l'équation aux différences à laquelle satisfont les polynômes $X_n$,

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{(n+\alpha)(n+\gamma)}{2n+\alpha+1}(u_n - u_{n+1}) \\ &\quad + \frac{n(n+\alpha-\gamma)}{2n+\alpha-1}(u_n - u_{n-1}) - (2n+\alpha)x u_n = 0, \end{aligned}\right. \tag{39}$$

on a déjà deux solutions :

$$1^\circ\ X_n(x), \quad 2^\circ\ R_n(x),$$

et par conséquent la solution la plus générale sera

$$\varphi(x)X_n(x) + \psi(x)R_n(x).$$

En particulier, on aura $Q_n(x)$ en prenant

$$\varphi(x) = Q_0(x), \quad \psi(x) = 1;$$

$U_n(x)$ en prenant

$$\varphi(x) = Q_0(x)x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}, \quad \psi(x) = x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}.$$

## XII.

Revenons à la formule qui donne $Q_n(y)$; remplaçons-y $X_n$ par son expression comme dérivée $n^{ième}$, et intégrons $n$ fois par partie : nous aurons

$$(40) \qquad Q_n = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+n)}\int_0^1 \frac{x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma}}{(x-y)^{n+1}}dx.$$

Cette formule, donnée par Jacobi, est très-importante pour la théorie des fractions continues. Développons, en effet, l'intégrale suivant les puissances de $\frac{1}{y}$. Le développement commence au terme en $\frac{1}{y^{n+1}}$, et l'on a

$$(41) \quad Q_n = (-1)^{n+1}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+n-\gamma+1)}{\Gamma(2n+\alpha+1)}\frac{1}{y^{n+1}}F\left(\gamma+n, n+1, 2n+\alpha+1, \frac{1}{y}\right).$$

Si nous rapprochons ce résultat de la formule

$$(42) \qquad Q_0 = -\frac{R_n}{Y_n} + \frac{Q_n}{Y_n},$$

on voit que le développement de $\frac{Q_n}{Y_n}$, suivant les puissances descendantes de $y$, commencera au terme en $\frac{1}{y^{2n+1}}$. On aura donc

$$(43) \qquad Q_0 = -\frac{R_n}{Y_n} + \frac{\varepsilon}{y^{2n+1}} + \cdots.$$

Donc $-\frac{R_n}{Y_n}$ sera la réduite d'ordre $n$ du développement de $Q_0$ en fraction continue. Or, d'après la formule (41), $Q_0$ n'est autre chose, à un facteur constant près, que l'importante série

$$F\left(\gamma, 1, \alpha + 1, \frac{1}{y}\right),$$

qui comprend comme cas particulier le binôme, le logarithme, etc.

La forme si simple de la nouvelle expression des fonctions de seconde espèce nous indique un nombre illimité de fonctions génératrices pour les fonctions $Q_n$. Ainsi l'on aura

$$(44) \quad \int_0^1 \frac{x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}}{x-y}\varpi\left[\frac{ux(1-x)}{x-y}\right]dx = \Sigma_n \varpi_n(0)\frac{\gamma\ldots(\gamma+n-1)}{(1.2\ldots n)^2}Q_n(y)u^n.$$

En particulier,

$$(45) \qquad \int_0^1 \frac{x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\,dx}{x-y-ux(1-x)} = \sum_n \frac{\Gamma(\gamma+n)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(n+1)}u^n Q_n(y).$$

Pour les fonctions de Legendre, on trouverait

$$\frac{1}{\sqrt{u^2-2(1-2y)u+1}}\log\frac{u-1+2y+\sqrt{u^2-2(1-2y)u+1}}{u-1+2y-\sqrt{u^2-2(1-2y)u+1}} = \Sigma u^n Q_n(y).$$

Enfin l'expression (40) de $Q_n$ est très-propre à nous faire connaître une expression approchée de $Q_n$ pour $n$ très-grand. L'intégrale qui figure dans cette formule a déjà été considérée (art. IV) et, pour avoir l'expression de $Q_n$, il suffira d'appliquer l'équation (29) de cet article et de remplacer les factorielles par leurs expressions approchées. Posons

$$y = -\frac{(\eta+1)^2}{4\eta}, \quad \eta = 1 - 2y + \sqrt{4y^2 - 4y},$$

le signe du radical étant choisi de manière que le module de $\eta$ soit supérieur à l'unité; nous aurons

$$(46) \quad \frac{Q_n}{J_n} = \sqrt{\pi}\,\frac{2^{3-\alpha}n^{\gamma-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\gamma)}\left(1-\eta^{-1}\right)^{\gamma-\frac{3}{2}}\left(1+\eta^{-1}\right)^{\alpha-\gamma-\frac{1}{2}}\eta^{-n-1}(1+\varepsilon_n),$$

ou plus simplement

$$(47) \qquad \frac{Q_n}{J_n} = n^{\gamma-\frac{1}{2}}f(\eta)\eta^{-n-1}, \quad \eta = 1 - 2y + \sqrt{4y^2-4y},$$

$f(\eta)$ étant une fonction, toujours la même, de $\eta$. Cette formule est toute pareille à celle de $X_n$, qu'on peut écrire, comme nous l'avons vu,

$$(48) \qquad X_n = n^{\frac{1}{2}-\gamma}\varphi(\xi)\xi^n, \quad \xi = 1 - 2x + \sqrt{4x^2-4x},$$

$\varphi(\xi)$ étant une fonction connue par ce qui précède (art. II). $\xi$ et $\eta$ ont respectivement pour modules la somme des deux demi-axes des ellipses de foyers o, 1 passant par les points qui représentent les variables $x$, $y$.

Nous terminerons par une remarque sur l'étendue des résultats obtenus. Notre point de départ supposait $\gamma$, $\alpha-\gamma+1$ positifs ; mais nous pouvons maintenant nous affranchir de cette supposition. En effet, la formule (40) est valable, quels que soient $\alpha$ et $\gamma$, pour des valeurs suffisamment grandes de $n$, et l'équation aux différences déterminera les fonctions pour lesquelles l'intégrale qui y figure n'aura aucun sens. Dans tous les cas, les fonctions $Q_n$ ainsi déterminées satisfont à l'équation différentielle du second ordre que nous avons donnée pour elles. Nous trouvons ainsi, dans les résultats obtenus pour une hypothèse particulière, un point de départ pour les appliquer à tous les polynômes qui naissent de la série hypergéométrique.

## XIII.

Nous pouvons maintenant démontrer la convergence et déterminer la somme de la série qui sert de développement à $\frac{1}{x-y}$, en employant la formule principale de notre Mémoire *Sur le théorème de Sturm.*

Supposons que l'on désigne par $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$ deux solutions distinctes ou confondues de la même équation aux différences

$$u_n X_{n+1} + (v_n + w_n x) X_n + t_n X_{n-1} = 0,$$

où $u_n$, $v_n$, $w_n$, $t_n$ sont des fonctions de $n$. On peut toujours, en multipliant par une fonction de $n$, donner à cette équation la forme

$$u_n X_{n+1} + u_{n-1} X_{n-1} + (v_n + w_n x) X_n = 0.$$

On aura, en exprimant que les deux solutions satisfont à cette équation,

$$\begin{aligned} u_n \varphi_{n+1}(x) + u_{n-1}\varphi_{n-1}(x) + (v_n + w_n x)\varphi_n(x) &= 0, \\ u_n \psi_{n+1}(y) + u_{n-1}\psi_{n-1}(y) + (v_n + w_n y)\psi_n(y) &= 0. \end{aligned}$$

Multiplions la première de ces équations par $\psi_n(y)$, la seconde par $-\varphi_n(x)$ et ajoutons-les; nous obtiendrons la formule

$$(49)\quad \left\{ \begin{aligned} & u_n \frac{\varphi_{n+1}(x)\psi_n(y) - \psi_{n+1}(y)\varphi_n(x)}{x-y} \\ & \quad - u_{n-1}\frac{\varphi_n(x)\psi_{n-1}(y) - \varphi_{n-1}(x)\psi_n(y)}{x-y} = -w_n\varphi_n(x)\psi_n(y). \end{aligned} \right.$$

Le terme $-w_n\varphi_n(x)\psi_{n-1}(y)$ se présente comme la différence de deux expressions qui ne diffèrent l'une de l'autre que par le changement de $n$ en $n-1$, et par suite la somme

$$\sum_{n=h}^{n=k} w_n \varphi_n(x)\psi_n(y)$$

se ramènera toujours à la différence de deux termes semblables.

Appliquons cette remarque générale à notre équation aux différences et aux deux fonctions $X_n(x) Q_n(y)$. On trouvera

$$\begin{aligned} \frac{X_n Q_n}{J_n} = {} & \frac{n(n+\alpha-\gamma)}{(2n+\alpha)(2n+\alpha-1)} \frac{X_n Q_{n-1} - X_{n-1} Q_n}{J_n(x-y)} \\ & - \frac{(n+1)(n+\alpha-\gamma+1)}{(2n+\alpha+2)(2n+\alpha+1)} \frac{X_{n+1} Q_n - X_n Q_{n+1}}{J_{n+1}(x-y)}. \end{aligned}$$

L'équation aux différences admet comme solution $Q_n$ à partir de $n = 1$. Faisons la somme des équations qu'on obtient en donnant dans la formule précédente à $n$ les valeurs $1.2\ldots n$; nous aurons

$$\frac{X_1 Q_1}{J_1} + \cdots + \frac{X_n Q_n}{J_n} = \frac{1+\alpha-\gamma}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \frac{X_1 Q_0 - X_0 Q_1}{(x-y) J_1} - \frac{(n+1)(n+\alpha-\gamma+1)}{(2n+\alpha+1)(2n+\alpha+2)} \frac{X_{n+1} Q_n - X_n Q_{n+1}}{J_{n+1}(x-y)}.$$

Ajoutons aux deux membres $\frac{X_0 Q_0}{J_0}$ et remplaçons $Q_1$ par sa valeur tirée de la formule (36), nous aurons

$$(50)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{X_0 Q_0}{J_0} + \cdots + \frac{X_n Q_n}{J_n} \\ &= \frac{1}{x-y} - \frac{(n+1)(n+\alpha-\gamma+1)}{(2n+\alpha+1)(2n+\alpha+2)} \frac{X_{n+1} Q_n - X_n Q_{n+1}}{(x-y) J_{n+1}}. \end{aligned} \right.$$

Cette formule peut être considérée comme la généralisation de la propriété bien connue que possède le développement de $\frac{1}{x-y}$ suivant les puissances de $x$. Dans l'un et l'autre cas on peut ramener à la réunion de deux termes la somme d'un nombre quelconque de termes consécutifs de la série. La marche que nous avons suivie montre que cette propriété subsistera pour tous les polynômes formant une suite de Sturm. Nous reviendrons sur ce point dans le dernier article.

Pour prouver que la série est convergente et a pour somme $\frac{1}{x-y}$, il suffira d'établir que le terme

$$\frac{(n+1)(n+\alpha-\gamma+1)}{(2n+\alpha+1)(2n+\alpha+2)} \frac{X_{n+1} Q_n - X_n Q_{n+1}}{(x-y) J_{n+1}}$$

tend vers zéro lorsque $n$ grandit indéfiniment. Or, si nous remplaçons les polynômes par leurs expressions approchées (46), (47), nous obtenons pour le reste la formule

$$\frac{f(\eta)\varphi(\xi)}{4(x-y)} \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{\eta}{\xi}\right)(1+\varepsilon_n).$$

Il tendra donc vers zéro toutes les fois que le module de $\xi$ sera inférieur à celui de $\eta$, et il croîtra indéfiniment dans le cas contraire. Ainsi nous obtenons la proposition suivante :

*La série*

$$\frac{X_0 Q_0}{J_0} + \frac{X_1 Q_1}{J_1} + \cdots$$

*sera convergente et aura pour somme* $\frac{1}{x-y}$ *seulement si le point* $x$ *est à l'intérieur de l'ellipse passant par le point* $y$ *et ayant pour foyers les deux points* $0$, $1$.

Si les deux points $x$, $y$ étaient sur la même ellipse, la somme de la série serait indéterminée.

En étudiant de même la série

$$\sum \frac{Q_n(x) Q_n(y)}{J_n},$$

on verra qu'elle est toujours convergente et a pour somme

$$\frac{Q_0(x) - Q_0(y)}{x-y}.$$

## XIV.

Considérons maintenant une fonction quelconque continue et uniforme dans l'anneau compris entre deux des ellipses homofocales si souvent considérées, et soit A le point représentant la variable $t$.

D'après la formule de Cauchy, on aura

$$2\pi i f(t) = \int_C \frac{f(z)\,dz}{z-t} - \int_{C'} \frac{f(z)\,dz}{z-t},$$

les deux intégrales étant prises sur les contours C, C' des deux ellipses supposées, parcourus dans le sens direct. Cette formule nous permet de développer $f(t)$. En effet, appelons $T_n$ ce que devient le polynôme $X_n$ quand on y remplace $x$ par $t$. Nous aurons sur le contour C la série convergente

$$\frac{1}{z-t} = -\sum \frac{T_n Q_n(z)}{J_n},$$

et par conséquent

$$\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-t} = -\sum \frac{T_n}{J_n} \int_C f(z) Q_n(z)\,dz.$$

Sur le contour C′ on aura, au contraire,

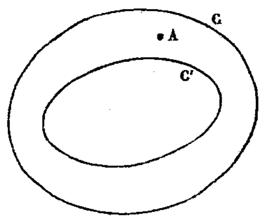
$$\frac{1}{z-t} = \sum \frac{Z_n Q_n(t)}{J_n},$$

la série étant également convergente; et, par suite,

$$\int_{C'} \frac{f(z)\,dz}{z-t} = \sum \frac{Q_n(t)}{J_n} \int_C f(z) Z_n\,dz.$$

En réunissant ces deux résultats, nous obtenons la formule

$$(51)\quad f(t) = -\frac{1}{2\pi i}\sum \frac{T_n}{J_n}\int_C f(z)\,Q_n(z)\,dz - \frac{1}{2\pi i}\sum \frac{Q_n(t)}{J_n}\int_{C'} f(z) Z_n\,dz,$$




c'est-à-dire le développement de $f(t)$ en une série de fonctions de première et de seconde espèce. L'emploi de l'équation (50) nous donnerait au besoin une limite de l'erreur commise quand on s'arrête à un terme de rang quelconque.

Si la fonction est continue à l'intérieur de l'ellipse (C) tout entière, les intégrales multiplicateurs des fonctions $Q_n$ sont évidemment nulles, et il ne reste que les fonctions de première espèce. Au contraire, si la fonction est continue à l'extérieur de l'ellipse (C′) jusqu'à l'infini, sans point singulier à l'infini, la série ne contient plus que des fonctions de seconde espèce. Nous obtenons, comme cas particulier, la proposition suivante :

*La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit développable en une série de fonctions $X_n$, c'est qu'elle soit continue, uniforme et finie à l'intérieur d'une ellipse.*

## XV.

Nous terminerons notre travail en donnant diverses expressions de la fonction $Q_n$.

L'équation à laquelle satisfait $X_n$ peut s'écrire

$$\frac{d}{dx}\left[x^\gamma(1-x)^{\alpha-\gamma+1}\frac{dy}{dx}\right] = -n(n+\alpha)yx^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}.$$

Nous en connaissons deux solutions, $X_n$ et la fonction que nous avons appelée $U_n$. On aura donc entre ces deux intégrales la relation

$$x^\gamma(1-x)^{\alpha-\gamma+1}\left(U_n\frac{dX_n}{dx} - X_n\frac{dU_n}{dx}\right) = C.$$

En intégrant et se rappelant que $U_n$ et $Q_n$ sont nuls pour $x = \infty$, on a

$$U_n = CX_n\int_x^\infty \frac{dx}{x^\gamma(1-x)^{\alpha-\gamma+1}X_n^2},$$

et par conséquent

$$Q_n = CX_n x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\int_x^\infty \frac{dx}{x^\gamma(1-x)^{\alpha-\gamma+1}X_n^2}.$$

Pour obtenir le coefficient C, il suffit de développer suivant les puissances décroissantes de $x$ et de comparer le premier terme de ce développement à celui de la formule (41). On trouve ainsi

$$C = (2n+\alpha)J_n,$$

$$(52)\quad Q_n(x) = (2n+\alpha)J_nX_nx^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\int_x^\infty \frac{dx}{x^\gamma(1-x)^{\alpha-\gamma+1}X^2}$$

Il m'a paru intéressant de vérifier que cette intégrale se ramène à une fonction linéaire de $Q_0$.

A cet effet, décomposons en fractions simples $\frac{1}{x(1-x)X_n^2}$. Si nous appelons $u$ une racine quelconque du polynôme $X_n$, nous aurons

$$\frac{1}{x(1-x)X_n^2} = \frac{1}{x} + \frac{h}{1-x} + \sum \frac{B_u}{x-u} + \sum \frac{A_u}{(x-u)^2}. \tag{53}$$

En calculant $A_u$, $B_u$, et tenant compte de l'équation différentielle pour éliminer de l'expression de $B_u$ la dérivée seconde de $X_n$, on trouve

$$A_u = \frac{1}{u(1-u)U'^2}, \quad B_u = A_u\left(\frac{\alpha-\gamma}{u-1} + \frac{\gamma-1}{u}\right).$$

On aura ainsi

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{x^\gamma(1-x)^{\alpha-\gamma+1}X_n^2} &= \frac{d}{dx}\sum \frac{A_u}{(u-x)x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}} \\ &+ \frac{1}{x^\gamma(1-x)^{\alpha-\gamma+1}}\left[1 + \sum \frac{(\gamma-1)A_u}{u}\right] \\ &+ \frac{1}{x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma+1}}\left[h - 1 + \sum \frac{(\alpha-\gamma)A_u}{1-u}\right. \\ &\qquad\qquad \left. + \sum \frac{(1-\gamma)A_u}{u}\right]. \end{aligned}\right. \tag{54}$$

Le dernier terme disparaît, car son coefficient est celui de $\frac{1}{x}$ dans le développement du second membre de l'équation (53), suivant les puissances de $\frac{1}{x}$, coefficient qui doit être nul, car le terme en $\frac{1}{x}$ n'existe pas dans le développement du premier membre de la même équation. En substituant l'expression de $\frac{1}{X_n^2}$ tirée de la formule (54) dans l'intégrale (52), et posant, pour abréger,

$$H_n = 1 + \sum \frac{(\gamma-1)A_u}{u},$$

nous aurons

$$\begin{aligned} Q_n(x) &= (2n+\alpha)J_n \sum \frac{A_u X_n}{x-u} \\ &+ (2n+\alpha)J_n H_n X_n x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\int_x^\infty \frac{dx}{x^\gamma(1-x)^{\alpha-\gamma+1}}. \end{aligned}$$

On a d'ailleurs, en vertu de la même équation (52),

$$Q_0 = \alpha J_0 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\int_x^\infty \frac{dx}{x^\gamma(1-x)^{\alpha-\gamma+1}}.$$

En comparant cette équation à la précédente, on trouve qu'en posant

$$R_n(x) = (2n+\alpha)J_n \sum \frac{A_u X_n}{x-u}$$

on a

$$Q_n(x) = R_n(x) + \frac{(2n+\alpha)J_n H_n}{\alpha J_0} X_n Q_0.$$

C'est bien la forme générale que nous avons trouvée, et l'on voit que la constante

$$\frac{(2n+\alpha)J_n H_n}{\alpha J_0}$$

doit être égale à l'unité. Toutefois, les intégrales précédentes n'ont un sens que si l'on a $\alpha > 0$. La démonstration suppose donc remplie cette condition.

Les fonctions de seconde espèce peuvent recevoir d'autres expressions très-élégantes.

Par exemple, si l'on différentie $n$ fois l'équation différentielle à laquelle satisfont $X_n$ et $U_n$,

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha+1)x]\frac{dy}{dx} + n(n+\alpha)y = 0,$$

on trouve

$$x(1-x)\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}} + [n+\gamma-(\alpha+2n+1)x]\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = 0,$$

équation qui admet deux solutions :

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = 0, \quad \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \frac{C}{x^{n+\gamma}(1-x)^{\alpha+n-\gamma+1}}.$$

La première dérive de $X_n$, la seconde de $U_n$. On a donc

$$(55) \qquad \frac{d^{n+1}U}{dx^{n+1}} = \frac{C}{x^{n+\gamma}(1-x)^{\alpha+n-\gamma+1}},$$

et, par suite,

$$(56)\qquad U_n = C\left(\int_x^\infty\right)^{n+1}\frac{dx}{x^{n+\gamma}(1-x)^{\alpha+n-\gamma+1}} = C\int_x^\infty \frac{dx^{n+1}}{x^{n+\gamma}(1-x)^{\alpha+n-\gamma+1}}.$$

On en déduit

$$Q_n = Cx^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\int_x^\infty \frac{dx^{n+1}}{x^{n+\gamma}(1-x)^{\alpha+n-\gamma+1}}.$$

La constante C se détermine par la considération du premier terme du développement, et l'on trouve

$$(57)\qquad Q_n = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+n-\gamma+1)}{\Gamma(n+\alpha)}x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha+\gamma}\int_x^\infty \frac{dx^{n+1}}{x^{n+\gamma}(1-x)^{\alpha+n-\gamma+1}},$$

ce qu'on peut aussi écrire, d'après un théorème connu relatif aux intégrations répétées,

$$(58)\qquad Q_n = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+n-\gamma+1)}{\Gamma(n+\alpha)}x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\int_x^\infty \frac{(y-x)^n\,dy}{y^{n+\gamma}(1-y)^{\alpha+n-\gamma+1}},$$

équation toute pareille à celle de Jacobi et se prêtant à la méthode de Laplace pour l'approximation de $Q_n$.

Nous donnerons enfin une expression de $Q_n$, qui n'est que curieuse.

L'équation (32), à laquelle satisfait $Q_n$, est la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la suivante :

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{dV}{dx}x^{1-\gamma-n}(1-x)^{\gamma-\alpha-n}\right] = Cx^{-\gamma-n}(1-x)^{\gamma-\alpha-n+1}.$$

Il résulte de cette remarque la nouvelle expression de $Q_n$

$$Q_n = C\frac{d^n}{dx^n}x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma}\int_x^\infty \frac{dx}{x^{n+\gamma}(1-x)^{\alpha+n-\gamma+1}}$$

comme dérivée $n^{\text{ième}}$. Le calcul de la constante C nous donne le résultat

$$(59)\qquad Q_n = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+n-\gamma+1)}{\Gamma(2n+\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma}\int_x^\infty \frac{dx}{x^{\gamma+n}(1-x)^{\alpha+n-\gamma+1}}.$$

Enfin nous ajouterons cette remarque, que la formule de Jacobi peut aussi s'écrire

$$(60) \qquad Q_n = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+n)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^1 \frac{x^{\gamma+n-1}(1-y)^{\alpha+n-\gamma}}{y-x} dy.$$

On voit que nous avons huit expressions différentes des fonctions $Q_n$

## XVI.

Il nous semble que la méthode employée dans cette partie de notre travail va au delà du problème que nous avons traité, et qu'elle pourra s'étendre à l'étude d'une classe étendue de développements, de tous ceux qui sont ordonnés suivant des fonctions formant une suite de Sturm. Supposons, en effet, pour fixer les idées, que ces fonctions soient des polynômes de degrés $0, 1, \ldots, X_0, X_1, \ldots$ jouissant de la propriété suivante :

Il existe une fonction $f(x)$ telle que l'on ait

$$(61) \qquad \int_b^a f(x) X_m X_n dx = 0$$

toutes les fois que $m$ est différent de $n$.

On peut d'abord démontrer, et cette propriété est du reste connue, que ces polynômes forment une suite de Sturm.

Remarquons d'abord qu'il résulte de la formule précédente que l'on a

$$(62) \qquad \int_a^b f(x) P X_n dx = 0,$$

P étant un polynôme quelconque de degré inférieur à $n$.

Ce point étant admis, supposons, pour préciser, qu'on ait multiplié chaque polynôme par un nombre tel que le coefficient de la plus haute puissance de $x$ soit l'unité. Le premier $X_0$ sera égal à 1. De plus, le produit $xX_n$ pourra évidemment s'exprimer de la manière suivante :

$$xX_n = X_{n+1} + C_0 X_n + C_1 X_{n-1} + \ldots + C_n X_0.$$

Je dis que, dans cette formule, toutes les constantes sont nulles à partir de $C_2$. Multiplions, en effet, les deux membres par

$$f(x) X_{n-p} dx,$$

et intégrons entre les limites $a$ et $b$, nous aurons, en tenant compte de l'équation (61),

$$\int_a^b f(x)\, x X_{n-p} X_n\, dx = C_p \int_a^b X_{n-p}^2 f(x)\, dx.$$

Nous désignerons par $J_p$ l'intégrale

$$J_p = \int_a^b X_p^2 f(x)\, dx.$$

que nous supposerons toujours différente de zéro. L'équation précédente deviendra

$$\int_a f(x)\, x X_{n-p} X_n dx = C_p J_{n-p}. \tag{63}$$

Or, si $p$ est égal ou supérieur à 2, $xX_{n-p}$ sera au plus du degré $n-1$, et, en vertu de la formule (62), le premier membre sera nul. On aura donc

$$C_p = 0.$$

Ainsi l'équation (62) est de la forme

$$xX_n = X_{n+1} + C_0 X_n + C_1 X_{n-1}, \tag{64}$$

qui montre bien que les polynômes forment une suite de Sturm. On aurait de même

$$x X_{n-1} = X_n + D_0 X_{n-1} + D_1 X_{n-2}. \tag{65}$$

Cela posé, dans la formule (63), faisons $p = 1$ ; on aura

$$C_1 J_{n-1} = \int_a^b f(x) x X_{n-1} X_n dx.$$

Substituons dans le second membre la valeur de $x X_{n-1}$ déduite de l'équation (65); on aura

$$C_1 J_{n-1} = \int f(x) X_n^2 dx = J_n,$$

et par conséquent

(66) $$C_1 = \frac{J_n}{J_{n-1}}.$$

L'équation (64) prend donc la forme

(67) $$x X_n = X_{n+1} + \alpha_n X_n + \frac{J_n}{J_{n-1}} X_{n-1}.$$

Désignons maintenant par $Y_n$ le résultat de la substitution de $y$ à $x$ dans les fonctions $X_n$ et changeons $x$ en $y$ dans l'équation précédente. Elle deviendra

$$y Y_n = Y_{n+1} + \alpha_n Y_n + \frac{J_n}{J_{n-1}} Y_{n-1}.$$

Multiplions cette équation par $X_n$, la précédente par $-Y_n$ et ajoutons les résultats obtenus ; nous aurons

$$\frac{X_n Y_n}{J_n} = \frac{X_{n+1} Y_n - X_n Y_{n+1}}{J_n (x - y)} - \frac{X_n Y_{n-1} - X_{n-1} Y_n}{J_{n-1} (x - y)}.$$

Si dans cette formule nous remplaçons successivement $n$ par 0, 1, 2,..., et que nous fassions la somme des résultats obtenus, nous trouverons

(68) $$\frac{X_0 Y_0}{J_0} + \frac{X_1 Y_1}{J_1} + \dots + \frac{X_n Y_n}{1} = \frac{X_{n+1} Y_n - X_n Y_{n+1}}{J_n (x - y)}.$$

Supposons maintenant qu'on veuille développer une fonction $\varphi(x)$ en une série de polynômes $X_n$

$$\varphi(x) = A_0 X_0 + A_1 X_1 + \dots + A_n X_n + \dots.$$

En multipliant les deux membres par $f(x)\, X_n\, dx$ et intégrant, on aura

$$A_n J_n = \int_a^b \varphi(x) f(x) X_n\, dx.$$

D'où il suit que l'on aura pour $\varphi(x)$ la série

$$\varphi(x) = \sum \frac{X_n}{J_n} \int_a^b \varphi(y) f(y) Y_n\, dy,$$

dont il s'agit de démontrer la convergence et de déterminer la somme. Or, en désignant par $S_n$ la somme des $n+1$ premiers termes, on aura

$$S_n = \int_a^b \varphi(y) f(y) \left( \frac{X_0 Y_0}{J_0} + \ldots + \frac{X_n Y_n}{J_n} \right) dy$$

ou, d'après la formule (68),

$$S_n = \frac{1}{J_n} \int_a^b \varphi(y) f(y) \frac{X_{n+1} Y_n - X_n Y_{n+1}}{x-y}\, dy.$$

Toute la difficulté sera ramenée à la recherche de la limite de cette intégrale.

Considérons, en particulier, la fonction $\frac{1}{x-y}$ et soit

$$\frac{1}{x-y} = \frac{X_0 Q_0}{J_0} + \ldots + \frac{X_n Q_n}{J_n} + \ldots.$$

On aura

$$Q_n = \int_a^b \frac{f(x) X_n\, dx}{x-y}. \tag{69}$$

Nous appellerons les polynômes $X_n$ fonctions de première espèce et les fonctions $Q_n$ fonctions de seconde espèce.

Il est aisé de reconnaître que les fonctions de seconde espèce satisfont à la même équation aux différences que les polynômes $X_n$. On a, en effet,

$$\frac{y Q_n}{J_n} - \frac{Q_{n+1}}{J_n} - \alpha_n Q_n - \frac{Q_{n-1}}{J_{n-1}} = \int_a^b \frac{f(x)\, dx}{x-y} \left( \frac{y X_n}{J_n} - \frac{X_{n+1}}{J_n} - \alpha_n X_n - \frac{X_{n-1}}{J_{n-1}} \right)$$

ou, en tenant compte de l'équation aux différences (67) pour les polynômes $X_n$,

$$\frac{yQ_n}{J_n} - \frac{Q_{n+1}}{J_n} - \alpha_n Q_n - \frac{Q_{n-1}}{J_{n-1}} = -\int_a^b \frac{f(x)\,dx\,X_n}{J_n} = -\frac{1}{J_n}\int_a^b f(x)\,X_n\,X_0\,dx;$$

le second membre est nul tant que $n$ est différent de zéro, et pour $n = 0$ il se réduit à $-1$. On a donc

$$(71)\qquad \begin{cases} \dfrac{yQ_n}{J_n} - \dfrac{Q_{n+1}}{J_{n+1}} - \alpha_n Q_n - \dfrac{Q_{n-1}}{J_{n-1}} = 0, \quad n > 0, \\[2mm] \dfrac{yQ_0}{J_0} - \dfrac{Q}{J_0} - \alpha_0 Q_0 = -1. \end{cases}$$

Ces formules permettent de calculer de proche en proche toutes les fonctions de seconde espèce au moyen de la première.

En éliminant $\alpha_n$ entre les équations (71), (67), on aura

$$\frac{X_n Q_n}{J_n} = \frac{X_{n+1} Q_n - X_n Q_{n+1}}{J_n(x-y)} - \frac{X_n Q_{n-1} - X_{n-1} Q_n}{J_{n-1}(x-y)}$$

et par suite

$$\frac{X_1 Q_1}{J_1} + \frac{X_2 Q_2}{J_2} \dots + \frac{X_n Q_n}{J_n} = \frac{X_{n+1} Q_n - X_n Q_{n+1}}{J_n(x-y)} - \frac{X_1 Q_0 - X_0 Q_1}{J_n(x-y)}.$$

En substituant à $X_1$, $Q_1$ leurs valeurs, on aura la formule définitive

$$(72)\qquad \frac{X_0 Q_0}{J_0} + \frac{X_1 Q_1}{J_1} + \dots + \frac{X_n Q_n}{J_n} = \frac{1}{x-y} - \frac{X_n Q_{n+1} - X_{n+1} Q_n}{J_n(x-y)}$$

et il ne restera plus qu'à chercher sous quelles conditions le dernier terme du second membre tend vers zéro pour avoir dans tous les cas les conditions de convergence de la série qui développe $\frac{1}{x-y}$.

Une fois cette recherche faite, le théorème de Cauchy permettra de développer toute fonction $F(z)$ en une série formée de fonctions de première et de seconde espèce.

C'est la méthode que nous avons suivie dans ce travail. Les rapports de la théorie précédente et de celle des fractions continues sont à peu près évidents.

D'abord, si l'on développe $Q_n$ suivant les puissances de $\frac{1}{y}$, le développement commencera au terme en $\frac{1}{y^{n+1}}$. En effet, on a

$$-Q_n = \int_a^b \frac{f(x)X_n\,dx}{y-x}$$
$$= \int_a^b f(x)X_n\,dx\left[\frac{1}{y} + \frac{x}{y^2} + \frac{x^2}{y^3} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{y^n} + \frac{x^n}{y^n(y-x)}\right]$$

ou, en se rappelant les propriétés des intégrales, $\int f(x)\,x^p X_n\,dx$,

$$Q_n = \frac{1}{y^n}\int_a^b \frac{f(x)X_n x^n\,dx}{x-y}, \tag{73}$$

formule qui met en évidence la propriété annoncée.

D'autre part, on peut écrire

$$Q_n = \int_a^b f(x)\,\frac{X_n - Y_n}{x-y}\,dx + Y_n\int_a^b \frac{f(x)\,dx}{x-y}.$$

Le premier terme du second membre est un polynôme $R_n(y)$. Le second est le produit de $Y_n$ par $Q_0$. On aura donc

$$Q_n = R_n + Y_n Q_0$$

ou

$$Q_0 = -\frac{R_n}{Y_n} + \frac{Q_n}{Y_n}.$$

Le développement de $\frac{Q_n}{Y_n}$ suivant les puissances décroissantes de $y$ commencera au terme $\frac{1}{y^{2n+1}}$. Donc $-\frac{R_n}{Y_n}$ est la $n^{\text{ième}}$ réduite du développement de

$$Q_0 = \int_a^b \frac{f(x)\,dx}{x-y}$$

en fraction continue.

Cette remarque établit le lien entre notre théorie et celle que M. Heine a constituée pour l'intégrale précédente.