JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BOUSSINESQ

Complément à une Étude intitulée « Essai sur la théorie des eaux courantes » (publiée dans les tomes XXIII, XXIV du « Recueil des Savants étrangers »), et à un Mémoire « Sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides » (inséré au tome XIII du « Journal de Mathématiques pures et appliquées », 2e série, 1868)

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 4 (1878), p. 335-376.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1878_3_4__335_0>

Complément à une **Étude intitulée** *« Essai sur la théorie des eaux courantes » (publiée dans les tomes XXIII, XXIV du « Recueil des Savants étrangers »), et à un Mémoire « Sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides » (inséré au tome XIII du « Journal de Mathématiques pures et appliquées », 2e série, 1868);*

PAR M. J. BOUSSINESQ.

§ I. — *Du régime graduellement varié dans un écoulement bien régulier ou non tourbillonnant*

1. Au § XI d'un *Essai sur la théorie des eaux courantes*, publié au t. XXIII du *Recueil des Savants étrangers* de l'Académie des Sciences de Paris, j'ai étudié l'écoulement d'un liquide par filets peu courbes et peu inclinés les uns sur les autres, dans les circonstances ordinaires où le mouvement est tourbillonnant, tumultueux, et où, par suite, le coefficient ε, dit de frottement intérieur, affectant dans les formules des pressions les dérivées partielles des *vitesses moyennes locales*, varie en chaque point avec l'*agitation* qui y règne. Le plus intéressant de ces modes d'écoulement est celui que j'appelle *graduellement varié*, et dans lequel la vitesse moyenne, ainsi que la section normale fluide, ont leurs dérivées secondes, troisièmes, etc., tant par rapport à la coordonnée longitudinale que par rapport au temps, beaucoup moins influentes que leurs dérivées premières; en sorte qu'on puisse les négliger devant celles-ci, dont on suppose d'ailleurs insensibles les carrés et les produits. Les équations qui le régissent ont une grande importance pratique, parce qu'elles sont simples, et parce qu'elles s'appliquent à l'écoulement, par les tuyaux et par les canaux découverts, dans la plupart des cas où l'équation du régime uniforme est en défaut, quoique les vitesses continuent presque à y être distribuées aux divers points d'une même section comme elles le seraient dans un écoulement uniforme. Mais lorsque, au contraire, les mouvements sont bien continus, comme il arrive dans des tubes polis et assez étroits, en sorte que les vitesses vraies et les dérivées de ces vitesses se confondent à fort peu près avec leurs moyennes locales respectives, et quand d'ailleurs le fluide mouille son lit ou est immobilisé contre les parois qui le délimitent, un régime graduellement varié diffère toujours fort peu d'un régime uniforme, sous le rapport de la relation existant entre la vitesse moyenne, la pente motrice et le rayon moyen. C'est ce que je démontrerai au n° 5 ci-après. Dans ce cas, la théorie du mouvement graduellement varié est donc plus curieuse pour le géomètre qu'utile à l'ingénieur, et c'est pourquoi je me suis abstenu de l'exposer dans l'*Essai sur la théorie des eaux courantes*, ainsi que dans les *Additions* insérées au tome suivant, XXIV, du *Recueil des Savants étrangers*. Mais on me permettra d'en donner ici un aperçu, comme complément à un précédent Mémoire *Sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides*, où se trouvent traitées un certain nombre de questions concernant les mouvements bien continus.

2. Je prendrai un système d'axes rectangles des x, y, z tels, que celui des x fasse de très-petits angles avec les vitesses, dont u, v, w désigneront les composantes : ainsi v, w et même la dérivée

$$\frac{du}{dx} = -\left(\frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right)$$

seront partout très-petites. Dans les équations du mouvement, les termes affectés du petit coefficient constant de frottement ε seront insensibles quand ils auront en outre, comme second facteur, soit une dérivée de v, w, soit même une dérivée de u prise une ou plusieurs fois par rapport à x. Les composantes transversales v, w de la vitesse étant d'ailleurs comparables à la dérivée en x de la composante longitudinale u, ou, plus exactement, au produit de cette dérivée par les dimensions transversales de la masse fluide, les dérivées premières de v, w en x et t se trouveront de l'ordre de petitesse des dérivées secondes de u par rapport à x et à t, dérivées qu'on négligera, ainsi que les carrés et produits de v, w, $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dt}$. Par suite, les accélérations *latérales* $v' = \frac{dv}{dt} + u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz}$, $w' = \ldots$ seront insensibles, et les deux dernières équations indéfinies du mouvement ne différeront pas de celles qu'on aurait pour un fluide en équilibre, ou signifieront que la pression p varie hydrostatiquement, à l'époque t, d'un point à l'autre d'une même section fluide σ, normale à l'axe des x. Concevons qu'on trace, pour l'époque considérée t, une ligne déterminée, peu inclinée sur l'axe des x, mais d'ailleurs quelconque; et soient p_0 la pression actuelle au point de cette ligne qui a l'abscisse x, I l'inclinaison, sous l'horizon, d'un élément ds de la même ligne, élément compris entre les abscisses x, $x + dx$; enfin ρ la densité du fluide ou ρg son poids par unité de volume. La variation de la pression p_0 le long de l'élément ds serait $\rho g \sin \mathrm{I}\, ds$, si cette pression variait hydrostatiquement d'une section à l'autre, tandis qu'elle vaudra, en réalité, $\frac{dp_0}{ds}ds$: l'excès $\left(\frac{dp_0}{ds} - \rho g \sin \mathrm{I}\right) ds$ représente donc la variation éprouvée, d'une section à l'autre, par la partie non hydrostatique de la pression, et son quotient par dx, c'est-à-dire, sauf erreur négligeable du second ordre de petitesse, l'expression $\frac{dp_0}{ds} - \rho g \sin \mathrm{I}$, ou $\frac{dp_0}{dx} - \rho g \sin \mathrm{I}$, sera, d'après des formules connues dues à Navier, celle qu'il faudra égaler à

$$\varepsilon\left(\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right) - \rho u',$$

ou à

$$\varepsilon\left(\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right) - \rho\left(\frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz}\right),$$

pour avoir la première équation indéfinie du mouvement. Celle-ci, divisée par ρg, peut donc s'écrire

$$(1)\qquad \frac{\varepsilon}{\rho g}\left(\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right) + \left(\sin \mathrm{I} - \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{ds}\right) = \frac{u'}{g}.$$

Elle devra être vérifiée en tous les points de la section normale σ, ayant l'abscisse quelconque x. En outre, si m, n désignent les cosinus des angles que fait avec les y et les z la normale à cette section, menée vers le dehors, on aura, sur le contour de σ, les conditions spéciales :

$$(2)\qquad u = 0 \text{ (aux parois)},\quad m\frac{du}{dy} + n\frac{du}{dz} = 0 \text{ (à la surface libre)}.$$

Ces conditions expriment, la première, l'immobilité du fluide contre les parois; la seconde, l'absence de tout frottement sensible exercé sur le fluide, à la surface libre, par l'atmosphère contiguë.

3. Ces équations se traiteront par la méthode suivie au § XL de l'*Essai sur la théorie des eaux courantes* (p. 491), pour le cas de mouvements tourbillonnants. Multiplions d'abord la première, (1), par $dy\,dz$ ou $d\sigma$, et intégrons les résultats dans toute l'étendue de la section fluide σ. Si χ' désigne le contour de σ, $d\chi'$ un élément quelconque de ce contour, $\int_{\chi'}$ une intégrale prise sur toute la longueur du même contour, et aussi, pour abréger,

$$\frac{d}{dN} = m\frac{d}{dy} + n\frac{d}{dz}$$

la dérivée d'une fonction le long d'un élément infiniment petit de la normale à $d\chi'$, un procédé bien connu d'intégration donnera

$$\int_\sigma \left(\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right) d\sigma = \int_{\chi'} \left(m\frac{du}{dy} + n\frac{du}{dz}\right) d\chi' = \int_{\chi'} \frac{du}{dN} d\chi'.$$

Mais la deuxième condition spéciale (2) montre que les éléments de cette dernière intégrale, qui sont relatifs à la surface libre, s'annulent, en sorte qu'il suffit d'étendre l'intégrale à tous les éléments $d\chi$ du *contour mouillé* χ. Le résultat total obtenu, divisé par σ, sera donc

$$(3)\qquad \frac{\varepsilon}{\rho g \sigma}\int_\chi \frac{du}{dN} d\chi + \left(\sin I - \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{ds}\right) = \frac{1}{g}\int_\sigma u' \frac{d\sigma}{\sigma}.$$

C'est de cette relation (3) que nous tirerons l'équation du mouvement graduellement varié. Retranchons-la de (1), afin d'éliminer de celle-ci la *pente motrice* $\sin I - \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{ds}$; puis divisons le résultat par la vitesse moyenne U, dont l'expression est

$$(4) \qquad U = \int_\sigma u \frac{d\sigma}{\sigma}:$$

il viendra

$$(5) \qquad \frac{\varepsilon}{\rho g}\left(\frac{d^2\frac{u}{U}}{dy^2} + \frac{d^2\frac{u}{U}}{dz^2} - \frac{\chi}{\sigma}\int_\chi \frac{d\frac{u}{U}}{dN}\frac{d\chi}{\chi}\right) = \frac{1}{gU}\left(u' - \int_\sigma u' \frac{d\sigma}{\sigma}\right).$$

Les conditions (2), spéciales au contour-limite, s'écriront d'ailleurs

$$(6) \qquad \frac{u}{U} = 0 \text{ (aux parois)}, \quad \frac{d\frac{u}{U}}{dN} = 0 \text{ (à la surface libre)}.$$

Dans le cas particulier d'un régime uniforme, le rapport $\frac{u}{U}$ est une certaine fonction φ de $\frac{\chi y}{\sigma}, \frac{\chi z}{\sigma}$, la même aux points homologues de toutes les sections semblables, et qui se détermine au moyen des équations (5), (6), (4), devenues, pour ce cas où $u' = 0$,

$$(7) \qquad \frac{\varepsilon}{\rho g}\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} - \frac{\chi}{\sigma}\int_\chi \frac{d\varphi}{dN}\frac{d\chi}{\chi}\right) = 0,$$

$$(7 \textit{ bis}) \quad \varphi = 0 \text{ (aux parois)}, \quad \frac{d\varphi}{dN} = 0 \text{ (à la surface libre)}, \quad \int_\sigma \varphi \frac{d\sigma}{\sigma} = 1.$$

Retranchons ces équations (7), (7 *bis*) des équations correspondantes (5), (6), (4), et écrivons, pour abréger,

$$(8) \qquad \varpi = \frac{u}{U} - \varphi;$$

nous aurons

$$(9) \qquad \frac{\varepsilon}{\rho g}\left(\frac{d^2\varpi}{dy^2} + \frac{d^2\varpi}{dz^2} - \frac{\chi}{\sigma}\int_\chi \frac{d\varpi}{dN}\frac{d\chi}{\chi}\right) = \frac{1}{gU}\left(u' - \int_\sigma u' \frac{d\sigma}{\sigma}\right),$$

$$(9 \textit{ bis}) \quad \varpi = 0 \text{ (aux parois)}, \quad \frac{d\varpi}{dN} = 0 \text{ (à la surface libre)}, \quad \int_\sigma \varpi \frac{d\sigma}{\sigma} = 0.$$

La fonction $\varpi = \frac{u}{U} - \varphi$, qui s'annulerait pour $u' = 0$, sera de l'ordre de petitesse du second membre de (9), c'est-à-dire de l'ordre de u' ou de celui des petites dérivées $\frac{du}{dt}$, $\frac{du}{dx}$; φ sera donc une première valeur approchée du rapport $\frac{u}{U}$.

4. On obtient une expression remarquable du premier terme de (3), ou du frottement extérieur total $-\varepsilon\int_\chi \frac{du}{dN}d\chi$, en ajoutant la première (7), multipliée par $-\varpi d\sigma$, à la première (9), multipliée par $\varphi d\sigma$, et intégrant dans toute l'étendue de σ. Si l'on observe que

$$\varphi\frac{d^2\varpi}{dy^2} - \varpi\frac{d^2\varphi}{dy^2} = \frac{d}{dy}\left(\varphi\frac{d\varpi}{dy} - \varpi\frac{d\varphi}{dy}\right), \quad \varphi\frac{d^2\varpi}{dz^2} - \varpi\frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{d}{dz}\left(\varphi\frac{d\varpi}{dz} - \varpi\frac{d\varphi}{dz}\right),$$

les deux premiers termes du résultat, devenus simplement

$$\frac{\varepsilon}{\rho g}\int_{\chi'}\left(\varphi\frac{d\varpi}{dN} - \varpi\frac{d\varphi}{dN}\right)d\chi',$$

s'annuleront à cause des deux premières conditions spéciales (7 *bis*), (9 *bis*); et les dernières de ces conditions spéciales permettront à leur tour de réduire l'équation obtenue à

$$-\frac{\varepsilon}{\rho g}\int_\chi \frac{d\varpi}{dN}d\chi = \frac{\sigma}{gU}\int_\sigma u'(\varphi - 1)\frac{d\sigma}{\sigma}.$$

Celle-ci, en remplaçant ϖ par $\frac{u}{U} - \varphi$ et multipliant par $\frac{U}{\sigma}$, peut s'écrire

$$-\frac{\varepsilon}{\rho g\sigma}\int_\chi \frac{du}{dN}d\chi = \left[\frac{-\varepsilon}{\rho g}\frac{\sigma}{\chi}\int_\chi \frac{d\varphi}{dN}\frac{d\chi}{\chi}\right]\left(\frac{\chi}{\sigma}\right)^2 U + \frac{1}{g}\int_\sigma u'(\varphi - 1)\frac{d\sigma}{\sigma}.$$

L'expression $-\frac{\varepsilon}{\rho g}\frac{\sigma}{\chi}\int_\chi \frac{d\varphi}{dN}\frac{d\chi}{\chi}$ est un certain coefficient, constant pour toutes les sections d'une même forme : nous le désignerons par β. Le résultat trouvé sera donc

$$(10) \qquad -\frac{\varepsilon}{\rho g\sigma}\int_\chi \frac{du}{dN}d\chi = \beta\left(\frac{\chi}{\sigma}\right)^2 U + \frac{1}{g}\int_\sigma u'(\varphi - 1)\frac{d\sigma}{\sigma}.$$

Enfin cette valeur de $-\frac{\varepsilon}{\rho g \sigma}\int_\chi \frac{du}{dN} d\chi$, portée dans l'équation (3), donnera la formule du mouvement graduellement varié

$$(11) \qquad \sin I - \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{ds} = \beta U\left(\frac{\chi}{\sigma}\right)^2 + \frac{1}{g}\int_\sigma u'\varphi\frac{d\sigma}{\sigma}.$$

Il ne reste plus qu'à évaluer le dernier terme de (10) et celui de (11). A cet effet, observons qu'on ne les altérera que de quantités négligeables si l'on y remplace, au besoin, φ par $\frac{u}{U}$, et substituons, d'ailleurs, à u' l'expression

$$\frac{dU}{dt}\frac{u}{U} + \left(U\frac{dU}{dx}\right)\frac{u^2}{U^2} + U\left(\frac{d\frac{u}{U}}{dt} + u\frac{d\frac{u}{U}}{dx} + v\frac{d\frac{u}{U}}{dy} + w\frac{d\frac{u}{U}}{dz}\right),$$

identique à $\frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz}$. Les intégrations $\int_\sigma$ se feront de la même manière que dans le cas de mouvements tourbillonnants (nº 193, p. 496 à 499 de l'*Essai sur la théorie des eaux courantes*); en appelant $1+\eta$ et α les coefficients

$$(11\ bis) \qquad 1+\eta = \int_\sigma \varphi^2\frac{d\sigma}{\sigma}, \quad \alpha = \int_\sigma \varphi^3\frac{d\sigma}{\sigma},$$

constants pour une même forme de section, il viendra

$$(12) \qquad \int_\sigma u'\frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{dU}{dt} + (1+\eta)U\frac{dU}{dx} - \eta\frac{U}{\sigma}\frac{d\sigma}{dt},$$

$$(13) \qquad \int_\sigma u'\varphi\frac{d\sigma}{\sigma} = (1+\eta)\frac{dU}{dt} + \alpha U\frac{dU}{dx} - \frac{\alpha-1-\eta}{2}\frac{U}{\sigma}\frac{d\sigma}{dt};$$

d'où il résulte

$$(13\ bis) \quad \int_\sigma u'(\varphi-1)\frac{d\sigma}{\sigma} = \eta\frac{dU}{dt} + (\alpha-1-\eta)U\frac{dU}{dx} + \frac{1+3\eta-\alpha}{2}\frac{U}{\sigma}\frac{d\sigma}{dt}.$$

On substituera respectivement les seconds membres des relations (13 *bis*) et (13), divisés par g, au dernier terme de (10) et à celui de (11).

5. Il faut, pour la graduelle variation du mouvement, que le rapport $\frac{u}{U}$ ne diffère pas notablement de φ : par suite, les dérivées de $\frac{u}{U}$ en y, z et la dérivée $\frac{d}{dN}\frac{u}{U}$ ne doivent différer de ce qu'elles sont quand le régime est uniforme que par d'assez petites fractions de leurs valeurs. Ainsi le mouvement n'est graduellement varié, on n'est régi par les lois approchées précédentes, qu'autant que le dernier terme de (10), $\frac{1}{g}\int_\sigma u'(\varphi - 1)\frac{d\sigma}{\sigma}$, est une petite fraction du précédent, $\beta U\left(\frac{\chi}{\sigma}\right)^2$. Or, dans les mouvements bien continus, le rapport $\frac{u}{U}$ ou, sensiblement, φ s'annule aux parois, en sorte qu'il varie dans de larges limites de part et d'autre de sa valeur moyenne 1 : la différence $\varphi - 1$ n'y est pas petite en comparaison de φ, et l'intégrale $\int_\sigma u'(\varphi - 1)\frac{d\sigma}{\sigma}$ s'y trouve tout à fait comparable à $\int_\sigma u'\varphi\frac{d\sigma}{\sigma}$. La graduelle variation du mouvement y exige donc que le dernier terme de l'équation (11) ne soit qu'une petite fraction du précédent, ou que l'équation du régime uniforme

$$\sin I - \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{ds} = \beta\left(\frac{\chi}{\sigma}\right)^2 U \tag{14}$$

se trouve sensiblement vérifiée. Ainsi, dans les mouvements bien continus, tout régime graduellement varié est un régime *quasi-uniforme*, comme je l'ai dit au commencement de ce Mémoire complémentaire, et l'on peut, dans la pratique, lui appliquer approximativement la formule même du régime uniforme. Il en serait autrement si la fonction φ ne s'écartait que d'une manière modérée de sa valeur moyenne 1, ainsi qu'il arrive dans les tuyaux d'un certain calibre et dans les canaux découverts.

Dans ces derniers cas, η est assez petit pour qu'on puisse négliger devant ce coefficient ses puissances d'un degré supérieur à 1, de manière à rendre linéaires par rapport à η, et d'une intelligence facile, un grand nombre de formules ; telles sont, par exemple, celles des nos 130, 139, 182 de l'*Essai sur la théorie des eaux courantes* (p. 285, 353, et 439), qui concernent la vitesse de propagation des ondes et des remous le long d'un courant [*].

[*] J'observerai, à cette occasion, que les formules (223), (225), (226) du même

6. Quand les sections sont, ou rectangulaires très-larges, d'un rayon moyen h, ou circulaires, d'un rayon moyen $\frac{R}{2}$, la fonction φ reçoit respectivement les deux valeurs

$$(14\ bis)\qquad \varphi = \text{soit } \frac{3}{2}\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right), \text{ soit } 2\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right),$$

$h - z$, r désignant la distance des divers points de la section au fond ou au centre. Les intégrales $1 + \eta = \int_\sigma \varphi^2 \frac{d\sigma}{\sigma}$, $\alpha = \int_\sigma \varphi^3 \frac{d\sigma}{\sigma}$ ont alors pour expressions respectives

$$1 + \eta = \text{soit } \int_0^h \varphi^2 \frac{dz}{h}, \text{ soit } 2\int_0^R \varphi^2 \frac{r}{R}\frac{dr}{R};$$
$$\alpha = \text{soit } \int_0^h \varphi^3 \frac{dz}{h}, \text{ soit } 2\int_0^R \varphi^3 \frac{r}{R}\frac{dr}{R};$$

et elles se calculent aisément. On trouve

$$(15)\qquad \begin{cases} \eta = \frac{1}{5}, & \alpha - 1 = \frac{19}{35} \text{ (section rectangle)}; \\ \eta = \frac{1}{3}, & \alpha - 1 = 1 \text{ (section circulaire)}. \end{cases}$$

Mémoire (p. 231 et 232), relatives à l'influence que des ondulations du fond exercent sur la surface, montrent que cette influence décroît à mesure que la profondeur H grandit. Les pentes superficielles se rapprochent donc de la pente moyenne du fond dans une rivière en crue; par suite, la formule (63 *quater*) [p. 82] du débit d'un fleuve doit être applicable pendant les crues, même dans des cas où elle ne l'est pas en temps d'étiage; et les considérations du n° 222 (p. 606) en sont aussi confirmées. Il y aurait un grand nombre de réflexions analogues que suggérerait l'étude des théories exposées dans cet Ouvrage sur les eaux courantes. Par exemple, la méthode qui, au bas de la page 306, donne la valeur moyenne de $\frac{du}{dt}$ permettrait d'apprécier l'approximation que comporte, au § XIX (p. 189), l'emploi de la formule (147 *bis*), en donnant un moyen d'évaluer, sur une section, la valeur moyenne de $\frac{du}{ds}$. Par exemple encore, on pourrait étudier les remous de courbure insensible auxquels les formules du n° 187 (p. 451) assignent des formes permanentes, qu'on reconnaîtrait d'ailleurs être instables, c'est-à-dire telles, que des formes vraies, un peu différentes de celles-là à l'origine, s'en éloigneraient de plus en plus. De même, d'après les résultats établis à la page 344, les lois de Gerstner s'étendraient aux houles atmosphériques, etc.

Ces valeurs de η, $\alpha - 1$ ne sont pas petites par rapport à 1, comme il était aisé de le prévoir. Le rapport $\frac{\alpha - 1}{\eta}$ vaut précisément 3 pour une section circulaire, tandis qu'il est inférieur à 3, égal à $\frac{19}{7} = 2,7,\ldots$, pour une section rectangulaire large. Ce rapport vaudrait presque 3 s'il s'agissait de tuyaux de conduite et de canaux découverts (cas où il s'écarte peu de 2,925, comme on voit au n° 45 *bis*, page 112, de l'*Essai sur la théorie des eaux courantes*); en effet, d'après (11 *bis*), η est comparable à $(\varphi - 1)^2$, et $\alpha - 1 - 3\eta$ égale la valeur moyenne de $(\varphi - 1)^3$, quantité (de l'ordre de $\eta\sqrt{\eta}$) insensible devant 3η dès que φ s'écarte peu de 1.

7. Les petites composantes transversales v, w de la vitesse, et la fonction $\varpi = \frac{u}{U} - \varphi$, se détermineraient, dans les cas où le calcul en est abordable, de la même manière que pour des mouvements non continus, c'est-à-dire par les formules démontrées au n° 194 *bis* (p. 505) du même Mémoire *Sur la théorie des eaux courantes*.

Au reste, les résultats précédents se déduiraient aussi de l'analyse du n° 193 de ce Mémoire, en supposant les deux coefficients A, B (caractéristiques, respectivement, du frottement intérieur et du frottement extérieur) proportionnels à un même monôme de la forme $\left(\frac{\sigma}{\chi}\right)^m u_0^n$, et en prenant, à la fin des calculs, $m = -1$, $n = -1$, $\frac{1}{B} = 0$. Cette généralisation n'introduirait aucun autre changement que celui qui résulterait, vers le milieu de la page 495, de ce que, dans l'expression $\frac{1}{\sigma}\int_\chi Bu(u - \varphi U)\,d\chi$, le facteur Bu serait proportionnel à u^{1+n} ou sensiblement à $(\varphi U)^{1+n}$; et, en conséquence, l'expression $Bu(u - \varphi U)$ serait elle-même proportionnelle à

$$(\varphi U)^{1+n}(u - \varphi U) = \text{sensiblement } \frac{u^{2+n} - (\varphi U)^{2+n}}{2+n}.$$

Il s'ensuivrait que le dernier terme de (450 *bis*) aurait en coefficient, non plus 2, mais $2 + n$.

8. Lorsque les mouvements sont tourbillonnants, la formule (10) est remplacée par une autre, portant au même Mémoire le n° 450 *bis*

(p. 495), et qui revient à prendre, dans le cas d'un régime graduellement varié,

$$(16)\qquad -\frac{1}{\rho g\sigma}\int_\chi \varepsilon\frac{du}{dN}d\chi = b'U^2\frac{\chi}{\sigma}+\frac{2}{g}\int_\sigma u'(\varphi-1)\frac{d\sigma}{\sigma},$$

où b' désigne un coefficient constant pour toutes les sections semblables. Par suite, l'équation du mouvement, au lieu de (11), est

$$(17)\qquad \sin I-\frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{ds}=b'U^2\frac{\chi}{\sigma}+\frac{1}{g}\int_\sigma u'(2\varphi-1)\frac{d\sigma}{\sigma}.$$

J'ai montré, au n° 2 des *Additions* à l'*Essai sur la théorie des eaux courantes* (*Savants étrangers*, t. XXIV, p. 10), qu'il existe des modes d'écoulement intermédiaires, moins continus que ceux qui se produisent dans les très-petites sections et moins tourbillonnants que ceux qui se produisent dans les grandes, pour lesquels l'expression du frottement extérieur (rapporté à l'unité de section et divisé par ρg), s'éloigne peu, quant au terme principal seul subsistant dans un régime uniforme, ou de l'une des deux formes extrêmes $b'U^2\frac{\chi}{\sigma}$, $\beta U\left(\frac{\chi}{\sigma}\right)^2$, ou de la forme moyenne $KU^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\chi}{\sigma}\right)^{\frac{3}{2}}$. Il est vraisemblable que le petit terme de cette expression qui dépend de la non-uniformité du régime aura, dans les mêmes cas, une expression peu différente respectivement, ou de celles que nous venons de trouver, $\frac{2}{g}\int_\sigma u'(\varphi-1)\frac{d\sigma}{\sigma}$, $\frac{1}{g}\int_\sigma u'(\varphi-1)\frac{d\sigma}{\sigma}$, ou de l'expression intermédiaire $\frac{3}{2}\frac{1}{g}\int_\sigma u'(\varphi-1)\frac{d\sigma}{\sigma}$. Une équation approchée du mouvement graduellement varié sera donc, dans le cas moyen,

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned}\sin I-\frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{ds}&=K\left(U\frac{\chi}{\sigma}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{g}\int_\sigma u'\frac{d\sigma}{\sigma}+\frac{3}{2g}\int_\sigma u'(\varphi-1)\frac{d\sigma}{\sigma}\\ &=K\left(U\frac{\chi}{\sigma}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2g}\int_\sigma u'(3\varphi-1)\frac{d\sigma}{\sigma};\end{aligned}\right.$$

les intégrales $\int_\sigma u'\frac{d\sigma}{\sigma}$, $\int_\sigma u'(\varphi-1)\frac{d\sigma}{\sigma}$ auraient toujours les valeurs (12), (13 *bis*).

Quand le mouvement est permanent, ou que l'on a $\frac{dU}{dt}=0$, $\frac{d\sigma}{dt}=0$, le second membre de (13) se réduit à $\alpha U \frac{dU}{dx}$, et l'équation (11) devient

$$\sin I - \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{ds} = \beta U\left(\frac{\chi}{\sigma}\right)^2 + \alpha \frac{d}{dx}\left(\frac{U^2}{2g}\right). \tag{18 bis}$$

Le terme de cette formule qui dépend de la non-uniformité, $\alpha \frac{d}{dx}\left(\frac{U^2}{2g}\right)$, est précisément celui que contient l'équation de mouvement permanent donnée par Coriolis, équation généralement inexacte, pour deux raisons exposées au n° 46 (p. 112) de l'*Essai sur la théorie des eaux courantes*. Les deux erreurs, de sens contraires, qui affectent l'équation de Coriolis, et qui ne se neutralisent qu'en partie dans le cas usuel où les mouvements sont tourbillonnants, se détruisent donc exactement quand les mouvements sont bien continus [*].

§ II. — *Influence du frottement extérieur sur les coefficients d'extinction des ondes, périodiques ou non périodiques, quand les mouvements sont bien continus.*

9. J'ai montré, au n° 15 de l'*Essai sur la théorie des eaux courantes* (p. 54), et au n° 3 des *Additions* à ce Mémoire (p. 12), que des

[*] J'observerai, à ce propos, que la théorie du régime uniforme, spécifiée pour des mouvements bien continus se faisant avec des vitesses nulles ou insensibles contre les parois, doit s'appliquer même à l'écoulement du mercure dans un tube capillaire en verre sous l'influence d'assez fortes pressions. En effet, le frottement d'une paroi non mouillée croît probablement avec la pression, comme je l'ai dit vers le milieu de la page 2 de l'*Essai sur la théorie des eaux courantes*, et il doit faire presque annuler la vitesse de la couche qui le supporte, dès que la pression est un peu grande. Si celle-ci reçoit des valeurs seulement suffisantes pour rendre la vitesse à la paroi peu sensible, la formule (14), qui exprime les lois de Poiseuille, pourra représenter encore assez bien chaque série d'expériences, pourvu qu'on y mette pour β une certaine valeur moyenne propre à la série. Ce sont sans doute des écoulements de cette nature que M. Villari a étudiés. (Voir, dans les *Comptes rendus* de la séance du 3 janvier 1877 de l'Académie des Sciences, t. LXXXIV, p. 33, la Note intéressante, malheureusement très-succincte, de M. Villari, sur l'écoulement du mercure dans les tubes capillaires en verre.)

intumescences d'une longueur totale assez peu grande et des ondes périodiques d'une durée d'oscillation modérée, produites ou propagées au sein d'une eau d'abord en repos, se comportent à fort peu près, durant des intervalles de temps restreints, comme si les frottements n'existaient pas. Ceux-ci, tout en usant à la longue le mouvement, n'en altèrent pas sensiblement les lois. Toutefois, la démonstration ne concerne que les parties intérieures du fluide; elle fait abstraction d'une couche mince contiguë à la surface libre et aux parois, où les modes de variation, d'un point (x, y, z) aux points voisins, des composantes u, v, w de la vitesse, sont entièrement changés par l'intervention du frottement extérieur. Je me propose ici d'étudier précisément les phénomènes que présente cette couche mince.

A la surface libre, le frottement est sensiblement nul. La nécessité où sont, par suite, les glissements mutuels des couches parallèles à la surface, de s'annuler sur la surface même, fait varier rapidement ces glissements, ainsi que les dérivées $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$, mais sans changer l'ordre de grandeur de celles-ci, à partir des points intérieurs voisins, où la pression p ne diffère d'ailleurs de la pression atmosphérique que d'une quantité insignifiante. L'épaisseur totale des couches dont il s'agit étant fort petite, les variations absolues que les composantes u, v, w y éprouvent et les pertes d'énergie qui y sont dues aux frottements intérieurs restent insensibles.

10. Mais il n'en est pas de même aux parois, dans le cas ordinaire où celles-ci sont mouillées par le fluide, et où la hauteur des ondes est assez faible pour que les mouvements restent partout bien continus. Supposons à peu près rectilignes et parallèles les trajectoires des molécules voisines d'une certaine portion de paroi, ce qui sera évidemment admissible presque toujours, et prenons, sur la paroi fixe, une parallèle à ces trajectoires pour axe des x, une perpendiculaire, dans le plan tangent à la surface, pour axe des y, une normale, dirigée vers l'intérieur, pour axe des z. La composante longitudinale u de la vitesse, nulle sur la paroi même, croîtra rapidement en valeur absolue à mesure que z grandira; et elle deviendra, à une petite distance, sensiblement égale à la vitesse u_0, dite *vitesse au fond*, qu'on aurait pour $z = 0$ s'il n'existait pas de frottements. Observons : 1° que la condition de continuité, jointe à $v=0$, et à la relation spéciale $w=0$ pour $z=0$, donne $w=-\int_0^z \frac{du}{dx}dz$, en sorte que w est une quantité insensible pour les petites valeurs de z, ainsi que ses dérivées en x et y; 2° que les expressions $\varepsilon\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right)$ et $\varepsilon\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d^2w}{dy^2}+\frac{d^2w}{dz^2}\right)$ se réduisent sensiblement à $\varepsilon\frac{d^2u}{dz^2}$ et à $\varepsilon\frac{d^2w}{dz^2}=-\varepsilon\frac{d^2u}{dx\,dz}$; 3° que l'accélération latérale w' est négligeable comme w, tandis que l'accélération longitudinale

$$u'=\frac{du}{dt}+u\frac{du}{dx}+w\frac{du}{dz}=\frac{du}{dt}+u\frac{du}{dx}-\frac{du}{dz}\int_0^z\frac{du}{dx}dz$$

n'a que son premier terme qui soit sensible quand u et sa dérivée en x sont de petites quantités, comme il arrive, en général, dans les problèmes d'ondes. Les deux équations indéfinies du mouvement qu'il y a lieu de considérer seront donc, en appelant X, Z les composantes de la pesanteur suivant les deux axes des x et des z,

$$(19)\qquad \varepsilon\frac{d^2u}{dz^2}-\frac{dp}{dx}+\rho X=\rho\frac{du}{dt},\quad -\varepsilon\frac{d^2u}{dx\,dz}-\frac{dp}{dz}+\rho Z=0.$$

Dans la première de ces équations, le terme $\varepsilon\frac{d^2u}{dz^2}$ sera généralement fini comme le terme $\frac{dp}{dx}$; donc la dérivée seconde $\frac{d^2u}{dz^2}$ se trouvera de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{\varepsilon}$, et la dérivée bien plus petite $\frac{d^2u}{dx\,dz}$, comparable à $\frac{du}{dz}$ ou à $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, aura son produit par ε insensible. La seconde équation (19), ainsi réduite à $\frac{dp}{dz}=\rho Z$, montre que la pression p varie, à partir de l'intérieur du fluide, quand on pénètre dans la couche contiguë aux parois, comme dans le cas où il n'y aurait pas de frottements (c'est-à-dire de quantités insignifiantes). Mais, dans ce cas, ε serait nul, et la première équation (19), où u_0 remplacerait u, deviendrait

$$-\frac{dp}{dx}+\rho X=\rho\frac{du_0}{dt};$$

cette nouvelle relation, retranchée de la première (19), donne donc l'équation indéfinie du problème

$$\varepsilon \frac{d^2 u}{dz^2} = \rho \frac{d(u-u_0)}{dt};$$

ou bien

(20) $$\frac{d^2}{dz^2}(u-u_0) = \frac{\rho}{\varepsilon}\frac{d}{dt}(u-u_0).$$

11. En y joignant les deux conditions spéciales

(20 *bis*) $$\begin{cases} u - u_0 = -u_0 & \text{(à la paroi, pour } z = 0\text{)}, \\ u - u_0 = 0 & \text{(à l'intérieur, pour } z = \infty\text{)}, \end{cases}$$

et observant que la vitesse u_0, dite *vitesse à la paroi,* sera donnée en fonction de t par la théorie ordinaire des ondes, on aura toutes les conditions nécessaires et suffisantes pour déterminer la perturbation *locale* $u - u_0$, dans les deux classes de phénomènes auxquelles cette théorie s'applique, c'est-à-dire lorsqu'il s'agit, ou de petites oscillations dans lesquelles la valeur de $u - u_0$ n'augmente pas indéfiniment avec le temps, ou de mouvements ayant commencé depuis un temps modéré, en sorte qu'on ait $u - u_0 = 0$ pour $t = -\infty$.

En effet, si l'on remplace $u - u_0$ par $u - u_0 + u_1$ dans ces équations, leurs transformées en u_1 seront

(20 *ter*) $$-\frac{d^2 u_1}{dz^2} + \frac{\rho}{\varepsilon}\frac{du_1}{dt} = 0, \quad u_1 = 0 \text{ (pour } z = 0 \text{ et pour } z = \infty\text{)}.$$

Multiplions la première (20 *ter*) par $u_1\,dz$, et intégrons de $z = 0$ à $z = \infty$, en appliquant au premier terme le procédé de l'intégration par parties, sans oublier les conditions $u_1 = 0$ aux deux limites. Il viendra

$$\int_0^\infty \frac{du_1^2}{dz^2}\,dz + \frac{\rho}{2\varepsilon}\frac{d}{dt}\int_0^\infty u_1^2\,dz = 0.$$

Celle-ci, multipliée par dt, puis intégrée, soit à partir d'une époque où le mouvement n'existait pas et où l'on avait $u_1 = 0$, soit entre deux époques distantes d'une période $2T$, si le mouvement est exactement périodique, ou séparées par un très-grand intervalle $2T$ s'il s'agit d'oscillations complexes, et divisée enfin, dans ces derniers cas, par l'intervalle même $2T$, donne, ou bien

$$\int_{-\infty}^{t} dt \int_0^\infty \frac{du_1^2}{dz^2}\,dz + \frac{\rho}{2\varepsilon}\int_0^\infty u_1^2\,dz = 0,$$

ou bien

$$\int_t^{t+2T} \frac{dt}{2T}\int_0^\infty \frac{du_1^2}{dz^2}\,dz = 0.$$

Ces équations ont leurs premiers membres composés d'éléments essentiellement positifs; on ne peut donc y satisfaire qu'en posant $\frac{du_1}{dz} = 0$, et même $u_1 = 0$, puisque u_1 s'annule pour $z = 0$ et pour $z = \infty$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

12. Les pertes d'énergie produites par les frottements intérieurs de la couche contiguë aux parois vaudront sensiblement, par unité de surface et dans l'unité de temps, d'après l'expression (m') du n° 6 des *Additions* à la théorie des eaux courantes (p. 28),

$$\varepsilon \int_0^\infty \frac{du^2}{dz^2}\,dz. \tag{21}$$

Or, si l'on multiplie l'équation (20) par $(u - u_0)\,dz$, puis qu'on intègre les résultats de $z = 0$ à $z = \infty$, en appliquant l'intégration par parties au premier terme, désignant par $\left(\frac{du}{dz}\right)_0$ la valeur de $\frac{du}{dz}$ pour $z = 0$ et tenant compte des conditions (20 *bis*), il vient

$$u_0\left(\frac{du}{dz}\right)_0 - \int_0^\infty \frac{du^2}{dz^2}\,dz = \frac{d}{dt}\int_0^\infty \frac{\rho(u - u_0)^2}{2\varepsilon}\,dz.$$

Tirons de celle-ci la valeur de $\int_0^\infty \frac{du^2}{dz^2}\,dz$ pour la substituer dans (21): nous aurons, comme expression du travail absorbé, dans l'unité de temps, par les frottements de la couche contiguë à l'unité d'aire de paroi,

$$\varepsilon\left(\frac{du}{dz}\right)_0 u_0 - \frac{d}{dt}\int_0^\infty \frac{\rho}{2}(u-u_0)^2\,dz. \tag{21 bis}$$

Multiplions (21 *bis*) par dt, et intégrons, soit de $t=-\infty$ à $t=\infty$, quand il s'agit d'une intumescence limitée propagée le long d'un canal, ou que $u-u_0$ s'annule aux deux époques $t=\mp\infty$, soit, dans le cas contraire d'un mouvement oscillatoire, entre deux époques séparées par l'intervalle 2T, égal à une période, ou très-grand suivant qu'il y a ou qu'il n'y a pas périodicité. Le travail total absorbé égalera dans tous ces cas, sauf erreur relative infiniment petite, celui qu'on aurait eu en réduisant l'expression (21 *bis*) à son premier terme.

Ainsi, *le frottement de la paroi* $\varepsilon\left(\frac{du}{dz}\right)_0$ *par unité d'aire ne travaille pas, puisque la vitesse à la paroi est nulle; mais il développe des frottements intérieurs, qui détruisent un certain travail total, précisément égal à celui qu'il aurait détruit lui-même si la vitesse à la paroi avait été celle,* u_0, *qui s'observe aux points intérieurs, peu distants, où cette vitesse cesse de varier rapidement.*

Dans le cas d'une intumescence limitée propagée le long d'un canal, l'expression de u_0 est de la forme $F\left(t-\frac{x}{\omega}\right)$, ω désignant la vitesse de propagation; par suite, les fonctions u, $\int_0^\infty \frac{\rho}{2}(u-u_0)^2\,dz$ dépendent aussi de $t-\frac{x}{\omega}$, et leurs dérivées par rapport à t égalent leurs dérivées par rapport à x multipliées par $-\omega$. L'expression (21 *bis*) peut alors s'écrire

$$\varepsilon\left(\frac{du}{dz}\right)_0 u_0 + \frac{1}{\omega}\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{\rho}{2}(u-u_0)^2\,dz. \tag{21 ter}$$

Le travail total détruit sous l'influence du frottement extérieur d'un bout de l'intumescence à l'autre, par unité de largeur des parois et dans l'unité de temps, sera le produit de cette expression par dx, intégré de $x=-\infty$ à $x=\infty$. Le terme exactement intégrable s'annulant aux deux limites, ce travail se réduit à

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon\left(\frac{du}{dz}\right)_0 u_0\,dx\,; \tag{22}$$

il *égale celui qu'aurait détruit directement le frottement extérieur, si la vitesse à la paroi avait eu les valeurs u_0 qu'elle reçoit un peu à l'intérieur.*

Le même travail, évalué dans l'hypothèse simple que le frottement extérieur fût le produit d'un coefficient constant ε_1 par la vitesse u_0, vaudrait $\varepsilon_1 \int_{-\infty}^{\infty} u_0^2\,dx$. En égalant cette expression à (22), on voit qu'elle n'est exacte que si ε_1 reçoit la valeur

$$\varepsilon_1 = \varepsilon \frac{\int_{-\infty}^{\infty} u_0 \left(\frac{du}{dz}\right)_0 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} u_0^2\,dx}.$$

Cette valeur revient évidemment à

$$\varepsilon_1 = \varepsilon \frac{\int_{-\infty}^{\infty} u_0 \left(\frac{du}{dz}\right)_0 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} u_0^2\,dt}. \tag{22 bis}$$

Une valeur de ε_1, calculée au moyen de la formule (22 *bis*), permettra de même, d'après ce qui précède, de représenter par $\varepsilon_1 u_0$ le frottement à la paroi dans le cas d'ondes périodiques, sans qu'il en résulte d'erreur sur le travail *total* détruit par l'influence du frottement qu'exerce l'unité d'aire d'une partie considérée de paroi. Alors on pourra remplacer les deux limites $\mp\infty$ des intégrations, limites qui sont les mêmes dans les deux intégrales dont (22 *bis*) contient le rapport, par deux autres, distantes d'une période complète $2T$.

13. On satisfait à l'équation linéaire (20) et à la deuxième condition (20 *bis*), en prenant pour $u - u_0$ une somme d'intégrales simples de la forme

$$u - u_0 = -ce^{-z\sqrt{\frac{\rho\pi}{2\varepsilon T}}} \cos\left(\frac{\pi t}{T} - c' - z\sqrt{\frac{\rho\pi}{2\varepsilon T}}\right), \tag{23}$$

où T est une constante positive, d'ailleurs arbitraire, et c, c' des fonctions arbitraires de x, y. La quantité $-(u - u_0)$ se réduit alors, pour

$z = 0$, à la somme des expressions $c\cos\left(\frac{\pi t}{T} - c'\right)$: la première condition (20 *bis*) sera donc également satisfaite, et la valeur totale de $u - u_0$ obtenue conviendra, pourvu qu'on ait

$$u_0 = \sum c\cos\left(\frac{\pi t}{T} - c'\right), \tag{24}$$

c'est-à-dire pourvu que le mouvement, purement oscillatoire, résulte de la superposition de simples mouvements pendulaires. L'expression de $u - u_0$, différentiée par rapport à z, donnera d'ailleurs, pour $z = 0$,

$$\left(\frac{du}{dz}\right)_0 = \sum c\sqrt{\frac{\rho\pi}{2\varepsilon T}}\left[\cos\left(\frac{\pi t}{T} - c'\right) - \sin\left(\frac{\pi t}{T} - c'\right)\right]. \tag{25}$$

Le produit des deux seconds membres de (24) et (25) se réduit, lorsqu'on prend sa moyenne pour les divers instants successifs, aux termes de son développement dont les deux facteurs contiennent le cosinus d'une même fonction linéaire de t; car on sait que des produits de l'une quelconque des deux formes

$$\left[\cos\left(\frac{\pi t}{T} - c'\right) - \sin\left(\frac{\pi t}{T} - c'\right)\right]\cos\left(\frac{\pi t}{T_1} - c''\right),$$
$$\sin\left(\frac{\pi t}{T} - c'\right)\cos\left(\frac{\pi t}{T} - c'\right)$$

se décomposent en demi-sommes et en demi-différences de cosinus d'arcs fonctions linéaires de t, cosinus dont la valeur moyenne est nulle. On aura donc en moyenne, si l'on observe que $\cos^2\left(\frac{\pi t}{T} - c'\right)$ a pour valeur moyenne $\frac{1}{2}$,

$$\varepsilon\left(\frac{du}{dz}\right)_0 u_0 = \sum\sqrt{\frac{\rho\pi\varepsilon}{2T}}\,c^2\cos^2\left(\frac{\pi t}{T} - c'\right) = \sum\sqrt{\frac{\rho\pi\varepsilon}{2T}}\,\frac{c^2}{2}. \tag{26}$$

Le travail détruit par l'influence du frottement extérieur, dans un mouvement oscillatoire complexe, est donc la somme des travaux que cette influence détruirait séparément dans chacun des mouvements simples qui composent l'agitation considérée. C'est, d'ailleurs, ce qu'on aurait pu déduire du théorème général démontré au n° 6 (p. 32) des *Additions* à l'*Essai sur la théorie des eaux courantes.*

Le théorème subsisterait même si l'on décomposait chaque mouvement pendulaire en deux *distincts,* dont les phases différeraient de $\frac{\pi}{2}$, comme, par exemple, si l'on remplaçait $c\cos\left(\frac{\pi t}{T} - c'\right)$ par $c\cos c'\cos\frac{\pi t}{T} + c\sin c'\sin\frac{\pi t}{T}$; car rien n'empêcherait de substituer, dans le troisième membre de (26), au carré de la demi-amplitude totale c, la somme des carrés des demi-amplitudes partielles, $c\cos c'$, $c\sin c'$, des mouvements composants : c'est précisément ce mode de décomposition qu'on emploie quand on remplace une houle par deux clapotis.

Dans le cas d'un simple mouvement pendulaire, de houle ou de clapotis, le second membre de (26) se réduit à un seul terme, qu'on peut écrire $\sqrt{\frac{\pi\rho\varepsilon}{2T}}u_0^2$. Le frottement extérieur détruit donc alors par son influence, en moyenne, un travail égal à celui qu'il détruirait directement si la vitesse contre la paroi était celle, u_0, qui s'observe à une petite distance à l'intérieur, et que le frottement dont il s'agit fût le produit de cette vitesse u_0 par le coefficient $\sqrt{\frac{\pi\rho\varepsilon}{2T}}$. L'expression $\sqrt{\frac{\pi\rho\varepsilon}{2T}}$ représente ce que j'ai appelé ε_1 dans la formule (22 *bis*) ci-dessus, et ce que j'ai considéré, au n° 6 des *Additions à la théorie des eaux courantes* [p. 37, formule (*s*)] et à la fin du n° 120 *bis* du Mémoire principal (p. 261), sous le nom de *coefficient du frottement extérieur.* Le coefficient ε_1 n'est donc pas absolument constant, comme j'avais cru, pour simplifier, pouvoir l'admettre dans la formule (*s*) citée; et il faut poser en réalité, du moins quand les ondes sont assez peu hautes pour que les mouvements restent bien continus,

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{\pi\rho\varepsilon}{2T}}, \tag{27}$$

T désignant la demi-période d'oscillation. Par suite, il n'est pas exact de dire, comme je l'ai fait à la page 38 des *Additions,* que le coefficient d'extinction α d'une houle ou d'un clapotis, produits au sein d'une eau de petite profondeur H, tend vers une limite, tout en grandissant un peu, à mesure que la longueur d'onde $2L$ et la période $2T$ augmentent. Sans doute α est représenté par la formule (s); mais ε_1 y prend la valeur (27), et l'on a sensiblement, pour T un peu grand,

$$(28) \qquad \alpha = \frac{\varepsilon_1}{2\rho H} = \frac{1}{2H}\sqrt{\frac{\pi\varepsilon}{2\rho T}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi\varepsilon\sqrt{g}}{2\rho H\sqrt{H}}}\,\frac{1}{\sqrt{L}}.$$

Les longues vagues sont donc, même dans les petites profondeurs, celles que le frottement use le moins vite; toutefois, le coefficient d'extinction α ne décroît, pour ces ondes, qu'en raison inverse de la racine carrée de leur longueur, alors qu'elle décroîtrait, dans les grandes profondeurs, en raison inverse du carré de cette longueur [*].

14. Supposons actuellement qu'il s'agisse d'une intumescence de forme déterminée, propagée le long d'un canal. Soit t' le temps, compté à partir d'une époque où le fluide n'était pas encore en mouvement à l'endroit particulier que l'on considère. La valeur de u_0 sera, près de la portion de paroi correspondante, une certaine fonction donnée $f(t')$, nulle pour les valeurs négatives de sa variable.

Le cas le plus simple serait celui où $f(t')$ s'annulerait jusqu'à une certaine époque $t' = \alpha$ et égalerait -1 pour $t' > \alpha$. Appelons φ la valeur que reçoit alors $u - u_0$, et prenons l'intégrale de l'équation (20) sous sa forme classique, bien connue,

$$(29) \qquad \varphi = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-m^2}\,F\left[z + 2m\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}(t' - \alpha)}\right]dm,$$

---

[*] En conséquence, dans les petites profondeurs comme dans les grandes, les longues ondes à mouvements pendulaires subsistent longtemps après que se sont éteintes de petites ondes produites en même temps; de sorte que, par exemple, les ondes non sinusoïdales étudiées au n° 162 *bis* (p. 390) des *Eaux courantes*, et dans une note de la page 54 des *Additions*, ne tarderaient pas à se réduire à de simples ondes sinusoïdales.

où j'ai mis t' pour t. La fonction φ se réduit, comme on sait, à $F(z)$ pour $t' = \alpha$. Les conditions $u = 0$, $u_0 = 0$ à l'époque $t' = \alpha$, obligent de poser, à cette époque, $\varphi = 0$ en tous les points du fluide, ou pour $z > 0$. Donc la fonction $F(z)$ est nulle pour les valeurs positives de sa variable. Quant à ses valeurs pour $z < 0$, il faut les supposer constantes, égales à 2, si l'on veut que $\varphi = 1$ quand $z = 0$ et que t' est $> \alpha$. Faisons, en effet, $z = 0$, $\varphi = 1$, $t' > \alpha$, et observons que la fonction F s'annule pour les valeurs positives de sa variable. La formule (29) devient

$$1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-m^2} F\left[2m\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}(t'-\alpha)}\right] dm:$$

il est naturel d'y satisfaire en prenant la fonction F constante, ou indépendante de t', comme le premier membre, pour toutes les valeurs négatives de sa variable; et l'on voit alors qu'il faut la faire égale à l'inverse de $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-m^2} dm$, c'est-à-dire égale à 2. La formule (29), où l'on peut ne faire varier m qu'entre les limites qui rendent négative l'expression $z + 2m\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}(t'-\alpha)}$, s'écrira donc

$$(30) \qquad \varphi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{-z\sqrt{\rho}}{2\sqrt{\varepsilon(t'-\alpha)}}} e^{-m^2} dm = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{z\sqrt{\rho}}{2\sqrt{\varepsilon(t'-\alpha)}}}^{\infty} e^{-m^2} dm.$$

En résumé, la fonction φ que nous venons de déterminer, ou qu'exprime la formule (30), jouit des propriétés remarquables suivantes : 1° elle satisfait à l'équation indéfinie

$$(31) \qquad \frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{\rho}{\varepsilon} \frac{d\varphi}{dt'};$$

2° elle vérifie les deux conditions définies

$$(32) \qquad \varphi = 0 \text{ (pour } \alpha = t' \text{ et } z > 0),$$

$$(33) \qquad \varphi = 1 \text{ (pour } z = 0 \text{ et } \alpha < t').$$

Il est actuellement facile de trouver l'expression de $u - u_0$ dans le cas général où $u_0 = f(t')$. Il suffit d'observer que l'on satisfait alors à la condition spéciale à la paroi,

$$u - u_0 = -f(t') \quad \text{ou} \quad u - u_0 = -\int_0^{t'} f'(\alpha)\,d\alpha \ (\text{pour } z = 0),$$

et, du même coup, à l'équation indéfinie (20), en posant,

$$(34) \qquad u - u_0 = -\int_0^{t'} f'(\alpha)\varphi\,d\alpha.$$

Effectivement, $\varphi = 1$ à la paroi, d'après (33), en sorte qu'on a bien $u - u_0 = -f(t')$ pour $z = 0$. D'autre part, en différentiant (34), soit deux fois par rapport à z, soit une fois par rapport à t', sans oublier la condition (32) qui fait annuler un terme aux limites, il vient

$$\frac{d^2(u-u_0)}{dz^2} = -\int_0^{t'} f'(\alpha)\frac{d^2\varphi}{dz^2}\,d\alpha,$$

$$\frac{d(u-u_0)}{dt'} = -[f'(\alpha)\varphi]_{\alpha=t'} - \int_0^{t'} f'(\alpha)\frac{d\varphi}{dt'}\,d\alpha = -\int_0^{t'} f'(\alpha)\frac{d\varphi}{dt'}\,d\alpha.$$

Par suite, en vertu de (31),

$$(35) \qquad \frac{d^2(u-u_0)}{dz^2} - \frac{\rho}{\varepsilon}\frac{d(u-u_0)}{dt'} = -\int_0^{t'} f'(\alpha)\left[\frac{d^2\varphi}{dz^2} - \frac{\rho}{\varepsilon}\frac{d\varphi}{dt'}\right]d\alpha = 0.$$

Enfin la valeur (34) de $u - u_0$ se réduit bien à zéro pour $t' = 0$.

On peut, dans le second membre de (34), remplacer $f'(\alpha)d\alpha$ par $df(\alpha)$ et intégrer par parties. La condition (32) et celle d'après laquelle $f(\alpha)$ s'annule pour $\alpha = 0$ feront disparaître les termes aux limites; la formule (30) donnant, en outre,

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho}{\pi\varepsilon}}\,\frac{z}{(t'-\alpha)^{\frac{3}{2}}}\,e^{-\frac{\rho z^2}{4\varepsilon(t'-\alpha)}},$$

il viendra

$$(36) \qquad u - u_0 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho}{\pi\varepsilon}}\int_0^{t'} f(\alpha)\,\frac{z}{(t'-\alpha)^{\frac{3}{2}}}\,e^{-\frac{\rho z^2}{4\varepsilon(t'-\alpha)}}\,d\alpha.$$

Pour simplifier cette formule, posons enfin

$$m=\frac{z}{2}\sqrt{\frac{\rho}{\varepsilon(t'-\alpha)}},\quad \text{ou}\quad \alpha=t'-\frac{\rho z^2}{4\varepsilon m^2},\quad d\alpha=\frac{\rho z^2 dm}{2\varepsilon m^3};$$

nous aurons l'expression définitive de $u-u_0$

$$(37)\qquad u-u_0=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{z}{2}\sqrt{\frac{\rho}{\varepsilon t'}}}^{\infty} f\left(t'-\frac{\rho z^2}{4\varepsilon m^2}\right)e^{-m^2}\,dm.$$

J'ai trouvé cette intégrale remarquable de l'équation (20), démontrée d'une autre manière, dans le *Cours de Physique mathématique* de M. Émile Mathieu (p. 217).

15. La partie antérieure d'une intumescence propagée le long d'un canal se raccorde asymptotiquement avec le liquide en repos situé à son avant; ce qui revient à dire qu'on peut supposer l'intumescence partie depuis un temps infini, ou qu'il faut poser $t'=\infty$ pour toutes les valeurs finies de la fonction $f(t')$.

Il est alors naturel de déplacer l'origine des temps, ou de prendre $t'=t'_0+t$, t'_0 désignant une constante positive infinie, t une variable dont les valeurs finies correspondent aux valeurs finies de $f(t')$. En désignant, d'ailleurs, par $f(t)$ ce que nous appelions $f(t')$, la formule (37) donnera l'expression de $u-u_0$, que nous adopterons,

$$(38)\qquad u-u_0=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} f\left(t-\frac{\rho z^2}{4\varepsilon m^2}\right)e^{-m^2}\,dm.$$

Elle se réduit bien à $-f(t)$ ou $-u_0$ pour $z=0$. En outre, on vérifie aisément qu'elle satisfait à l'équation (20), pourvu que la dérivée $f'\left(t-\frac{\rho z^2}{4\varepsilon m^2}\right)$ s'annule pour une valeur infiniment petite m_0 de m, c'est-à-dire pour une valeur infinie négative de sa variable, comme il arrive, soit dans le cas d'une intumescence propagée au sein d'une eau en repos, soit dans celui d'ondes périodiques, pour lesquelles $f(t)$ ou u_0 et $f'(t)$ s'annulent deux fois au moins par période $2T$. Effectivement, si, après avoir remplacé la limite inférieure de l'intégrale par m_0, on différentie deux fois sous le signe $\int$, par rapport à z, l'expression (38) de $u - u_0$, ce qu'on trouve revient identiquement à

$$(38\ bis)\quad \frac{d^2(u-u_0)}{dz^2} = \frac{\rho}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\int_{m_0}^{\infty} e^{-m^2}\frac{d}{dm}\left[\frac{-1}{m}f'\left(t-\frac{\rho z^2}{4\varepsilon m^2}\right)\right]dm.$$

On n'a pas eu besoin de faire varier m_0 en fonction de z, même en convenant de prendre $t - \frac{\rho z^2}{4\varepsilon m_0^2}$ constamment égal à la valeur choisie pour laquelle la fonction f' s'annule, car cela revient à supposer le rapport $\frac{m_0}{z}$ constant ou égal à $\frac{dm_0}{dz}$, en sorte que la dérivée $\frac{dm_0}{dz} = \frac{m_0}{z}$ est infiniment petite et négligeable; on aurait de plus

$$\frac{d^2 m_0}{dz^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{m_0}{z}\right) = \frac{1}{z}\left(\frac{dm_0}{dz} - \frac{m_0}{z}\right) = 0.$$

Effectuons sur le second membre de (38 *bis*) une intégration par parties et observons que les termes aux limites s'annulent; il viendra

$$\frac{d^2(u-u_0)}{dz^2} = -\frac{2\rho}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} f'\left(t-\frac{\rho z^2}{4\varepsilon m^2}\right)e^{-m^2}dm,$$

ce qui est bien le produit, par $\frac{\rho}{\varepsilon}$, de la dérivée du second membre de (38) par rapport à t.

Enfin la formule (38) donne aussi $u - u_0 = 0$ pour $z = \infty$. On le reconnaît en posant, sous le signe $\int$,

$$m = \frac{z}{\sqrt{m'}},\quad \text{d'où}\quad dm = \frac{-z\,dm'}{2m'\sqrt{m'}};$$

ce qui transforme cette formule en

$$(39)\qquad u - u_0 = -\frac{1}{z\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} f\left(t - \frac{\rho}{4\varepsilon}m'\right)\left(\frac{z^2}{m'}e^{-\frac{z^2}{m'}}\right)\frac{dm'}{\sqrt{m'}}.$$

Or, dans celle-ci, l'intégrale du second membre reste finie pour z infini; car, d'une part, le facteur $\frac{z^2}{m'}e^{-\frac{z^2}{m'}}$, maximum et égal à $\frac{1}{e}$ pour $\frac{z^2}{m'} = 1$, s'annule aux deux limites de l'intégration; d'autre part, on reconnaît que, même en faisant abstraction de ce facteur, l'intégrale reste finie quand sa limite inférieure tend vers zéro, finie aussi quand sa limite supérieure devient infinie, à cause du dénominateur croissant $\sqrt{m'}$ et du numérateur $f\left(t-\frac{\rho}{4\varepsilon}m'\right)$, qui est, ou décroissant, ou périodique et aussi souvent négatif que positif. Par suite, le quotient de cette intégrale par z s'annule bien pour z infini.

En résumé, *la formule* (38) *convient tout à la fois au cas d'une intumescence propagée dans un liquide en repos et au cas d'ondes périodiques.*

Si l'on y pose en particulier $f(t)=c\cos\left(\frac{\pi t}{T}-c'\right)$, son second membre devra devenir identique à celui de (23), d'après ce qui a été démontré au n° **11**. Il faudra donc que les coefficients de

$$c\cos\left(\frac{\pi t}{T}-c'\right),\quad c\sin\left(\frac{\pi t}{T}-c'\right)$$

soient respectivement égaux dans les deux formules. En écrivant, pour abréger, $z\sqrt{\frac{\rho\pi}{2\varepsilon T}}=\beta$, on trouve ainsi :

$$(39\,bis)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-m^2}\cos\frac{\beta^2}{2m^2}\,dm=e^{-\beta}\cos\beta,\\ &\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-m^2}\sin\frac{\beta^2}{2m^2}\,dm=e^{-\beta}\sin\beta.\end{aligned}\right.$$

La différentiation de ces intégrales, par rapport à β, conduit à d'autres intégrales intéressantes, qui, si l'on y pose, sous le signe $\int$, $\frac{\beta}{\sqrt{2}m}=m'$, $dm=-\frac{\beta\,dm'}{\sqrt{2}m'^2}$, deviennent

$$(39\,ter)\qquad \left\{\begin{aligned} &2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{\beta^2}{2m'^2}}\sin.m'^2\,dm'=e^{-\beta}(\cos\beta+\sin\beta),\\ &2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{\beta^2}{2m'^2}}\cos.m'^2\,dm'=e^{-\beta}(\cos\beta-\sin\beta).\end{aligned}\right.$$

Pour $\beta=0$, celles-ci conduisent aux résultats bien connus

$$2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sin.m'^2\,dm'=1,\quad 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos.m'^2\,dm'=1.$$

16. Évaluons le frottement, $-\varepsilon\left(\frac{du}{dz}\right)_0$, exercé, à l'époque t, par l'unité d'aire de la paroi et projeté dans le sens des x positifs. La formule (38), différentiée par rapport à z, donne

$$\frac{du}{dz}=\frac{\rho z}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\int_0^\infty f'\left(t-\frac{\rho z^2}{4\varepsilon m^2}\right)e^{-m^2}\frac{dm}{m^2}.$$

Substituons à m, sous le signe $\int$, une nouvelle variable n, telle que l'on ait

$$\frac{z}{2}\sqrt{\frac{\rho}{\varepsilon}}\frac{1}{m}=n,\quad \text{ou}\quad m=\frac{1}{n}\left(\frac{z}{2}\sqrt{\frac{\rho}{\varepsilon}}\right),\quad dm=-\frac{dn}{n^2}\frac{z}{2}\sqrt{\frac{\rho}{\varepsilon}}.$$

La dérivée $\frac{du}{dz}$ deviendra

$$\frac{du}{dz}=2\sqrt{\frac{\rho}{\pi\varepsilon}}\int_0^\infty f'(t-n^2)e^{-\frac{\rho z^2}{4\varepsilon n^2}}dn. \tag{40}$$

Cette expression, prise pour $z=0$ et multipliée par $-\varepsilon$, donne enfin le frottement extérieur cherché

$$-\varepsilon\left(\frac{du}{dz}\right)_0=-2\sqrt{\frac{\rho\varepsilon}{\pi}}\int_0^\infty f'(t-n^2)dn. \tag{41}$$

Si l'on demandait la valeur moyenne de ce frottement aux divers instants successifs, il suffirait de remplacer, dans son expression, le facteur $f'(t-n^2)$ par sa moyenne, obtenue en y faisant varier t de $-\infty$ à $+\infty$: cette valeur est nulle quand l'intégrale $\int f'(t-n^2)dt$ ou $f(t-n^2)$, prise entre deux limites assez éloignées, l'est elle-même, comme il arrive lors d'une petite agitation quelconque du liquide, et dans le cas d'une intumescence limitée propagée le long d'un canal. Dans ce dernier cas, la fonction f est de la forme $F\left(t-\frac{x}{\omega}\right)$, ω désignant la vitesse de propagation; et la valeur totale du frottement extérieur, d'un bout de l'intumescence à l'autre bout, vaut, pour l'unité de largeur du canal,

$$-\varepsilon\int_{-\infty}^\infty\left(\frac{du}{dz}\right)_0dx=-2\omega\sqrt{\frac{\rho\varepsilon}{\pi}}\int_0^\infty dn\int_{-\infty}^\infty f'\left(t-\frac{x}{\omega}-n^2\right)\frac{dx}{\omega}=0.$$

Le travail total détruit par l'influence du frottement extérieur, soit en un même point et aux divers instants successifs, s'il s'agit d'ondes périodiques, soit à un moment déterminé et d'un bout à l'autre de l'onde, s'il s'agit d'une intumescence propagée le long d'un canal, pourra s'évaluer, d'après ce qu'on a vu à la fin du n° 12, comme si la vitesse à la paroi était u_0, et que le frottement extérieur valût le produit de cette vitesse par le coefficient *fictif* de frottement extérieur ε_1 que donne la formule (22 *bis*). Comme on a $u_0 = f(t)$, la relation (41) transformera aisément la valeur (22 *bis*) de ε_1 en celle-ci :

$$(42) \qquad \varepsilon_1 = 2\sqrt{\frac{\rho\varepsilon}{\pi}}\int_0^\infty dn \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f'(t-n^2)\,dt}{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2\,dt}.$$

17. Pour toutes les ondes et intumescences *analogues*, c'est-à-dire d'une certaine espèce, comme sont toutes les ondes sinusoïdales, toutes les ondes solitaires, etc., la fonction f est de la forme

$$(43) \qquad u_0 \quad \text{ou} \quad f(t) = c\,\mathrm{F}(k't - c'),$$

k' désignant une quantité positive, constante en un même point, c et c' deux autres quantités également indépendantes de t, et F une *certaine* fonction, *caractéristique de l'espèce d'ondes*. Alors la formule (42) devient

$$\varepsilon_1 = 2\sqrt{\frac{\rho\varepsilon k'}{\pi}}\int_0^\infty dn\sqrt{k'}\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(k't-c')\mathrm{F}'(k't-c'-k'n^2)\,k'dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(k't-c')^2\,k'dt}.$$

Adoptons, sous les signes d'intégration, les nouvelles variables

$$\tau = k't - c', \quad \nu = n\sqrt{k'},$$

et posons, pour abréger,

$$(44) \qquad \gamma = 2\sqrt{\frac{\rho\varepsilon}{\pi}}\int_0^\infty d\nu \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(\tau)\mathrm{F}'(\tau-\nu^2)\,d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(\tau)^2\,d\tau};$$

cette valeur de ε_1 se trouvera réduite à

$$(45) \qquad \varepsilon_1 = \gamma\sqrt{k'}.$$

La quantité γ, constante pour toutes les intumescences analogues, est, en général, d'une évaluation fort difficile, à cause surtout de la complication que présentera l'intégration par rapport à ν. Dans le cas d'ondes sinusoïdales, on a

$$F(\tau) = \cos\tau,$$
$$F(\tau)F'(\tau - \nu^2) = \cos\tau\sin(\nu^2 - \tau) = \cos^2\tau\sin\nu^2 - \sin\tau\cos\tau\cos\nu^2:$$

la valeur moyenne du produit $\sin\tau\cos\tau$ ou $\frac{1}{2}\sin 2\tau$ étant nulle, le rapport des deux intégrales $\int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)F'(\tau-\nu^2)d\tau$, $\int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)^2 d\tau$ égale simplement $\sin\nu^2$; et la formule (44), vu l'avant-dernière équation de la page 360 ci-dessus, donne

$$\gamma = 2\sqrt{\frac{\rho\varepsilon}{\pi}}\int_0^{\infty} \sin.\nu^2 d\nu = \sqrt{\frac{\rho\varepsilon}{2}},$$

en sorte que la valeur (45) de ε_1 se confond bien avec celle, (27), qui a été trouvée plus haut, si l'on observe que k' n'est autre alors que $\frac{\pi}{T}$.

18. Quand il s'agit d'ondes solitaires, la vitesse u_0, proportionnelle à la hauteur d'intumescence en chaque endroit, est, d'après les formules (306) et (308) (p. 382) de l'*Essai sur la théorie des eaux courantes*, de la forme $cF\left(\frac{\omega}{2}\sqrt{\frac{3h'_1}{H^3}}\,t - c'\right)$, H désignant la profondeur primitive moyenne de l'eau dans le canal à l'endroit considéré, h'_1 la hauteur que le sommet de l'onde y présente au dessus de la surface libre primitive, et ω la vitesse de propagation, égale environ à $\sqrt{gH}$. On a donc $k' = \frac{\sqrt{3gh'_1}}{2H}$, et la formule (45) donne alors le coefficient ε_1 proportionnel à $\sqrt{\frac{1}{H}\sqrt{h'_1}}$. D'ailleurs, la formule (317) [p. 387] du même Mémoire montre que h'_1 est en raison inverse de H et en raison directe de la puissance $\frac{2}{3}$ de l'énergie de l'onde par unité de la largeur

46..

l du canal : soit $\frac{\mathcal{E}}{l}$ cette énergie. Le coefficient ε_1, en appelant ε' une constante, sera donc de la forme

$$\varepsilon_1 = \varepsilon' \frac{\mathcal{E}^{\frac{1}{6}}}{l^{\frac{1}{6}} \mathrm{H}^{\frac{3}{4}}}. \tag{46}$$

Cette valeur ne reste pas constante pendant que l'onde se propage, contrairement à ce que j'avais admis, pour plus de simplicité, dans la deuxième des *Additions* à la théorie des eaux courantes (p. 36); si on la substitue à ε_1 dans la formule du haut de la page suivante (p. 37) des *Additions* dont il s'agit, formule où $\frac{\sigma}{\chi}$ ne diffère pas sensiblement de H, il vient

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} + \frac{\varepsilon'}{\rho \mathrm{H}^{\frac{7}{4}} l^{\frac{1}{6}}} \mathcal{E}^{\frac{7}{6}} = 0.$$

Remplaçons, dans cette formule, l'élément de temps dt par le rapport à $\omega = \sqrt{g\mathrm{H}}$ du chemin dx que parcourt le sommet de l'onde durant l'instant dt, puis multiplions par $\mathcal{E}^{-\frac{7}{6}} \frac{dx}{\omega}$; nous aurons

$$\mathcal{E}^{-\frac{7}{6}} d\mathcal{E} + \frac{\varepsilon' \, dx}{\rho g^{\frac{1}{2}} \mathrm{H}^{\frac{9}{4}} l^{\frac{1}{6}}} = 0.$$

Observant, enfin, que H, l seront des fonctions données de l'abscisse x du sommet de l'onde, intégrons l'équation, à partir de l'époque $t = 0$ à laquelle on avait, par exemple, $x = 0$, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$. Nous obtiendrons, pour déterminer l'énergie $\mathcal{E}$ de l'onde aux divers endroits, et, par suite, sa hauteur variable h'_1, la relation

$$\frac{1}{\sqrt[6]{\mathcal{E}}} - \frac{1}{\sqrt[6]{\mathcal{E}_0}} = \frac{\varepsilon'}{6\rho\sqrt{g}} \int_0^x \frac{dx}{\mathrm{H}^{\frac{9}{4}} l^{\frac{1}{6}}}. \tag{47}$$

L'énergie $\mathcal{E}$ tend sans cesse vers zéro, comme dans le cas où l'on aurait $\varepsilon_1 =$ const.; mais, pour les grandes valeurs de x ou de t, elle décroît moins vite que dans ce cas. En effet, lorsque H, l sont supposés constants, et que, x, t devenant très-grands, le terme $\frac{1}{\sqrt[6]{\mathcal{E}_0}}$

disparaît en comparaison du précédent, $\mathcal{E}$ devient inversement proportionnel à la sixième puissance seulement de x, au lieu d'être en raison inverse de la puissance x du nombre $e^{\frac{\varepsilon_1}{\rho H \omega}}$.

19. Enfin l'analyse exposée dans les numéros précédents (9 à 17) subsisterait sans modification, si la paroi considérée, dont on veut évaluer l'influence retardatrice sur le mouvement d'un fluide qui la mouille, éprouvait de petits déplacements, d'une amplitude bien moindre que l'amplitude des mouvements mêmes du fluide. En effet, celui-ci posséderait alors, contre la paroi, une vitesse et une accélération égales à celles de la paroi même, c'est-à-dire négligeables par hypothèse en comparaison de la vitesse ou de l'accélération de la masse liquide dans le sens tangentiel des x. Les expressions w, w', u, u' n'étant ainsi accrues que de quantités insensibles, rien ne serait changé aux formules (19), ni par suite à l'équation (20) et aux suivantes.

C'est précisément ce qui arrive pour les ondes produites au sein d'une colonne liquide remplissant un tube en caoutchouc, dans le cas ordinaire où la longueur de ces ondes est beaucoup plus grande que le diamètre du tube, et où, par suite, les mouvements sont principalement longitudinaux. M. Resal a étudié le premier ce problème intéressant, dans un article du 27 mars 1876 (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXII, p. 698). Son analyse suppose, il est vrai, que les portions de tube comprises entre des sections normales consécutives n'exercent les unes sur les autres que des actions négligeables, ainsi que je l'ai remarqué à la page 59 des *Additions* au Mémoire sur la théorie des eaux courantes, où je déduis les lois de ces ondes de celles des ondes propagées le long des canaux. Mais cette hypothèse est parfaitement légitime lorsque le tube n'est pas tendu ou que sa longueur totale dépasse un peu la distance de ses deux extrémités; on voit en effet que la force élastique exercée, à un moment quelconque, sur une section normale du tube, est alors insignifiante en comparaison de celle qui est appliquée à une section diamétrale et qui résiste à la pression intérieure du liquide. Quand, en particulier, la vitesse à l'intérieur, u_0, varie pendulairement, c'est-à-dire à une expression de la forme $c \cos\left(\frac{\pi t}{T} - c'\right)$, le coefficient fictif de frottement extérieur ε_1 qu'il faut choisir est celui que donne la formule (27),

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{\pi \rho \varepsilon}{2T}}\,i$$

et le coefficient d'extinction se calcule comme pour une longue houle propagée le long d'un canal. La formule du haut de la page 37 des *Additions* montre que le frottement absorbe, par unité de temps, une fraction de l'énergie des ondes égale à $\frac{\varepsilon_1 \chi}{\rho \sigma}$, $\frac{\sigma}{\chi}$ désignant le rayon moyen du tube. L'énergie $\mathcal{E}$ sera donc proportionnelle à $e^{-\frac{\varepsilon_1 \chi}{\rho \sigma} t}$ dans le cas d'un clapotis, c'est-à-dire d'ondes oscillant sur place. S'il s'agit au contraire d'ondes courantes, les raisonnements de la page 53 des *Additions* prouvent que chaque onde, suivie dans son mouvement, perdra par unité de temps la fraction $\frac{\varepsilon_1 \chi}{\rho \sigma}$ de son énergie, ou, par unité du chemin x parcouru, la fraction $\frac{\varepsilon_1 \chi}{\rho \sigma \omega}$ de cette énergie : celle-ci, aux divers points du trajet de l'onde, sera donc proportionnelle à $e^{-\int_0^x \frac{\varepsilon_1 \chi dx}{\rho \sigma \omega}}$

§ III. — *Complément au* § XIV *de l'*Essai sur la Théorie des eaux courantes : *Des pertes de charge qui se produisent dans l'écoulement d'un liquide, quand la section vive du fluide éprouve un accroissement brusque.*

20. Quand une masse fluide s'écoule d'un mouvement permanent suivant une certaine direction, mais dans des conditions telles, que sa section normale, après avoir été sensiblement constante, grandisse rapidement d'amont en aval et devienne de nouveau constante, il y a, comme on sait, une portion plus ou moins grande de son énergie (ou de sa *charge*) qui se transforme en tourbillonnements et se trouve perdue pour l'écoulement ultérieur. M. Belanger a montré que de telles pertes de charge s'évaluent en appliquant le principe des quantités de mouvement, suivant la direction de l'écoulement, au liquide compris entre l'une, σ_0, des dernières sections fluides précédant l'épanouissement des filets, et, l'une, σ_1, des premières sections qui suivent le même épanouissement. La pression varie hydrostatiquement sur chacune de ces sections; car la deuxième, σ_1, est occupée tout entière par des filets sensiblement rectilignes et parallèles, qui la traversent, normalement, avec des vitesses dont j'appellerai U_1 la moyenne, et la première, σ_0, se compose d'une partie (*section vive*) traversée de même normalement par des filets sensiblement rectilignes et parallèles, avec des vitesses dont U_0 désignera la moyenne, et d'une autre partie où le fluide est *mort*, c'est-à-dire relativement stagnant. D'ailleurs, dans les cas où la divergence des filets liquides est précédée et résulte d'un changement des dimensions transversales du lit solide qui les contient, on suppose ce changement assez brusque pour qu'il se termine au plus tard, sur la section σ_0, du côté de l'aval, c'est-à-dire pour que la paroi soit cylindrique entre les deux sections σ_0, σ_1, ou, du moins, puisse être rendue telle sans modifier l'écoulement : cela exige qu'elle ne se trouve en contact qu'avec du fluide *mort* aux endroits où elle s'écarterait de la forme cylindrique, laquelle sera expressément supposée dans l'évaluation de l'aire de σ_0.

Dans ces conditions, et en admettant, pour simplifier, que l'axe du lit soit horizontal, la somme des actions extérieures à considérer sera l'excès de la pression P_0, supportée, *suivant l'axe du canal,* par toute la section σ_0 *et par la surface libre* (quand il y en a une), sur la pression aussi totale, P_1, qu'éprouve la section σ_1, et sur le frottement des parois (que rend sensible l'épanouissement même des filets) Quant à l'accroissement égal (par unité de temps) de la quantité de mouvement que possède la masse fluide, il est le produit de la densité ρ par la dépense $Q = U_1\sigma_1$ et par $U_1 - U_0$, si l'on attribue aux divers filets fluides les mêmes vitesses. On aurait donc $\rho Q(U_0 - U_1) = P_1 - P_0$, sans le frottement extérieur et sans l'inégalité de vitesse des filets. J'ai montré, au § XIV (n° 53) de l'*Essai sur la théorie des eaux courantes,* qu'on tient assez bien compte de tout en posant

$$\rho U_1 \sigma_1 (\alpha'_0 U_0 - \alpha'_1 U_1) = P_1 - P_0, \tag{48}$$

où α'_0, α'_1 désignent les valeurs respectives que reçoit, sur les sections

σ_0, σ_1, un coefficient α' (variable dans les divers cas de 1 à 1,15 environ), exprimant, dans toute section vive, l'excès de deux fois le cube moyen du rapport des vitesses des divers filets à la vitesse moyenne sur le carré moyen du même rapport.

Pour évaluer $P_1 - P_0$, appelons respectivement p_1 et p_0 les pressions, par unité superficielle, aux points les plus hauts de σ_1 et σ_0, pressions qui se transmettent sur toute la section correspondante *et qui s'exercent sur la surface libre contiguë* quand il y en a une : elles donnent en tout, dans $P_1 - P_0$, le produit $(p_1 - p_0)\sigma_1$, somme des trois termes $p_1\sigma_1$, $-p_0\sigma_0$, $-p_0(\sigma_1 - \sigma_0)$, provenant des pressions exercées respectivement sur la section σ_1, sur la section σ_0 et (quand σ_1 est plus grand que σ_0) sur la surface libre adjacente à σ_0. Il faut y joindre, en appelant h l'élévation du niveau du liquide entre σ_0 et σ_1, le terme $\rho g h \sigma_0$, différence des pressions hydrostatiques exercées sur la section σ_0 et sur la partie pareille de σ_1, plus la pression hydrostatique supportée par la partie supérieure, $\sigma_1 - \sigma_0$, de σ_1, savoir $\frac{\rho g h}{1+m}(\sigma_1 - \sigma_0)$, $\frac{h}{1+m}$ désignant la distance verticale, au sommet de cette partie $\sigma_1 - \sigma_0$, de son centre de gravité, en sorte que m est un nombre positif, d'autant plus grand que la *largeur à fleur d'eau l*, entre σ_0 et σ_1, croît relativement plus, et *qui vaudrait* 1, *soit pour l constant, soit pour h très-petit*. L'équation (48), résolue par rapport à h, deviendra ainsi

$$(49)\qquad h = \frac{(1+m)\sigma_1}{\sigma_1 + m\sigma_0}\left[\frac{p_0 - p_1}{\rho g} + \frac{U_1(\alpha'_0 U_0 - \alpha'_1 U_1)}{g}\right].$$

21. Remplaçons $(1+m)\sigma_1$ par $(\sigma_1 + m\sigma_0) + m(\sigma_1 - \sigma_0)$, de manière à dédoubler le second membre et à pouvoir isoler $\frac{p_0 - p_1}{\rho g} - h$, qui, *joint à* $\frac{\alpha'_0 U_0^2 - \alpha'_1 U_1^2}{2g}$, donne la perte de charge. Cette perte vaudra, en substituant à la grande parenthèse de (49) sa valeur tirée de (49),

$$(50)\qquad \text{perte de charge} = \frac{\alpha'_0(U_0 - U_1)^2 + (\alpha'_1 - \alpha'_0)U_1^2}{2g} - \frac{mh(\sigma_1 - \sigma_0)}{(1+m)\sigma_1}.$$

Sous cette forme, elle convient pour un liquide coulant le long d'un tuyau, dans le cas, laissé jusqu'ici de côté par les traités classiques, où le tuyau n'est plein qu'après l'épanouissement des filets fluides. Elle montre aussi, en y faisant, pour simplifier, $\alpha'_0 = 1$, $\alpha'_1 = 1$, que la formule de Borda donne des pertes de charge trop fortes, si ce n'est quand l'accroissement $\sigma_1 - \sigma_0$ de la section fluide totale, entre σ_0 et σ_1, est insignifiant par rapport à celui de la section vive.

Si l'on n'avait pas remplacé la grande parenthèse de (49) par sa valeur, mais qu'on eût posé $\alpha'_0 = \alpha'_1 = \alpha'$, quelques réductions auraient conduit à la relation

$$(51)\quad \left\{ \begin{aligned} \text{Perte de charge} = {} & \frac{\alpha' m (U_0 - U_1)(U_0\sigma_0 - U_1\sigma_1)}{g(\sigma_1 + m\sigma_0)} \\ & + \frac{\alpha'(U_0 - U_1)^2}{2g}\,\frac{\sigma_1 - m\sigma_0}{\sigma_1 + m\sigma_0} + \frac{m(\sigma_1 - \sigma_0)}{\sigma_1 + m\sigma_0}\,\frac{p_1 - p_0}{\rho g}. \end{aligned} \right.$$

Le second membre se réduit : 1° pour un tuyau plein de liquide (où $\sigma_0 = \sigma_1$), au produit de α' pour ce que donne la formule de Borda; 2° pour un ressaut (où $p_0 = p_1$, $U_0\sigma_0 = U_1\sigma_1$), à ce même produit, multiplié par $\frac{\sigma_1 - m\sigma_0}{\sigma_1 + m\sigma_0} = \frac{U_0 - mU_1}{U_0 + mU_1}$; 3° quand on a seulement $p_1 = p_0$, ou qu'une surface libre relie les deux sections σ_0, σ_1, aux deux premiers termes; et 4° enfin, aux deux derniers quand $U_0\sigma_0 = U_1\sigma_1$, comme lorsqu'il s'agit d'un tuyau où le liquide entre librement par la section σ_0 en ne le remplissant qu'aux approches de la section σ_1. Les termes ainsi obtenus, dans le premier cas, se réduisent à un carré, et, dans les trois autres cas, sont également tous positifs (du moins pour $m \overline{\gtrless} 1$, c'est-à-dire quand h est très-petit ou encore quand la largeur à fleur d'eau l ne croît pas à mesure que le niveau monte); cela résulte des hypothèses $U_0 > U_1$, $U_0\sigma_0 \overline{\gtrless} U_1\sigma_1$ et de la formule (49) (donnant $h > 0$, $\sigma_1 > \sigma_0$ dans un canal découvert) ou, s'il s'agit d'un tuyau, de ce fait que p_1 y dépasse p_0, vu que l'excès de vitesse s'y change partiellement en pression sur la section σ_1.

Nous bornant au cas $p_1 = p_0$, mettons, dans (51), $U_0 - U_1$ en facteur commun; puis remplaçons ce facteur et, finalement, U_0 par leurs valeurs tirées de (49) et de la relation $\mu\sigma_0 U_0 = \sigma_1 U_1$, où μ désigne le rapport, sur la section σ_0, de la partie vive à l'aire totale. Il viendra

$$(52)\quad \text{Perte de charge} = \frac{h}{2(1+m)}\left[\left(\frac{\sigma_1}{\mu\sigma_0} - 1\right)\left(1 - \frac{m\sigma_0}{\sigma_1}\right) + 2m\left(\frac{1}{\mu} - 1\right)\right].$$

Pour un simple ressaut, $\mu = 1$, et cette expression, si les sections σ_0, σ_1 sont des rectangles ayant les hauteurs h_0, h_1, prend la forme connue $\frac{h^3}{4h_0h_1}$.

Quand la largeur à fleur d'eau l est constante, ou que $m = 1$, l'élévation h du niveau entre σ_0 et σ_1 vaut le quotient $\frac{\sigma_1 - \sigma_0}{l}$, et la formule (52) devient aisément identique à celle que j'ai donnée au n° 60 de l'*Essai sur la théorie des eaux courantes* (p. 137)

$$\text{Perte de charge} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_0)\left[(\sigma_1 - \mu\sigma_0)^2 + (1-\mu)\sigma_0(\sigma_1 + \mu\sigma_0)\right]}{4\mu\sigma_0\sigma_1 l}\ [*].$$

§ IV. — *Modification à introduire dans une Note complémentaire du Mémoire sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides.*

22. La méthode indiquée dans la Note I, à la fin du Mémoire *Sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides*, et dont le but est d'établir pour ces mouvements les formules des composantes N, T des pressions, a besoin d'être complétée lorsqu'on l'applique à la recherche des termes en $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$ qui sont d'un degré supérieur au premier. La deuxième condition qui s'y trouve énoncée, celle qui se déduit de ce fait que nul mouvement d'ensemble du fluide ne développe de pression sur aucun élément plan, n'est pas complétement exprimée quand on dit qu'une simple rotation autour d'un axe quelconque doit laisser les N égaux à la pression non dynamique changée de signe, $-p$, et les T égaux à zéro. Dès que les formules que l'on veut établir ne sont pas linéaires, il faut entendre cette condition dans son sens général, c'est-à-dire en ce sens que la superposition d'un mouvement d'ensemble quelconque à tout autre mouvement laisse les composantes N, T égales à ce qu'on aurait si ce dernier mouvement était seul. En d'autres termes, et comme il est permis de faire abstraction d'une simple translation qui n'influerait

[*] J'observerai, à ce propos, qu'il se produit de petites pertes de charge quand les filets fluides, au lieu de diverger, se contractent notablement, quoique, dans ce cas, le

pas sur les dérivées en x, y, z des vitesses, les N, T doivent rester les mêmes lorsqu'on remplace respectivement dans leurs expressions les trois composantes u, v, w de la vitesse par celles-ci,

$$U = u + \omega' z - \omega'' y, \quad V = v + \omega'' x - \omega z, \quad W = w + \omega y - \omega' x,$$

résultant de leur composition avec trois vitesses angulaires de rotation ω, ω', ω'' autour des trois axes coordonnés. Or on peut supposer

---

passage d'une petite vitesse, ayant U_0 pour moyenne sur la section amont σ_0, à une vitesse finale beaucoup plus grande U_1 (commune à tous les filets), se fasse sans perte sensible de force vive pour chaque filet et que, par suite, d'après une démonstration du n° 216 (p. 588) de l'*Essai sur la Théorie des eaux courantes,* on ait alors

$$\frac{U_1^2}{2g} = \alpha_0 \frac{U_0^2}{2g} + \frac{p_0 - p_1}{\rho g} - h.$$

En effet, si l'on porte cette valeur de $\frac{U_1^2}{2g}$ dans l'expression $\alpha'_0 \frac{U_0^2}{2g} - \frac{U_1^2}{2g} + \frac{p_0 - p_1}{\rho g} - h$, laquelle, *par définition* et à cause de $\alpha'_1 = 1$, exprime la perte de charge éprouvée, il vient, pour celle-ci, $(\alpha'_0 - \alpha_0)\frac{U_0^2}{2g} =$ environ $\eta \frac{U_0^2}{g}$, η (variable de 0,02 à 0,03 environ) désignant l'excès, sur l'unité, du carré moyen du rapport des vitesses des divers filets dans la section d'amont σ_0 à leur moyenne U_0.

Il est bon de remarquer aussi que la formule (50) ci-dessus indique une certaine perte de charge, assez sensible, aussitôt après l'entrée d'un tuyau, partout plein, où l'on suppose que l'eau, sortant d'un réservoir, arrive sans contraction, grâce à un évasement convenable des parois qui conduisent à l'orifice. En effet, dans ce cas, les vitesses des divers filets sont les mêmes à cet orifice, en sorte qu'on a $\alpha'_0 = 1$; mais la valeur de α' sur la section située un peu plus en aval, σ_1, est celle qui correspond à la véritable distribution des vitesses dans le tuyau. Comme, d'ailleurs, par hypothèse, la vitesse moyenne U_0, à l'entrée, ne diffère pas alors de U_1, le second membre de la formule (50) devient

$$(\alpha' - 1)\frac{U^2}{2g},$$

où U désigne la vitesse moyenne dans le tuyau et α' la valeur de ce coefficient à l'intérieur du tuyau même. Cette perte de charge n'a rien d'invraisemblable; car on conçoit que le passage, d'un état où tous les filets fluides ont même vitesse, à un autre où ils ont des vitesses différentes, détermine une déperdition notable d'énergie, même quand la vitesse moyenne n'éprouve pas de diminution.

que ω, ω', ω'' soient pris respectivement égaux aux valeurs qu'ont les trois dérivées $-\frac{dw}{dy}$, $\frac{dw}{dx}$, $-\frac{dv}{dx}$ en un point particulier considéré. Alors les trois dérivées $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dW}{dx}$, $\frac{dW}{dy}$ y seront nulles, et les N, T ne dépendront que des six autres dérivées

$$\frac{dU}{dx},\quad \frac{dV}{dy},\quad \frac{dW}{dz},\quad \frac{dV}{dz},\quad \frac{dU}{dz},\quad \frac{dU}{dy},$$

égales respectivement à

$$\frac{du}{dx},\quad \frac{dv}{dy},\quad \frac{dw}{dz},\quad \frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy},\quad \frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz},\quad \frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}.$$

La condition dont il s'agit, lorsque u, v, w désignent les composantes, variant avec continuité, de la vitesse d'un fluide au point (x, y, z) de l'espace, revient par conséquent à dire que les N, T ne peuvent dépendre de ces composantes que par les six vitesses actuelles d'extension et de glissement, $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$, ..., $\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}$, de trois lignes matérielles parallèles aux axes et se croisant au point considéré. Ainsi entendue, elle conduit à annuler les coefficients A, C des formules que contiennent les deux dernières pages du Mémoire cité [*].

23. M. Kleitz s'est également occupé, au § 56 (p. 148) de ses *Études sur les forces moléculaires dans les liquides en mouvement* (Paris, 1873), de déterminer, dans les expressions des forces N, T pour le cas où les vitesses u, v, w sont bien continues, les termes en $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$ qui sont d'un degré supérieur au premier : il croit pouvoir leur attribuer une grande influence. Mais ces termes se trouvent avoir des coefficients si petits, en comparaison de celui, ε, qui paraît dans la

[*] Je prie aussi le lecteur de remarquer que, dans le § XII du même Mémoire, la constante c désigne simplement la dérivée $\frac{-dp}{d\alpha}$ et non, comme au § XI, le quotient de cette dérivée par le coefficient de frottement intérieur.

partie linéaire des N., T, que les expériences du Dr Poiseuille, où cependant les dérivées $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$ ont atteint d'énormes valeurs, n'ont pu seulement en faire soupçonner l'existence. Une équation donnée par M. Kleitz lui-même vers le tiers de la page 198 de son Mémoire, lorsqu'on y compare attentivement les deux premiers termes de la série qui y paraît (sans tenir même compte des observations *directes* montrant que, dans les tubes capillaires mouillés, la vitesse croît graduellement depuis la paroi où elle est nulle jusqu'à l'axe où elle est maximum), prouve que ces coefficients doivent être des fractions excessivement petites de ε pour n'avoir pas complétement altéré les lois de M. Poiseuille [*].

Les formules de M. Kleitz pourraient plutôt s'appliquer aux pressions effectives produites, *à chaque instant*, en divers points d'une eau animée de mouvements tumultueux ou peu continus, pressions qu'elles exprimeraient en fonction des dérivées premières des vitesses *vraies*, essentiellement différentes de leurs *moyennes locales* que considèrent

[*] En vue d'expliquer ces lois sans admettre la nullité (constatée pourtant) de la vitesse près d'une paroi mouillée, M. Kleitz a cru pouvoir, à la page suivante, 199, de ses *Études*, attribuer aux actions moléculaires qui produisent le frottement mutuel du fluide et de la paroi un rayon d'activité comparable au diamètre des petits tubes; il a pensé qu'il ne serait pas impossible que de telles actions produisissent, sur la masse fluide contenue dans l'unité de longueur d'un tube pareil, une résistance *totale* indépendante du contour mouillé et uniquement proportionnelle à la vitesse moyenne, comme l'exigent les expériences de Poiseuille. Mais comment accepter que le rayon d'activité des actions moléculaires, rayon que tous les faits de la Physique tendent à faire supposer absolument imperceptible, soit comparable à une longueur de 3 centimètres environ, ce qui est le diamètre de tubes polis dans lesquels Darcy a reconnu que les lois de Poiseuille s'observaient tant que la vitesse moyenne ne dépassait pas 1 décimètre? Et s'il était vrai que le rayon d'activité fût aussi grand, ce qui rendrait inabordables les problèmes les plus simples relatifs à l'écoulement dans ces tubes (puisque les pressions ne pourraient plus être rapportées à l'unité d'aire, ni même être considérées comme s'exerçant sur des surfaces), il y a toute apparence que des actions si complexes ne produiraient pas des phénomènes régis par les lois simples et précises de Poiseuille. Comment d'ailleurs s'expliquer le changement presque brusque qu'éprouve le mode d'écoulement dans les mêmes tubes au moment où la vitesse moyenne dépasse une certaine limite, si ce n'est en observant que des mouvements de

seules les hydrauliciens. Toutefois, il est encore plus probable que, dans ce cas de mouvements tumultueux ou tourbillonnants, les vitesses vraies dont il s'agit varient assez rapidement d'un point à l'autre pour que, dans le développement par la série de Taylor (s'il continue à être possible) de la vitesse relative de deux molécules agissant l'une sur l'autre, il faille tenir compte des termes de degré supérieur qui contiennent les dérivées partielles secondes, troisièmes, etc., de u, v, w par rapport à x, y, z. Alors, les forces N, T, en admettant qu'elles pussent encore être développées en séries, suivant les puissances croissantes des *grandes* variables dont elles dépendent (c'est-à-dire de telles vitesses relatives), contiendraient, non-seulement les termes, affectés des dérivées premières de u, v, w, auxquels M. Kleitz se borne, mais aussi d'autres termes, où paraîtraient les dérivées d'ordre supérieur de u, v, w et dont M. Maurice Lévy, dans un Mémoire [*] *Sur l'hydrodynamique des liquides homogènes*, a considéré ceux qui sont du premier degré [**].

---

ballottement dans les sens transversaux, mouvements inévitables croissant avec le rayon moyen qui mesure l'étendue du champ dans lequel ils peuvent se développer, rendent l'écoulement tourbillonnant ou tumultueux dès que les chocs qui en résultent contre les parois sont capables, grâce à une vitesse de translation assez grande, de produire des glissements sensibles entre couches fluides contiguës?

Enfin M. Kleitz, pour n'admettre de tels glissements finis que près des parois mouillées, dans les écoulements par des tubes, tuyaux ou canaux, attribue aux fluides en mouvement une *cohésion* d'une autre nature et d'un ordre de grandeur plus élevé que les frottements proprement dits de couches glissant l'une sur l'autre. Mais toute *cohésion* est une force qui subsiste à l'état statique, tandis qu'on n'en voit pas trace dans les liquides non visqueux et dans les gaz en repos. La *tension superficielle* des liquides réside uniquement dans une couche extrêmement mince qui les enveloppe : elle a été trouvée, pour les lames liquides les plus minces qu'on ait pu produire (c'est-à-dire d'une épaisseur comparable à $0^{mm},0001$), aussi grande que pour les plus épaisses.

[*] Voir au sujet de ce Mémoire, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. LXVIII, p. 585) un Rapport de M. de Saint-Venant en date du 8 mars 1869; et au t. LXXIV (p. 655 et 693), les nos 8 et 9 d'un Mémoire *Sur l'hydrodynamique des cours d'eau*, aussi de M. de Saint-Venant, février et mars 1872.

[**] M. Kleitz vient de publier, dans les *Annales des Ponts et Chaussées* (1877, 2e semestre, t. XIV) un Mémoire (*Sur la théorie du mouvement non permanent des liquides et sur son application à la propagation des crues des rivières*) où se trouvent con-

signés des résultats intéressants et nouveaux. Il y déduit, notamment, de l'équation de continuité

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{dQ}{ds} = 0,$$

une corrélation très-simple, entre deux faits que j'avais démontrés au § XXXVII de l'*Essai sur la théorie des eaux courantes* (p. 453 et 457) sans remarquer leur liaison intime : ces deux faits sont, d'une part, la non-simultanéité, dans toute crue, du débit maximum et de la hauteur d'eau maximum sur chaque section; d'autre part, l'aplatissement de l'onde ou la diminution de ce débit maximum, quand on passe d'une section à l'autre en allant de l'amont vers l'aval. En effet, la différentielle du débit maximum considéré est $\frac{dQ}{ds}ds + \frac{dQ}{dt}dt$, c'est-à-dire simplement $\frac{dQ}{ds}ds$ ou $-\frac{d\sigma}{dt}ds$, puisque $\frac{dQ}{dt}$ s'annule sur la section proposée au moment où le débit s'y trouve maximum. Si cette différentielle est négative, on a bien $\frac{d\sigma}{dt} > 0$, à l'endroit proposé, au moment où $\frac{dQ}{dt}$ s'y annule. Donc la section fluide σ est encore en train de grandir quand le débit est maximum. M. Kleitz a pu ainsi, du fait, reconnu par l'expérience, de l'aplatissement graduel des crues, déduire celui du retard des maxima et minima de section fluide en chaque endroit sur les maxima ou minima pareils de dépense. On pourrait de même, du fait de l'abaissement graduel du sommet d'une crue, abaissement en vertu duquel, pour $\frac{d\sigma}{ds} = 0$, on a $d\sigma = \frac{d\sigma}{dt}dt = -\frac{dQ}{ds}dt < 0$, déduire cet autre fait que le maximum du débit à un moment donné se produit à quelque distance en avant du sommet considéré : effectivement, il en résulte $\frac{dQ}{ds} > 0$ à l'endroit où $\frac{d\sigma}{ds} = 0$.

J'ai démontré, dans l'*Essai sur la théorie des eaux courantes*, qu'il y a en général aplatissement graduel, soit dans le cas d'une onde propagée le long d'un canal où les filets fluides sont animés de vitesses différentes (§ XXXVI, p. 446), soit dans celui d'une crue produite assez rapidement (§ XXXVII, p. 453); soit même, à une deuxième approximation, dans le mouvement quasi-permanent [§ XXXIX, p. 482, formule (425), d'où se déduisent, par la différentiation, une valeur de $\frac{d\sigma}{dt}$ positive quand $\frac{dQ}{dt} = 0$ et une valeur de $\frac{d\sigma}{ds}$ négative quand $\frac{dQ}{ds} = 0$].

M. Kleitz donne encore, dans le Mémoire cité, des expressions générales des vitesses de propagation de chaque valeur de Q, de chaque valeur de $\frac{dQ}{dt}$, de chaque valeur de

$\frac{dQ}{ds}$, de chaque valeur de $\frac{d\sigma}{ds}$, ... La seconde de ces vitesses de propagation, par exemple, qu'il applique au cas où $\frac{dQ}{dt} = 0$, c'est-à-dire à la propagation du maximum de débit local, s'obtient en tirant $\frac{ds}{dt}$ de l'équation $d\frac{dQ}{dt} = 0$, ou

$$\frac{d^2 Q}{ds dt} ds + \frac{d^2 Q}{dt^2} dt = 0;$$

si l'on y remplace $\frac{dQ}{ds}$ par $-\frac{d\sigma}{dt}$, cette vitesse devient le rapport des deux dérivées $\frac{d^2 Q}{dt^2}$, $\frac{d^2\sigma}{dt^2}$. Ce que M. Kleitz entend par la vitesse de propagation du maximum ne se confond donc avec aucune vitesse de propagation d'un débit Q, contrairement à ce que, faute d'indications, j'avais cru en rédigeant une Note insérée dans l'*Essai sur la Théorie des eaux courantes* (p. 474).