JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. COLLET

Note sur le contact géométrique des courbes et des surfaces

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 4 (1878), p. 315-334.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1878_3_4__315_0>

Note sur le contact géométrique des courbes et des surfaces;

PAR M. J. COLLET,

Professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble.

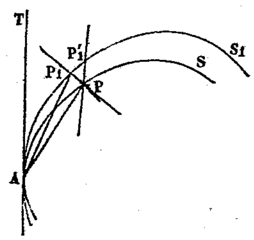
L'objet de cette Note est de donner de l'ordre du contact géométrique de deux lieux, lignes ou surfaces, qui se touchent en un point, une définition unique basée sur une propriété géométrique commune aux différents cas, et de traduire analytiquement cette définition en lui conservant sa complète généralité. Nous suivrons, dans ce but, la voie tracée par Cauchy et M. Hermite.

Supposons deux lieux géométriques, lignes ou surfaces, se touchant en un point, et imaginons qu'une droite variable rencontre constamment les deux lieux en se mouvant suivant une loi quelconque, telle cependant que *la droite ne soit pas tangente à l'un des deux lieux lorsqu'elle passe par leur point commun*. Lorsqu'elle sera infiniment voisine de ce point, elle déterminera, dans les deux lieux, deux points infiniment voisins. Nous montrerons que l'ordre infinitésimal de la distance de ces deux points est indépendant de la loi du mouvement de la droite, et qu'il est l'ordre le plus élevé que l'on puisse obtenir pour la distance de deux points des deux lieux infiniment voisins de leur point commun. *Cet ordre, diminué d'une unité, sera celui du contact géométrique des deux lieux.*

Nous aurons à considérer successivement deux courbes, deux surfaces, une courbe et une surface; et, pour chacun de ces cas, nous donnerons l'expression analytique des conditions d'un contact d'ordre quelconque.

§ I. — *Contact de deux courbes.*

Les propriétés des courbes planes se déduisant facilement de celles des courbes dans l'espace, nous ne nous occuperons que de ces dernières. Soient S et S_1 deux courbes qui se touchent en un point A, AT, leur tangente commune en ce point, et supposons qu'une droite se meuve d'une manière quelconque en s'appuyant sur les deux courbes,



de façon cependant à ne pas se confondre avec AT quand elle passe en A. Si P et P_1 sont les points infiniment voisins de A où cette droite rencontre les courbes quand elle est elle-même à une distance infiniment petite de A, *l'ordre infinitésimal de la distance* PP_1 *sera indépendant de la loi du mouvement de la droite.* En effet, si, dans une autre loi de mouvement, P'_1 est le point où la droite passant en P rencontre la courbe S_1, le triangle infinitésimal $PP_1P'_1$, dans lequel les angles P_1 et P'_1 ne sont pas nuls à la limite, donne, pour le rapport $\frac{PP'_1}{PP_1}$, une limite finie; donc PP_1 et PP'_1 sont du même ordre, si PP_1 et PP'_1 font à la limite des angles finis avec AT.

Si la droite PP'_1 tendait à se confondre avec AT, l'angle P'_1 s'annulant à la limite, PP_1 serait d'un ordre supérieur à celui de PP'_1; donc *l'ordre de* PP_1, *quand la direction limite de la droite* PP_1 *diffère de celle de* AT, *est plus élevé que pour toute droite infiniment voisine de* M, *mais ne satisfaisant pas à la condition précédente. Cet ordre, diminué d'une unité, sera l'ordre du contact des deux courbes.*

Cet ordre peut être mesuré par celui de l'angle PAP_1. En effet, les cordes AP et AP_1 sont de même ordre que la distance du point A à la droite PP_1, puisque les angles APP_1 et AP_1P ne sont pas nuls à la limite; donc, si le contact est d'ordre n, la limite du rapport $\frac{PP_1}{AP^{n+1}}$ est finie, et, par suite aussi, celle du rapport $\frac{\sin PAP_1}{AP^n \sin AP_1P}$, qui est égal au précédent. Comme $\sin AP_1P$ est fini à la limite, on voit que l'angle PAP_1, comme son sinus, est d'un ordre infinitésimal égal à l'ordre du contact des deux courbes.

Projetons maintenant ces deux courbes sur un plan. Si ce plan n'est pas perpendiculaire à la direction limite de PP_1, la projection de la distance PP_1 sera de même ordre que cette ligne, et les projections des deux courbes auront un contact de même ordre que les courbes dans l'espace, pourvu que la direction limite de la projection de PP_1 soit distincte de la projection de la tangente commune aux deux courbes. Donc l'ordre du contact des courbes en projection ne peut être inférieur à celui des courbes dans l'espace, et il ne leur est supérieur que si la projection de PP_1 est à la limite parallèle à la tangente commune aux projections, ou si le plan de projection est perpendiculaire à la direction limite de la droite PP_1.

Mais si l'on considère les projections sur trois plans qui n'ont qu'un point commun, la seconde circonstance ne peut se présenter que sur l'un des plans de projection, et, la première, que sur l'un des deux autres; donc, *sur l'un au moins des plans de projection, les courbes projetées ont un contact de même ordre que les courbes dans l'espace*, et cet ordre est *le moins élevé* de ceux que donnent les projections sur les trois plans considérés, si toutefois ces ordres ne sont pas tous égaux. D'ailleurs, tout cela s'étend sans peine à des projections obliques, la direction normale à un plan étant remplacée par la direction des projetantes relatives à ce plan.

Il est facile maintenant d'exprimer analytiquement les conditions d'un contact d'ordre n entre deux courbes qui se touchent en un point.

La droite mobile que nous avons considérée établit une correspondance entre les points des deux courbes, et, comme les positions de la droite peuvent être considérées comme ne dépendant que des valeurs attribuées à un seul paramètre t, les coordonnées des points correspondants seront des fonctions de ce paramètre. On aura donc, pour un point de la première courbe,

$$(1) \qquad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \theta(t),$$

et, pour le point correspondant de la seconde,

$$(2) \qquad x = \Phi(t), \quad y = \Psi(t), \quad z = \Theta(t).$$

Si les fonctions φ, ψ, θ sont une fois données, la forme des fonctions Φ, Ψ, Θ dépendra de la loi du mouvement de la droite de correspondance, mais de façon cependant que les différents systèmes, tels que

$$(3) \qquad F(x, y, z) = 0, \quad F_1(x, y, z) = 0,$$

obtenus en éliminant t des équations (2), soient équivalents. On aura donc entre les fonctions Φ, Ψ, Θ les relations identiques

$$(4) \qquad F[\Phi(t), \Psi(t), \Theta(t)] = 0, \quad F_1[\Phi(t), \Psi(t), \Theta(t)] = 0.$$

Si les courbes ont, pour une valeur a de t, un point commun, et, en ce point, un contract d'ordre n, les différences $x - X$, $y - Y$, $z - Z$ répondant à la valeur $a + h$ de t, seront infiniment petites d'ordre $n + 1$ par rapport à h, ce qui exige que les $3(n+1)$ conditions suivantes soient satisfaites :

$$(5) \qquad \begin{cases} \varphi\;(a) = \Phi\;(a), & \psi\;(a) = \Psi\;(a), \quad \theta\;(a) = \Theta\;(a), \\ \varphi'\;(a) = \Phi'\;(a), & \psi'\;(a) = \Psi'\;(a), \quad \theta'\;(a) = \Theta'\;(a), \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots, \\ \varphi^{(n)}(a) = \Phi^{(n)}(a), & \psi^{(n)}(a) = \Psi^{(n)}(a), \quad \theta^{(n)}(a) = \Theta^{(n)}(a), \end{cases}$$

une ou deux de ces suites pouvant d'ailleurs se prolonger au delà.

Ces conditions, *nécessaires* et *suffisantes* pour une loi de correspondance donnée, dépendent de cette loi. Pour obtenir des conditions n'en présentant pas de traces, il faut donc éliminer les fonctions Φ, Ψ, Θ et leurs dérivées entre les identités (4) et les équations (5).

Si l'on prend pour cela, jusqu'à celles de l'ordre n, les dérivées successives des identités (4), qu'on y fasse $t = a$, ainsi que dans les identités (4), et qu'on élimine alors les quantités $\Phi(a)$, $\Psi(a)$, $\Theta(a)$, $\Phi'(a)$, ..., $\Theta^{(n)}(a)$, au moyen des équations (5), on aura $2(n+1)$, égalités qui seront indépendantes des fonctions Φ, Ψ, Θ, et qui seront des *conditions nécessaires* pour un contact d'ordre n entre les deux courbes. Ces conditions peuvent s'écrire très-simplement en remarquant que leurs premiers membres sont identiques respectivement à ce que deviennent les fonctions

$$(6) \quad f(t) = \mathrm{F}[\varphi(t), \psi(t), \theta(t)], \quad f_1(t) = \mathrm{F}_1[\varphi(t), \psi(t), \theta(t)]$$

et leurs dérivées successives jusqu'à l'ordre n inclusivement quand on y fait $t = a$. Donc, les deux courbes étant données par les équations (1) et (3), si l'on forme les fonctions $f(t)$ et $f_1(t)$ d'après les formules (6), on aura, sous la forme que leur a donnée M. Hermite, pour un contact d'ordre n, répondant à la valeur a du paramètre t, les $2(n+1)$ *conditions nécessaires* suivantes :

$$(7) \qquad \begin{cases} f(a) = 0, & f'(a) = 0, & \ldots, & f^{(n)}(a) = 0, \\ f_1(a) = 0, & f_1'(a) = 0, & \ldots, & f_1^{(n)}(a) = 0. \end{cases}$$

Ces conditions sont *suffisantes*, c'est-à-dire que, formant les suites (7), l'ordre du contact est celui des dérivées de même ordre de $f(t)$ et de $f_1(t)$ qui, les dernières, s'annulent simultanément quand on y fait $t = a$. Il suffit de prouver que, pour un contact d'ordre n, on ne peut avoir

$$f^{(n+1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad f_1^{(n+1)}(a) = 0.$$

En effet, si ces égalités avaient lieu, en les supposant développées, et en en retranchant les identités obtenues en prenant les dérivées d'ordre $(n+1)$ des identités (4), après réductions au moyen des relations (5), on aurait

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \Phi}\left[\varphi_{(a)}^{(n+1)} - \Phi_{(a)}^{(n+1)}\right] + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \Psi}\left[\psi_{(a)}^{(n+1)} - \Psi_{(a)}^{(n+1)}\right] + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \Theta}\left[\theta_{(a)}^{(n+1)} - \Theta_{(a)}^{(n+1)}\right] = 0.$$

$$\frac{\partial \mathrm{F}'}{\partial \Phi}\left[\varphi_{(a)}^{(n+1)} - \Phi_{(a)}^{(n+1)}\right] + \ldots = 0.$$

Mais, comme les différences $[\varphi_{(a)}^{(n+1)} - \Phi_{(a)}^{(n+1)}], \ldots$ sont proportionnelles aux cosinus directeurs de la direction limite de la droite qui joint les deux points correspondants, on voit que les égalités précédentes ne peuvent être satisfaites qu'autant que cette droite est à la limite tangente aux courbes considérées, ce qui n'a pas lieu par hypothèse; donc les deux suites (7) ne peuvent se prolonger ensemble au delà dans le cas d'un contact d'ordre n et expriment bien les *conditions nécessaires et suffisantes* d'un contact de cet ordre.

Ces conditions expriment que les deux courbes peuvent être considérées comme ayant à leur point de contact $(n+1)$ points communs confondus.

En effet, les valeurs de t qui déterminent des points communs aux deux courbes sont les solutions communes aux deux équations $f(t)=0$, $f_1(t)=0$; et le degré de multiplicité de chaque racine commune donne le nombre de points communs confondus correspondants. Or, dans le cas d'un contact d'ordre n, pour $t=a$, les conditions (7) montrent que cette valeur a de t est une racine commune d'ordre $(n+1)$, ce qui démontre la proposition énoncée.

La démonstration des conditions (7) pouvait être faite de la manière suivante, sans faire intervenir le mode particulier de correspondance établi entre les points.

Dans les fonctions $F(X, Y, Z)$ et $F_1(X, Y, Z)$ qui sont nulles quand les variables sont remplacées par les coordonnées d'un point de la courbe S_1 introduisons, pour X, Y, Z, les coordonnées x, y, z du point correspondant de la courbe S, et développant nous aurons

$$(8)\quad \begin{cases} F(x,y,z) = \dfrac{x-X}{1}\dfrac{\partial F}{\partial X} + \dfrac{y-Y}{1}\dfrac{\partial F}{\partial Y} + \dfrac{z-Z}{1}\dfrac{\partial F}{\partial Z} + \dfrac{(x-X)^2}{1\,2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial X^2}\cdots, \\ F_1(x,y,z) = \dfrac{x-X}{1}\dfrac{\partial F_1}{\partial X} + \cdots. \end{cases}$$

En remplaçant dans les seconds membres x, y, z, X, Y, Z en fonction de t ou de $a+h$, on pourrait, en développant tous les termes, les ordonner suivant les puissances ascendantes de h, et les résultats seraient identiques à ceux que donneraient les mêmes fonctions $F(x, y, z)$, $F_1(x, y, z)$ si l'on y remplaçait préalablement x, y, z par leurs valeurs en fonction de $(a+h)$, et si l'on développait les résultats obtenus qui ne seraient autres que $f(a+h)$ et $f_1(a+h)$. Mais, si l'on suppose que les deux courbes aient un point répondant à $t=a$, un contact d'ordre n, les développements (8) ne contiendront que des termes d'ordre égal ou supérieur à $(n+1)$; donc il en devra être de même des développements de $f(a+h)$ et de $f_1(a+h)$, ce qui exige que les conditions (7) soient satisfaites. Ces conditions sont donc *nécessaires*.

Elles sont *suffisantes*, car, si l'on appelle α, β, γ les coefficients de h^{n+1} respectivement dans les développements de $(x-X)$, $(y-Y)$, $(z-Z)$, et que l'on représente par $\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_a$ $\left(\frac{\partial F_1}{\partial X}\right)_a$, ... ce que deviennent les dérivées partielles de F et de F_1 quand on y fait $t=a$, les premiers termes des développements (8) sont les suivants :

$$h^{n+1}\left[\alpha\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_a+\beta\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_a+\gamma\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_a\right],$$
$$h^{n+1}\left[\alpha\left(\frac{\partial F_1}{\partial X}\right)_a+\ldots\right],$$

et ces termes ne peuvent s'annuler tous deux, α, β, γ n'étant pas nuls tous trois, sans que la droite qui joint les points correspondants ne soit à la limite tangente à la courbe S_1, ce qui n'a pas lieu. Donc aussi les quantités $f^{(n+1)}(a)$ et $f_1^{(n+1)}(a)$ ne peuvent toutes deux s'annuler, et les conditions (7) sont bien suffisantes.

De la démonstration précédente il résulte aussi que deux courbes qui ont en un point un contact d'ordre n peuvent être considérées comme ayant en ce point $(n+1)$ points communs confondus.

Enfin nous ferons remarquer que, si l'on suppose que la variable t soit une coordonnée, z par exemple, et, en outre, que $\Theta(z)=z$, ce qui sera possible toutes les fois que la tangente commune ne sera pas parallèle au plan xOy des coordonnées, les courbes seront alors définies par les deux systèmes

$$x=\varphi(z),\quad y=\psi(z),$$
$$X=\Phi(z),\quad Y=\Psi(z),\quad Z=z;$$

et si pour $z=a$ les deux courbes ont un contact d'ordre n, on devra avoir

$$\begin{array}{ll} \varphi(a)=\Phi(\alpha), & \psi(\alpha)=\Psi(\alpha), \\ \varphi'(\alpha)=\Phi'(\alpha), & \psi'(\alpha)=\Psi'(\alpha), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi^{(n)}(a)=\Phi^{(n)}(a), & \psi^{(n)}(a)=\Psi^{(n)}(\alpha), \end{array}$$

conditions qui sont au nombre de $2(n+1)$, bien que le mode de correspondance des points soit explicité. Mais cette exception à la règle générale n'est qu'apparente, car $(n+1)$ des conditions (5) sont ici identiquement satisfaites.

II. — *Contact de deux surfaces.*

Si deux surfaces Σ, Σ_1, tangentes en A, sont rencontrées en deux points P, P_1 par une droite mobile qui n'est assujettie qu'à la condition de ne pas être tangente aux surfaces quand elle passe par leur point de contact, on prouverait, comme pour deux courbes, que, lorsque la droite est infiniment voisine du point A, la distance PP_1 est d'un ordre infinitésimal invariable, quelle que soit la loi du mouvement de la droite, et que cet ordre est plus élevé que pour toute droite dont le mouvement ne satisferait pas à la condition posée. *Cet ordre diminué d'une unité sera l'ordre de contact des deux surfaces.*

La définition précédente suppose que la droite mobile rencontre effectivement les surfaces en deux points distincts, c'est-à-dire qu'elle ne rencontre pas l'une des branches du point multiple que l'intersection des deux surfaces présente à leur point de contact.

Remarquons que les lieux décrits par P et P_1 sur les deux surfaces sont des courbes ayant en A un contact du même ordre que celui des surfaces, et qu'une surface quelconque passant en A, sans être tangente aux surfaces précédentes, les coupera suivant deux courbes dont le contact sera encore de cet ordre. Mais, si la dernière surface touchait les précédentes en A, les deux courbes obtenues ne présenteraient plus qu'un contact d'ordre inférieur à celui des deux surfaces; car il serait alors impossible de faire glisser sur ces courbes une droite qui ne serait pas tangente aux surfaces proposées quand elle passerait par leur point de contact; l'ordre du contact des courbes ainsi obtenues sera ultérieurement déterminé.

Cherchons actuellement l'expression analytique des conditions d'un contact d'ordre n entre les deux surfaces.

Les positions de la droite mobile dépendant ici des valeurs attribuées à deux paramètres u, v, les coordonnées des points correspondants qu'elle détermine sur les deux surfaces seront des fonctions de ces paramètres. On aura ainsi, pour un point de la première surface,

$$(9) \qquad x = \varphi(u, v), \quad y = \Psi(u, v), \quad z = \theta(u, v),$$

et, pour le point correspondant de la seconde,

$$(10) \qquad X = \Phi(u, v), \quad Y = \Psi(u, v), \quad Z = \Theta(u, v),$$

les fonctions Φ, Ψ, Θ, quand les fonctions φ, Ψ, θ sont données, dépendant de la loi de correspondance des points, mais cependant de façon que, par l'élimination des paramètres u, v, les équations (10) conduisent toujours à une même équation

$$(11) \qquad F(X, Y, Z) = 0,$$

qui est celle de la deuxième surface. Les fonctions Φ, Ψ, Θ, devront donc satisfaire à la relation identique

$$(12) \qquad F[\Phi(u, v), \Psi(u, v), \Theta(u, v)] = 0$$

En exprimant que, pour $u = a$, $v = b$, les deux surfaces ont un point commun, et que, pour $u = a + h$, $v = b + k$, quels que soient h et k, considérés comme du premier ordre, les différences $x - X$, $y - Y$, $z - Z$ sont d'ordre $(n + 1)$, on aura trois groupes de conditions analogues au suivant :

$$(13) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(a, b) = \Phi(a, b), \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial a} = \dfrac{\partial\Phi}{\partial a}, \quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial b} = \dfrac{\partial\Phi}{\partial b}, \\ \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial a^2} = \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial a^2}, \quad \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial a\,\partial b} = \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial a\,\partial b}, \quad \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial b^n} = \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial^2 b}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{\partial^n\varphi}{\partial a^n} = \dfrac{\partial^n\Phi}{\partial a^n}, \quad \dfrac{\partial^n\varphi}{\partial a^n} = \dfrac{\partial^n\Phi}{\partial a^{n-1}\partial b}, \quad \dots, \quad \dfrac{\partial^n\varphi}{\partial b^n} = \dfrac{\partial^n\Phi}{\partial b^n}, \end{array} \right.$$

les deux autres groupes se déduisant du précédent en substituant successivement ψ et Ψ, θ et Θ à φ et Φ. Le nombre des conditions ainsi obtenues sera $\frac{3(n+1)(n+2)}{2}$; elles dépendront du mode particulier de correspondance entre les points, et, pour obtenir des conditions qui en soient indépendantes, on procédera comme dans le cas de deux courbes. On éliminera, au moyen des égalités (13) et de leurs analogues non écrites, les quantités $\Phi(\alpha, b)$, $\Psi(a, b)$, $\Theta(\alpha, b)$, $\frac{\partial\Phi}{\partial a}, \ldots, \frac{\partial^n\Theta}{\partial b^n}$ de l'identité (12) et de celles qu'on en déduit en prenant ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre n par rapport aux variables u et v, ces dernières étant ultérieurement remplacées partout par a et b. Les premiers membres des équations obtenues seront identiques à ce que devient la fonction

$$f(u, v) = \mathrm{F}[\varphi(u, v), \Psi(u, v), \theta(u, v)], \tag{14}$$

et ses dérivées partielles successives jusqu'à l'ordre n quand on y fait $u = a$, $v = b$. On obtiendra donc les $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ *conditions nécessaires* suivantes :

$$f(a, b) = 0,$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial b} = 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 b} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\partial^n f}{\partial a^n} = 0, \quad \frac{\partial^n f}{\partial a^{n-1}\partial b} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^n f}{\partial b^n} = 0, \end{array}\right. \tag{15}$$

conditions qu'on pourrait encore établir sans faire intervenir explicitement le mode de correspondance des points.

Pour prouver que les conditions (15) sont *suffisantes*, nous ferons voir que, dans le cas d'un contact d'ordre n, les $n+1$ dérivées partielles $\frac{\partial^{n+1} f}{\partial a^{n+1}}, \frac{\partial^{n+1} f}{\partial a^n db}, \ldots$ ne peuvent être simultanément nulles.

Coupons pour cela les surfaces considérées par une nouvelle surface qui passe par leur point de contact sans leur être tangente; les courbes obtenues présenteront en ce point un contact d'ordre n. En établissant entre u et v une relation convenable par laquelle v sera une fonction de u, $v = \lambda(u)$, et v' sa dérivée, les équations (9) pourront encore définir la courbe obtenue sur la première surface. Mais, si la nouvelle surface a pour équation $F_1(X, Y, Z) = 0$, et si l'on pose

$$f_1(u, v) = F_1[\varphi(u, v), \quad \psi(u, v), \quad \theta(u, v)],$$

on sait que, si les deux courbes considérées n'ont un contact que de l'ordre n, les dérivées totales d'ordre $n+1$ des fonctions f et f_1 dans lesquelles on considère v comme une fonction de u ne peuvent s'annuler simultanément pour $n = a$, $v = \lambda(a) = b$. Mais, comme on peut d'une infinité de manières choisir la forme de la fonction F_1 de façon que sa dérivée d'ordre $n+1$ s'annule pour $u = a$, $v = b$, il en résulte que la dérivée de cet ordre de la fonction f ne peut être nulle. Comme, au contraire, les dérivées d'ordre inférieur s'annulent toutes alors, on devra avoir enfin, pour $u = a$ et $v = b$,

$$\frac{\partial^{n+1} f}{\partial a^{n+1}} + (n+1) v' \frac{\partial^{n+1} f}{\partial a^n \partial b} + \ldots + v'^{n+1} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial b^{n+1}} \gtrless 0,$$

ce qui prouve bien que, dans le cas d'un contact d'ordre n entre les deux surfaces, les dérivées partielles d'ordre $(n+1)$ de la fonction $f(u, v)$ ne peuvent toutes s'annuler pour les valeurs a et b de u et v qui répondent au point de contact, et les conditions (15) sont bien suffisantes.

Dans les applications on prendra ordinairement pour les paramètres u, v deux des coordonnées relatives à un point de l'une des surfaces, par exemple x et y, si le plan tangent commun n'est pas parallèle à oz, et les équations des deux surfaces deviendront

$$z = \varphi(x, y),$$
$$X = x, \quad Y = y, \quad Z = \Phi(x, y);$$

alors deux des trois groupes (12) de conditions seront identiquement satisfaites; et, bien que le mode de correspondance des points soit explicité, on n'aura plus ici que $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ conditions pour un contact d'ordre n.

Nous avons vu que l'ordre du contact de deux courbes pouvait se caractériser par le nombre des points confondus communs aux deux courbes. Il existe une propriété analogue pour les surfaces. *Quand deux surfaces ont en un point un contact d'ordre n, leur intersection présente en ce point un point multiple d'ordre $n+1$.*

Soient

$$(16) \qquad z - f(x, y) = 0, \quad z - F(x, y) = 0$$

les équations de deux surfaces, les coordonnées x, y d'un point de leur intersection seront données en fonction de z par le système de ces deux équations; et si l'on forme les dérivées successives de ces équations jusqu'à l'ordre p inclusivement, les $2p$ équations obtenues, jointes aux précédentes, donneront pour chacune des dérivées de x et de y, jusqu'à l'ordre p, une valeur unique et bien déterminée, en fonction de z, si les valeurs correspondantes de x et de y n'annulent pas le déterminant fonctionnel

$$(17) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

En effet, dans les calculs successifs, les dérivées d'ordre k des équations (16) font les premières apparaître les dérivées de cet ordre de x et de y, et cela dans les groupes linéaires suivants :

$$\frac{\partial f}{\partial x}x^{(k)} + \frac{\partial f}{\partial y}y^{(k)}, \quad \frac{\partial F}{\partial x}x^{(k)} + \frac{\partial F}{\partial y}y^{(k)},$$

de sorte qu'en supposant déterminées les dérivées d'ordre inférieur à k, les dérivées d'ordre k des équations (16) donneront bien pour $x^{(k)}$ et $y^{(k)}$ un système unique de solutions, pourvu que l'expression (17) ne soit pas nulle, et cela aura lieu pour toutes les dérivées successives, de $k=1$ à $k=p$.

Mais, si les surfaces se touchent en un point, pour ce point l'expression (17) est nulle, le raisonnement précédent tombe en défaut, et, si n est l'ordre du contact, les n premières équations dérivées de chacune des équations (16) seront chacune à chacune identiques pour le point considéré. Prenant les dérivées d'ordre $n+1$, elles ne différeront que par les termes renfermant les dérivées d'ordre $n+1$ des fonctions f et F, et, en les retranchant, on aura l'équation suivante :

$$(18) \; x'^{n+1}\left(\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}} - \frac{\partial^{n+1} F}{\partial x^{n+1}}\right) + (n+1)x'^{n}y'\left(\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n}\partial y} - \frac{\partial^{n+1} F}{\partial x^{n}\partial y}\right) + \ldots = 0,$$

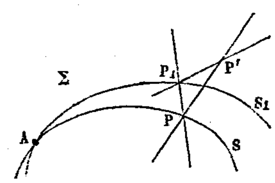
qui, jointe à l'une des suivantes qui sont équivalentes :

$$1 = \frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y', \quad 1 = \frac{\partial F}{\partial x} x' + \frac{\partial F}{\partial y} y',$$

fournira $n+1$ systèmes de valeurs de x' et de y' pour le point de contact des deux surfaces; donc leur intersection présente bien en ce point un point multiple d'ordre $n+1$.

§ III — *Contact d'une courbe et d'une surface.*

Considérons une courbe S et une surface Σ qui se touchent en un point A, et imaginons une droite mobile qui rencontre constamment la courbe et soit assujettie à la condition de ne pas être tangente à la surface quand elle passe par le point de contact de la surface et de la



courbe. Si P_1 est le point où la surface est percée par la droite quand elle passe au point P de la courbe S, infiniment voisin de A, l'ordre infinitésimal de PP_1 sera indépendant de la loi du mouvement de la droite, pourvu que la restriction posée, relativement à cette loi, soit observée.

En effet, si une autre droite passant par P rencontrait la surface Σ en P′, les deux droites PP_1 et PP′, quand P tend vers A, n'étant pas à la limite tangentes à la surface, ce qui a lieu au contraire pour la droite P_1P', les angles P_1 et P′ du triangle PP_1P' tendront vers des limites déterminées, et, par suite, l'ordre infinitésimal des deux longueurs PP_1 et PP′ est le même. Si, au contraire, la droite PP′ pouvait à la limite devenir tangente, l'angle P′ tendrait vers zéro; car, dans le cas contraire, le plan $PP'P_1$ serait à la limite un plan déterminé, tangent à la surface en A, et la droite PP_1 serait aussi à la limite tangente à la surface, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc alors PP_1 est certainement d'ordre supérieur à PP'.

Donc, en assujettissant le mouvement de la droite à la condition posée, quand la droite est infiniment voisine de A, l'ordre de PP_1, qui est constant quand on modifie la loi du mouvement, est aussi le plus élevé que l'on puisse obtenir pour la distance d'un point de S infiniment voisin de A à un point de la surface.

Cet ordre, diminué d'une unité, est l'ordre du contact de la courbe et de la surface.

Le lieu du point P_1 sur la surface est une courbe S_1 qui a, avec la courbe S, un contact du même ordre que la surface. Il en serait ainsi des diverses courbes obtenues en modifiant la loi du mouvement de la droite; et il n'y a pas sur la surface Σ de courbe ayant avec la courbe S un contact d'ordre plus élevé, mais une infinité ayant avec S un contact de cet ordre ou d'ordre inférieur.

L'ordre du contact d'une courbe et d'une surface est donc l'ordre le plus élevé possible du contact de cette courbe et d'une courbe tracée sur la surface.

Pour déterminer sur la surface une courbe qui ait avec la proposée un contact de l'ordre le plus élevé possible, on la coupera par une surface quelconque non tangente en A et passant par la courbe S. En particulier, cette nouvelle surface pourrait être la surface réglée ayant pour directrice la courbe S et pour génératrice une droite normale à la surface en un point infiniment voisin de A quand la droite est elle-même infiniment voisine de ce point.

Cherchons maintenant l'expression analytique des conditions d'un contact d'ordre n entre une courbe et une surface.

Une loi de mouvement étant choisie pour la droite, les coordonnées des points correspondants qu'elle détermine sur la courbe et sur la surface seront des fonctions d'un seul paramètre, t par exemple. On obtiendrait les conditions d'un contact d'ordre n en exprimant que les projections sur les axes de coordonnées de la distance de deux points correspondants infiniment voisins du point commun est d'ordre $n+1$. Mais il est plus simple d'exprimer qu'il y a un contact d'ordre n entre la courbe proposée et celle qu'on obtiendrait en coupant la surface par une deuxième surface passant par la courbe et ne touchant pas la première à son point de contact avec la courbe.

Soient

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \theta(t)$$

les équations de la courbe S,

$$F(X, Y, Z) = 0$$

celle de la surface Σ, et supposons que, pour $t = a$, on ait un point A commun à la courbe et à la surface.

Soit encore

$$F_1(X, Y, Z) = 0$$

l'équation d'une surface Σ_1 passant par la courbe S. Si l'on pose

$$f(t) = F[\varphi(t), \psi(t), \theta(t)], \quad f_1(t) = F_1[\varphi(t), \psi(t), \theta(t)],$$

les conditions d'un contact d'ordre n entre la courbe S et l'intersection des deux surfaces Σ, Σ_1 seront données par les deux suites (7) des $n+1$ égalités. Mais la deuxième suite ne contient que des identités, puisque la courbe Σ_1 contient la courbe S, et que, par suite, pour toute valeur de t, on doit avoir $f_1(t) = 0$; donc, pour les conditions d'un contact d'ordre n entre la courbe et la surface, on a les $n+1$ conditions

$$(19) \qquad f(a) = 0, \quad f'(a) = 0, \quad \ldots, \quad f^n(a) = 0,$$

qui sont complétement indépendantes de la loi de correspondance entre les points. Ces conditions sont *nécessaires et suffisantes*.

Elles expriment que *la courbe et la surface ont au point de contact* $(n+1)$ *points communs confondus*.

Dans les applications, on pourra supposer que les points correspondants de la courbe et de la surface sont déterminés par des parallèles à un axe de coordonnées non parallèle au plan tangent à la surface au point commun avec la courbe, soit oz par exemple. Les équations de la courbe étant alors

$$z = \varphi(x), \quad y = \psi(x),$$

et celle de la surface

$$Z = F(x, y),$$

si, pour $x = a$, la différence $z - Z$ doit être d'ordre $n+1$, en posant

$$f(x) = F[x, \varphi(x)],$$

il faudra que l'on ait

$$(20) \qquad \left\{\begin{array}{l} \varphi(a) = f(a), \\ \varphi'(a) = f'(a), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi^n(a) = f^n(a), \end{array}\right.$$

conditions qui ne sont qu'au nombre de $(n+1)$, bien que le mode de correspondance des points soit explicité.

IV. — *Quelques conséquences.*

Parmi les conséquences de la théorie qui précède, nous en indiquerons quelques-unes qui s'en déduisent immédiatement.

Si différentes courbes ont avec une autre courbe, en un point, un contact d'ordre n, elles ont entre elles, en ce point, un contact de cet ordre au moins. Si cet ordre est supérieur au premier, elles admettent, en ce point, même plan osculateur et même courbure, et, s'il est supérieur au second, leur torsion est la même.

De même, si différentes surfaces ont en un point un contact d'ordre supérieur au premier, en ce point elles admettent la même indicatrice, et par suite aussi, d'après le théorème de Meusnier, toute section plane, passant par ce point, déterminera dans les surfaces des courbes ayant même courbure. Si le point considéré est un ombilic sur l'une des surfaces, il en sera un sur toutes les autres.

Quand l'équation générale d'une famille de courbes renferme p paramètres, on peut les déterminer en totalité ou en partie, par la condition que les courbes représentées par l'équation admettent avec une courbe donnée, en l'un quelconque de ses points, un contact d'ordre n. Le problème sera possible, pour les courbes dans l'espace, si l'on a $n \leq \frac{p}{2} - 1$, et l'ordre du plus grand contact possible sera le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{p}{2} - 1$. Dans le cas où le contact est de l'ordre le plus élevé possible pour l'un quelconque des points de la courbe proposée, les courbes obtenues sont dites *osculatrices* de la première. Elles seront complétement déterminées quand p sera pair, tandis qu'il y en aura une infinité pour p impair, puisqu'un paramètre restera alors indéterminé. Ajoutons qu'en des points en nombre fini les courbes osculatrices admettront un contact d'ordre plus élevé.

Pour une courbe et une surface, l'un des deux lieux étant donné, si l'équation générale de l'autre renferme p paramètres, on pourra les déterminer par la condition qu'il y ait entre les deux lieux un contact d'ordre $p-1$. C'est ainsi qu'en chaque point d'une courbe il existe une sphère osculatrice ayant avec la courbe un contact du troisième ordre.

Des considérations analogues s'appliquent aux surfaces. Si p est le nombre des paramètres indépendants contenus dans l'équation générale d'une famille de surfaces, pour obtenir un contact d'ordre n avec une surface donnée, en l'un quelconque de ses points, il faudra que l'on ait

$$p \geq \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

le cas de l'égalité répondant aux surfaces osculatrices déterminées. Par exemple, si la surface cherchée est algébrique d'ordre m, les ordres possibles de contact, pour un point quelconque, sont définis par la condition

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} \leq \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - 1, \tag{21}$$

et, pour le cas de l'égalité, la surface osculatrice, unique alors, est complétement déterminée. Pour $m=5$, $n=9$ est une solution de l'égalité, et il n'y a pas de solution entière pour $m<5$. Donc, en tout point d'une surface, on peut déterminer une surface osculatrice déterminée du cinquième ordre, l'ordre du contact étant alors égal à 9.

Pour $m=2$, $p=9$, la plus grande valeur de n satisfaisant à la condition (21) est 2. Les surfaces osculatrices du second ordre peuvent alors être assujetties à trois conditions dictinctes de celles relatives au contact. On peut aussi chercher les points d'une surface pour lesquels il existe une surface du second ordre ayant avec la proposée un contact du troisième ordre. Puisqu'on a neuf paramètres à déterminer et dix conditions à satisfaire, on devrait trouver une courbe pour le lieu des points cherchés. Mais cela n'a pas réellement lieu, car il arrive que des dix équations de condition on peut en déduire deux qui sont complétement indépendantes des paramètres inconnus, et, par suite, il n'y a sur la surface proposée qu'un nombre limité de points pour lesquels on puisse avoir un contact du troisième ordre avec une surface du second degré. Mais, en revanche, pour chacun de ces points, on a une infinité de surfaces passant par l'intersection de deux quelconques d'entre elles, et toute surface du second degré passant par l'intersection de deux des surfaces précédentes aura un contact du troisième ordre avec la proposée.

Cette réciproque n'est qu'un cas particulier du théorème général qui suit : *Si deux surfaces* S *et* S_1 *ont en un point, avec une surface* Σ, *un contact d'ordre n, toute surface passant par l'intersection des deux premières aura avec* Σ *un contact du même ordre.*

Soient

$$z = F(x, y), \quad z = F_1(x, y) \tag{22}$$

les équations des surfaces S, S_1 qui, pour $x = a, y = b$, ont un contact d'ordre n avec la surface

$$z = \varphi(x, y), \tag{23}$$

on aura

$$\varphi(a, b) = F(a, b) = F_1(a, b),$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} = \frac{\partial F}{\partial a} = \frac{\partial F_1}{\partial a}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial b} = \frac{\partial F}{\partial b} = \frac{\partial F_1}{\partial b},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$\frac{\partial^n \varphi}{\partial a^n} = \frac{\partial^n F}{\partial a^n} = \frac{\partial^n F_1}{\partial a^n}, \quad \frac{\partial^n \varphi}{\partial a^{n-1} \partial b} = \frac{\partial^n F}{\partial a^{n-1} \partial b} = \frac{\partial^n F_1}{\partial a^{n-1} \partial b}, \quad \cdots.$$

Si alors

$$z = f(x, y) \tag{24}$$

est l'équation générale des surfaces passant par l'intersection des surfaces (22), on pourra poser

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + \lambda}[F(x, y) + \lambda F_1(x, y)],$$

λ étant un paramètre arbitraire, et comme, pour $p+q \leq n$, on aura

$$\frac{\partial^{p+q} f}{\partial a^p \partial b^q} = \frac{1}{1+\lambda}\left[\frac{\partial^{p+q} F}{\partial a^p \partial b^q} + \lambda \frac{\partial^{p+q} F_1}{\partial a^p \partial b^q}\right] = \frac{\partial^{p+q} F}{\partial a^p \partial b^q},$$

on voit que les conditions d'un contact d'ordre n entre la surface (24) et la surface (23) seront satisfaites.

Si les deux surfaces S et S_1 n'avaient pas avec la surface Σ un contact du même ordre, la surface passant par l'intersection des deux premières n'aurait avec Σ qu'un contact d'ordre égal au plus petit des deux précédents.

De ce qui précède on déduit le corollaire suivant :

Toute surface qui passe par l'intersection de deux surfaces présentant en un point un contact d'ordre n admet avec chacune des précédentes un contact au moins de cet ordre.

Pour terminer, nous démontrerons la proposition suivante, qui complétera ce qu'on a dit sur le contact de deux surfaces :

Si les deux surfaces S *et* S_1 *ont en un point un contact d'ordre m, toute surface Σ, qui a avec les précédentes au même point un contact d'ordre n inférieur à m, les coupe suivant des courbes ayant entre elles au point considéré un contact d'ordre m — n sur chacune des n+1 branches de leur point multiple commun.*

Considérons d'abord les surfaces S et Σ dont les équations sont

$$(25) \qquad f(x,y) - z = 0, \quad \varphi(x,y) - z = 0,$$

et cherchons, pour le point où elles se touchent, les valeurs des dérivées successives $x', x'', \ldots; y', y'', \ldots$ de x et de y définis en fonction de z par les équations précédentes. Pour cela, nous aurons à prendre, par rapport à z, les dérivées successives de ces équations.

Dans la dérivée d'un ordre quelconque p de l'une de ces équations, on pourra réunir en groupes successifs les termes contenant les dérivées partielles de même ordre des fonctions f ou φ; les coefficients du groupe des dérivées d'ordre q renfermeront alors les dérivées de x et de y depuis le premier ordre jusqu'à l'ordre $p-q+1$, les dérivées de cet ordre n'y entrant que linéairement.

Par suite du contact d'ordre n entre les surfaces S et Σ, les n premières équations obtenues de chacune des précédentes seront identiques chacune à chacune. Les équations suivantes, d'après ce qui précède, ne différeront que par les groupes des dérivées de f ou de φ d'un ordre supérieur à n. En retranchant l'une de l'autre les équations obtenues en prenant les dérivées de même ordre des équations (25), cet ordre étant supérieur à n, on formera des équations qui, jointes à celles de l'un des deux systèmes déduits des équations (25), permettront de calculer les dérivées successives de x et de y, pour le point considéré, et cela comme il suit.

Les équations

$$\frac{df}{dz} - 1 = 0, \quad \frac{d^{n+1} f}{dz^{n+1}} - \frac{d^{n+1} \varphi}{dz^{n+1}} = 0,$$

où le symbole d désigne une différentielle totale, donneront les $(n+1)$ systèmes de valeurs de x' et de y' qui répondent aux $(n+1)$ tangentes au point multiple que présente en leur point de contact l'intersection des deux surfaces S et Σ. Pour chacun des systèmes précédents de valeurs de x' et de y', les équations

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^{n+2} f}{dz^{n+2}} - \frac{d^{n+2} \varphi}{dz^{n+2}} = 0,$$

linéaires en x'' et y'', fourniront les valeurs correspondantes de ces dérivées secondes; et, continuant ainsi, le système

$$\frac{d^p f}{dz^p} = 0, \quad \frac{d^{n+p} f}{dz^{n+p}} - \frac{d^{n+p} \varphi}{dz^{n+p}} = 0$$

servira en général à déterminer les dérivées $x^{(p)}, y^{(p)}$.

Si l'on opère de même pour les surfaces S_1 et Σ, l'équation de la première étant

$$f_1(x, y) - z = 0,$$

à cause de l'hypothèse d'un contact d'ordre m supérieur à n entre les surfaces S et S_1, on obtiendra des systèmes respectivement identiques aux précédents, tant que les équations ne renferment pas de dérivées de f ou de f_1 d'ordre supérieur à m; donc, jusqu'à l'ordre p, défini par la condition $n + p = m$, les valeurs des dérivées successives de x et de y seront respectivement les mêmes, pour chaque système de valeurs de x' et de y'.

Donc les deux courbes d'intersection auront un contact d'ordre $m - n$ sur chacune des $n + 1$ branches de leur point multiple commun.