JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WEILL

Sur les polygones inscrits et circonscrits à la fois à deux cercles

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 4 (1878), p. 265-304.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1878_3_4__265_0>

Sur les polygones inscrits et circonscrits à la fois à deux cercles;

Par M. WEILL,

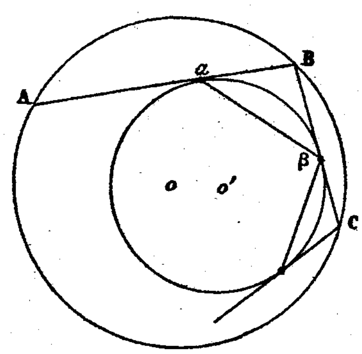
Ex-Lieutenant d'Artillerie, Professeur de Mathématiques.

PREMIÈRE PARTIE.

Problème. — *Trouver la relation entre les rayons de deux cercles et la distance de leurs centres, pour qu'un polygone puisse être inscrit à l'un et circonscrit à l'autre.*

Soit ABC (*fig.* 1) une portion de ligne polygonale inscrite et circonscrite aux cercles O et O′, $\alpha\beta\gamma\ldots$ la ligne polygonale formée par les points de contact des côtés AB, BC, ... avec le cercle O′. Les milieux

Fig. 1.



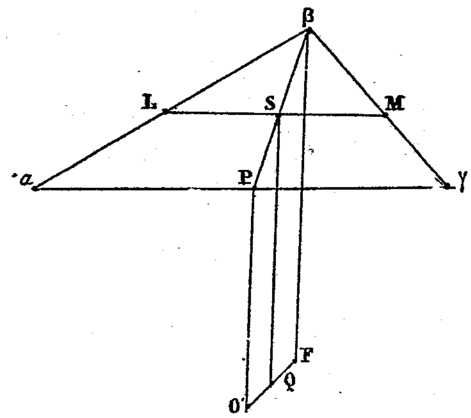
$\alpha\beta$, $\beta\gamma$, ... décrivent une circonférence. Les côtés $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, ... touchent une conique Φ, dont l'un des foyers est en O′.

Nous allons étudier quelques propriétés de la ligne $\alpha\beta\gamma\ldots$, qui vont nous amener à la solution du problème proposé.

Théorème I. — *La perpendiculaire abaissée d'un sommet β de la ligne $\alpha\beta\gamma\ldots$ sur la droite qui joint les deux sommets adjacents α, γ, passe par le deuxième foyer F de la conique Φ.*

En effet (*fig.* 2), les milieux L, M des côtés $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ décrivant un cercle, la perpendiculaire SQ au milieu de LM passe par le centre Q de ce cercle, qui est le centre de la conique Φ.

Fig. 2.



Théorème II. — *Le centre des moyennes distances de trois sommets consécutifs de la ligne $\alpha\beta\gamma\ldots$ décrit une circonférence pendant le mouvement de cette ligne.*

Lemme. — Le point D, projection du sommet β sur la droite $\alpha\gamma$ qui joint les deux sommets adjacents, décrit une circonférence pendant le mouvement de la ligne $\alpha\beta\gamma\ldots$

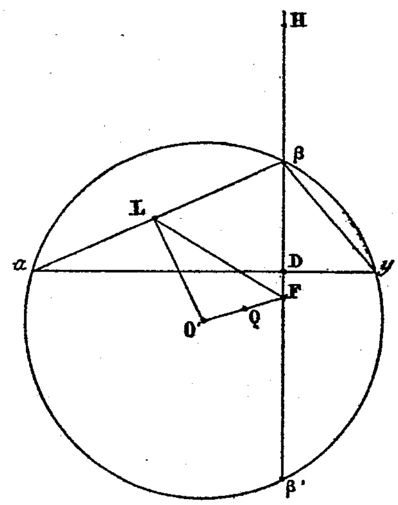
Posons $QL = \rho_2$, $O'Q = \delta_2$, $O'\alpha = \rho_1$. On a

$$\overline{FL}^2 + \overline{LO'}^2 = 2\rho_2^2 + 2\delta_2^2,$$
$$\overline{F\alpha}^2 + \overline{F\beta}^2 = 2\overline{FL}^2 + 2\overline{\alpha L}^2,$$
$$2\overline{O'L}^2 + 2\overline{\alpha L}^2 = 2\rho_1^2,$$

d'où l'on tire successivement

$$\overline{F\alpha}^2+\overline{F\beta}^2-\overline{\alpha\beta}^2=2\overline{FL}^2-2\overline{\alpha L}^2=4(\rho_2^2+\delta_2^2-\rho_1^2)$$
$$\overline{FD}^2-\overline{D\beta}^2+(FD+D\beta)^2=4(\rho_2^2+\delta_2^2-\rho_1^2)$$
$$FD.F\beta=2(\rho_2^2+\delta_2^2-\rho_1^2)=\text{const.} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Fig. 3.



Démonstration. — Prenons $\beta H = 2O'P$, H sera le point de concours des hauteurs du triangle $\alpha\beta\gamma$. Le théorème énoncé sera démontré, si nous prouvons que H décrit une circonférence. On a

$$FD.\,F\beta=2(\rho_2^2+\delta_2^2-\rho_1^2),$$
$$FH=F\beta+2O'P,$$
$$F\beta.F\beta'=\rho_1^2-4\delta_2^2=(F\beta+2O'P-2FD)F\beta;$$

d'où l'on tire

$$\frac{FD}{F\beta+2O'P-2FD}=\frac{FD}{FH-2FD}=\frac{2(\rho_2^2+\delta_2^2-\rho_1^2)}{\rho_1^2-4\delta_2^2}=\text{const.}$$
$$\frac{FD}{FH}=\text{const.} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

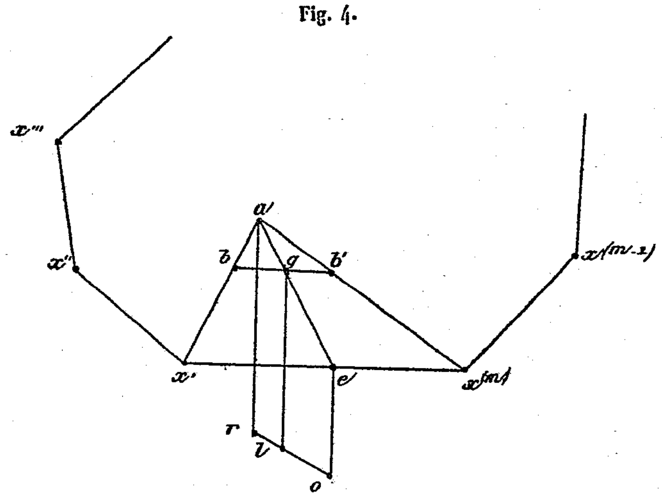
THÉORÈME III. — *Si l'on considère m sommets consécutifs*

$$(x', x'', \ldots, x^{(m)})$$

de la ligne $\alpha\beta\gamma\ldots$, *la perpendiculaire abaissée sur la droite* $x'x^{(m)}$, *du centre des moyennes distances des autres sommets, passe par un point qui reste fixe pendant le déplacement de la ligne* $\alpha\beta\gamma\ldots$.

Soit a le centre des moyennes distances des sommets $(x''x'''\ldots x^{(m-1)})$. Menons ax' $ax^{(m)}$, les points b et b' qui divisent ces droites en deux

Fig. 4.



parties proportionnelles à 1 et $(m-1)$ sont les centres des moyennes distances des points $(x'x''\ldots x^{(m-1)})$, $(x''x'''\ldots x^{(m)})$.

Joignons le point a au milieu e de $x'x^{(m)}$. Cette droite passe par le milieu g de bb'.

Supposons démontré que les points bb' décrivent une circonférence pendant le mouvement de la ligne $\alpha\beta\gamma\ldots$; la perpendiculaire gl au milieu g de bb' passera par le centre l de cette circonférence; la perpendiculaire ar à bb' rencontrera $O'l$ en un point r qui sera fixe, car le rapport $\frac{O'l}{lr} = \frac{x'b}{ba}$ est constant.

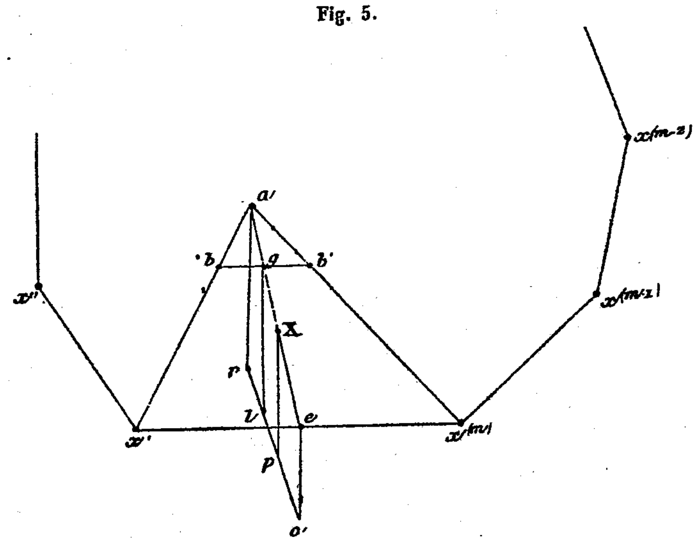
THÉORÈME IV (*théorème fondamental*). — *Le centre des moyennes* *distances de m sommets consécutifs de la ligne $\alpha\beta\gamma\ldots$ décrit une circonférence fixe pendant le déplacement de cette ligne.*

Supposons le théorème démontré pour $(m-2)$ et pour $(m-1)$ sommets.

Conservons les mêmes notations que dans le théorème précédent. Le centre X des moyennes distances des m sommets se trouve sur la droite ae, et l'on a

$$\frac{a\mathrm{X}}{\mathrm{X}e} = \frac{2}{m-2}.$$

Fig. 5.



Menons la perpendiculaire $\mathrm{X}p$ à $x'x^{(m)}$, les points r, l, p, O′ sont fixes. Menons el, er, et posons $\mathrm{O}'x^{(m)} = \rho_1$, $lb' = \rho_{m-1}$. On a

$$\begin{aligned} m.p\mathrm{X} &= \mathrm{O}'e + (m-1)\,lg, \\ m.p\mathrm{X} &= 2\,\mathrm{O}'e + (m-2)\,ra, \\ (m-1)^2\,\overline{lg}^2 - \overline{\mathrm{O}'e}^2 &= (m-1)^2\rho_{m-1}^2 - \rho_1^2. \end{aligned}$$

On en tire

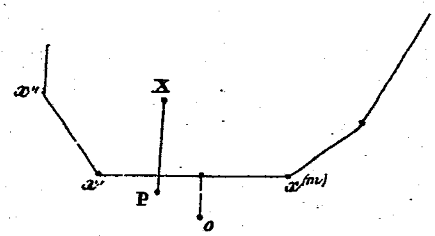
$$(\alpha)\qquad \left\{\begin{aligned} &m.p\mathrm{X} - \mathrm{O}'e = (m-1)\,lg, \\ &m(m-2)^2\,p\mathrm{X}\,ra = (m-1)^2\rho_{m-1}^2 - \rho_1^2. \\ &(m-1)^2\,\overline{lg}^2 - \overline{\mathrm{O}'e}^2 = m.p\mathrm{X}(m.p\mathrm{X} - 2\,\mathrm{O}'e). \end{aligned}\right.$$

La relation (α) démontre le théorème énoncé. Cela posé, les théorèmes I et II nous ont démontré que les théorèmes III et IV étaient vrais pour trois points consécutifs. Ils sont donc vrais d'une manière générale.

Théorème V. — *Si la ligne polygonale $\alpha\beta\gamma\ldots$ se ferme une seule fois, elle se fermera toujours, et le centre des moyennes distances des sommets du polygone fermé $\alpha\beta\gamma\ldots$ restera fixe pendant le déplacement de ce polygone.*

Supposons que la droite $x'\,x^{(m)}$ (*fig.* 6), qui ferme la ligne polygo-

Fig. 6.



nale, soit tangente à la conique Φ, la ligne pX devra être perpendiculaire à la fois à tous les côtés, ce qui exige que p et X soient confondus. La relation (α) nous montre que l'on a alors

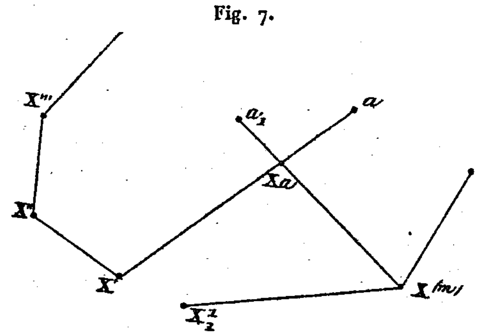
$$(m-1)\,\rho_{m-1} = \rho_1;$$

donc, si la ligne $\alpha\beta\gamma\ldots$ se ferme, le centre des moyennes distances des sommets de la ligne, dans la position où elle se ferme, est le centre de similitude des deux circonférences décrites, dans le mouvement de la ligne, par chaque sommet et par les centres des moyennes distances de $(m-1)$ sommets consécutifs.

Déplaçons le premier sommet x' de la ligne fermée en X′ (*fig.* 7), et soient X′, X″, ..., $\mathrm{X}^{(m)}$, m sommets consécutifs de la ligne dans cette nouvelle position : je dis qu'elle est encore fermée.

En effet, par un deuxième déplacement, amenons X′ en X″, les m sommets seront alors (X″, X‴, ..., $\mathrm{X}^{(m)}$, X'_1). Il suffit de prouver que X′ et X'_1 coïncident. En effet, soit a le centre des moyennes distances des $(m-1)$ points $(X'', X''', \ldots, X^{(m)})$, a_1 celui des points $(X', X'', X''', \ldots, X^{(m-1)})$, a_2 celui des points $(X'_1, X^{(m)}, \ldots, X'')$. Les droites

Fig. 7.



aX', $a_1X^{(m)}$ se coupent en un point X_α qui est le centre des moyennes distances des m sommets $(X', X'', \ldots, X^{(m)})$, et, comme on a

$$\frac{aX_\alpha}{X_\alpha X'} = \frac{a_1X_\alpha}{X_\alpha X^{(m)}} = \frac{1}{m-1},$$

le point X_α n'est autre que le centre de similitude X des circonférences décrites respectivement par les points $a, a_1, a_2, \ldots,$ et les points $X', X'', \ldots, X^{(m)}, X'_1$.

Dès lors on verra de même que aX'_1 passe aussi par ce même point X ; donc X' et X'_1 coïncident.

Autre énoncé du même théorème. — *Si un polygone peut être inscrit à une circonférence et circonscrit à une conique dont l'un des foyers est au centre de la circonférence, il existe une infinité de polygones jouissant de la même propriété; le centre des moyennes distances des sommets de tous ces polygones est le même.*

Problème. — *Trouver le rayon de la circonférence, sur laquelle se trouvent les centres des moyennes distances de n sommets consécutifs de la ligne $\alpha\beta\gamma$..*

Soient n sommets consécutifs $(1, 2, 3, \ldots, n)$; g_{n-2}, g_n, g_2 les centres des moyennes distances des trois groupes de sommets

$$[2, 3, \ldots, (n-1)], (1, 2, 3, \ldots, n), (1, 2).$$

Soient encore

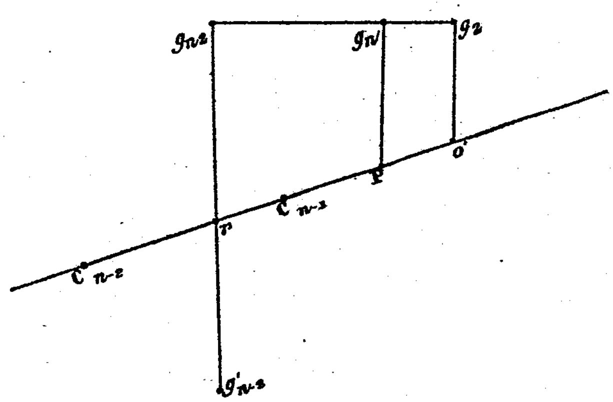
O′ le centre du cercle circonscrit à la ligne $\alpha\beta\gamma$;

C_{n-1} le centre du cercle sur lequel sont situés les centres des moyennes distances de $(n-1)$ sommets consécutifs de la ligne $\alpha\beta\gamma$;

r et p les pieds des perpendiculaires abaissées des points g_{n-2} et g_n sur la droite (1, 2).

Les points O′, C_{n-1}, p, r (*fig.* 8) sont sur le grand axe de la conique Φ inscrite dans la ligne $\alpha\beta\gamma$.

Fig. 8.



Le théorème IV nous a donné la relation

$$(\alpha) \qquad n(n-2)\, pg_n\, rg_{n-2} = (n-1)^2 \rho_{n-1}^2 - \rho_1^2.$$

Posons $O'C_{n-1} = \delta_{n-1}$; nous avons

$$O'p = \delta_{n-1}\frac{n-1}{n},$$

$$O'r = \delta_{n-1}\frac{n-1}{n-2}.$$

Soit C_{n-2} le centre du cercle des points g_{n-2}; la corde rg_{n-2} rencontre ce cercle en un deuxième point g'_{n-2} et l'on a

$$(\beta) \qquad rg_{n-2}\, rg'_{n-2} = \rho_{n-2}^2 - (\delta_{n-2} - O'r)^2.$$

Divisons (α) par (β), nous aurons

$$\frac{pg_n}{rg'_{n-2}} = \frac{(n-1)^2 \rho_{n-1}^2 - \rho_1^2}{n(n-2)\left[\rho_{n-2}^2 - (\delta_{n-2} - O'r)^2\right]}.$$

Or

$$\frac{\rho g_n}{rg'_{n-2}} = \frac{\rho_n}{\rho_{n-2}} = \frac{O'p - \delta_n}{\delta_{n-2} - O'r}.$$

On a donc enfin

$$(\mathrm{R}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{n\rho_n}{(n-2)\rho_{n-2}} &= \frac{(n-1)\delta_{n-1} - n\delta_n}{(n-2)\delta_{n-2} - (n-1)\delta_{n-1}} \\ &= \frac{(n-1)^2\rho_{n-1}^2 - \rho_1^2}{(n-2)^2\rho_{n-2}^2 - \left[(n-2)\delta_{n-2} - (n-1)\delta_{n-1}\right]^2}. \end{aligned} \right.$$

Les formules (R) nous permettent de calculer ρ_n si nous connaissons ρ_{n-1} et ρ_{n-2} ainsi que δ_{n-1} et δ_{n-2}.

Nous pouvons donc faire un tableau des valeurs de ρ_n pour les diverses valeurs de n.

Cela posé, si la ligne α forme un polygone fermé de m côtés, on aura entre les quantités ρ_n les relations suivantes :

$$(\mathrm{M}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \rho_m &= 0, \\ (m-1)\rho_{m-1} &= \rho_1, \\ (m-2)\rho_{m-2} &= 2\rho_2, \\ \dots&\dots\dots\dots \end{aligned} \right.$$

L'une quelconque de ces relations exprimera que la ligne α forme un polygone fermé. Appelons ρ_1, ρ_2 les rayons des circonférences décrites par les sommets du polygone α et par les milieux de ses côtés, δ_2 la distance des centres de ces deux cercles; comme ρ_m, ρ_{m-1}, ρ_{m-2}, ... sont des fonctions de ρ_1, ρ_2, δ_2 que nous savons calculer par la formule (R), l'une quelconque des relations (M) donne la relation qui doit exister entre ρ_1, ρ_2, δ_2 pour que le polygone α existe.

Si aux sommets du polygone α on mène des tangentes au cercle décrit par ces sommets, ces droites formeront un polygone A inscrit et circonscrit à deux cercles de rayons R et ρ_1, et l'on aura, pour déterminer R et la distance des centres δ, la relation

$$\frac{\delta}{\delta_2}=\frac{R}{\rho_2}=\frac{R^2-\delta^2}{\rho_1^2}.$$

Si $f(\rho, \rho_2, \delta_2)=0$ est la condition trouvée pour que le polygone α existe, $f\left(\rho'_1 \frac{R\rho_1^2}{R^2-\delta^2}, \frac{\delta\rho_1^2}{R^2-\delta^2}\right)=0$ sera la condition pour que le polygone A de m côtés existe. Proposons-nous de trouver la fonction f.

Reprenons les formules (R) :

$$(\mathrm{R}) \quad \left\{\begin{aligned} \frac{n\rho_n}{(n-2)\rho_{n-2}} &= \frac{(n-1)\delta_{n-1}-n\delta_n}{(n-2)\delta_{n-2}-(n-1)\delta_{n-1}} \\ &= \frac{(n-1)^2\rho_{n-1}^2-\rho_1^2}{(n-2)^2\rho_{n-2}^2-[(n-2)\delta_{n-2}-(n-1)\delta_{n-1}]^2}. \end{aligned}\right.$$

Posons

$$\begin{aligned} 2\delta_2 &= x_1, & \frac{3\rho_3}{\rho_1} &= a_1, \\ 3\delta_3 &= x_2, & \frac{4\rho_4}{2\rho_2} &= a_2, \\ &\ldots\ldots, & &\ldots\ldots, \\ n\delta_n &= x_{n-1}, & \frac{(n+2)\rho_{n+2}}{n\rho_n} &= a_n. \end{aligned}$$

Les formules (R) nous donnent

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1(1+a_1), \\ x_3 &= x_2(1+a_2)-a_2x_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= x_{n-1}(1+a_{n-1})-a_{n-1}x_{n-2}, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1(1+a_1), \\ x_3 &= x_1(1+a_1+a_1a_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= x_1(1+a_1+a_1a_2+\ldots+a_1a_2\ldots a_{n-1}). \end{aligned}$$

Si nous revenons aux précédentes notations, la dernière relation devient

$$(n+1)\delta_{n+1} = \frac{\delta_2}{\rho_1\rho_2}[1.2.\rho_1\rho_2 + 2.3.\rho_2\rho_3 + \ldots + n(n+1)\rho_n\rho_{n+1}].$$

Remplaçons (n) par $(n-1)$ et $(n-2)$, et retranchons les résultats, nous aurons enfin

$$(n-1)\delta_{n-1} - (n-2)\delta_{n-2} = \frac{\delta_2}{\rho_1\rho_2}(n-2)(n-1)\rho_{n-2}\rho_{n-1}.$$

Substituons cette valeur dans la deuxième des relations (R), il vient

$$\frac{n\rho_n}{(n-2)\rho_{n-2}} = \frac{(n-1)^2\rho_{n-1}^2 - \rho_1^2}{(n-2)^2\rho_{n-2}^2 - \frac{\delta_2^2}{\rho_1^2\rho_2^2}(n-2)^2(n-1)^2\rho_{n-2}^2\rho_{n-1}^2}.$$

Posons $\frac{n\rho_n}{\rho_1} = Z_n$, $\frac{\delta_2}{\rho_2} = \alpha$; nous aurons enfin

$$(\mathrm{R}') \qquad (Z_nZ_{n-2})(1 - \alpha^2 Z_{n-1}^2) + 1 - Z_{n-1}^2 = 0.$$

Il est facile de voir que l'on a

$$Z_1 = 1, \quad \alpha = \frac{\delta}{R}, \quad Z_2 = \frac{2R\rho_1}{R^2 - \delta^2}.$$

La relation (R′) donne, pour le calcul des quantités Z_n, la série des relations

$$(\mathrm{R}'') \qquad \left\{ \begin{array}{l} Z_3 - \alpha^2 Z_3 Z_2^2 - Z_2^2 + 1 = 0, \\ Z_4Z_2 - \alpha^2 Z_4Z_2Z_3^2 - Z_3^2 + 1 = 0, \\ Z_5Z_3 - \alpha^2 Z_5Z_3Z_4^2 - Z_4^2 + 1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Z_nZ_{n-2} - \alpha^2 Z_nZ_{n-2}Z_{n-1}^2 - Z_{n-1}^2 + 1 = 0. \end{array} \right.$$

Cela posé, pour trouver la condition pour qu'un polygone de $2p$ côtés soit inscrit et circonscrit à deux cercles, il suffira d'écrire que Z_{p+1} est égal à Z_{p-1}; si le polygone a $(2p+1)$ côtés, on écrira que $Z_{p+1} = Z_p$. On voit à quel degré de simplicité ce problème difficile a été ramené; nous allons appliquer la méthode aux polygones de 3, 4, 5, 6, 7 côtés.

Pour le triangle on a

$$(3)\qquad Z_2 = 1.$$

En remplaçant Z_2 par sa valeur, on a

$$\frac{2R\rho_1}{R^2-\delta^2} = 1,$$

qui est la relation d'Euler.

Pour le quadrilatère, $Z_3 = Z_1 = 1$. La première des équations (R″) donne alors

$$(4)\qquad Z_2^2(1+\alpha^2) - 2 = 0.$$

Pour le pentagone, $Z_3 = Z_2$. La premiere des équations (R″) nous donne encore

$$(5)\qquad \alpha^2 Z_2^3 + Z_2^2 - Z_2 + 1 = 0.$$

Pour l'hexagone, $Z_4 = Z_2$. Les deux premières des équations (R″) nous donnent

$$Z_3 = \frac{Z_2^2 - 1}{1 - \alpha^2 Z_2^2},$$
$$Z_3^2 = \frac{Z_2^2 + 1}{1 + \alpha^2 Z_2^2}.$$

En réduisant, on trouve

$$(6)\qquad \alpha^2 Z_2^4 + Z_2^2(1+\alpha^2) - 3 = 0.$$

Pour l'heptagone, on a

$$Z_4 = Z_3.$$

Les deux premières des équations (R″) deviennent

$$Z_3 - \alpha^2 Z_3 Z_2^2 - Z_2^2 + 1 = 0,$$
$$Z_3 Z_2 - \alpha^2 Z_2 Z_3^3 - Z_3^2 + 1 = 0.$$

En réduisant, on trouve

$$(7)\quad \alpha^2 Z_2^6 - \alpha^2(\alpha^2+1)Z_2^5 - \alpha^2 Z_2^4 + (3\alpha^2+1)Z_2^3 - Z_2^2 - 2Z_2 + 1 = 0.$$

Écrivons, dans un tableau, les équations (3), (4), (5), (6), (7) :

$$(\mathrm{S})\qquad \left\{\begin{array}{r} Z_2 - 1 = 0, \\ Z_2^2(1+\alpha^2) - 2 = 0, \\ \alpha^2 Z_2^3 + Z_2^2 - Z_2 + 1 = 0, \\ \alpha^2 Z_2^4 + Z_2^2(\alpha^2+1) - 3 = 0, \\ \alpha^2 Z_2^6 - \alpha^2(\alpha^2+1)Z_2^5 - \alpha^2 Z_2^4 \qquad\qquad \\ +(3\alpha^2+1)Z_2^3 - Z_2^2 - 2Z_2 + 1 = 0. \end{array}\right.$$

Pour trouver la relation entre les rayons R, ρ_1 de deux cercles et la distance de leurs centres, pour qu'un polygone de 3, 4, 5, 6, 7 côtés soit inscrit et circonscrit aux deux cercles, il suffit de remplacer dans les formules (S) α et Z_2 par leurs valeurs, qui sont

$$\alpha = \frac{\delta}{R}, \quad Z_2 = \frac{2R\rho_1}{R^2-\delta^2}.$$

Or, si α est nul, les deux cercles sont concentriques et les polygones sont réguliers ; les formules (S) deviennent alors

$$(\mathrm{S}')\qquad \left\{\begin{array}{r} Z_2 - 1 = 0, \\ Z_2^2 - 2 = 0, \\ Z_2^2 - Z_2 + 1 = 0, \\ Z_2^2 - 3 = 0, \\ Z_2^3 - Z_2^2 - 2Z_2 + 1 = 0. \end{array}\right.$$

Les équations (S′) donnent pour Z_2 la valeur $\frac{2\rho_1}{R}$, le double du rapport des rayons de deux circonférences, auxquelles sont inscrits et circonscrits des *polygones réguliers* de 3, 4, 5, 6, 7 côtés.

Première remarque. — Pour trouver la condition cherchée relative à un polygone de $2p$ ou de $(2p+1)$ côtés, il suffira de considérer les $(p-1)$ premières des équations (R″).

Deuxième remarque. — On peut se proposer de trouver la relation cherchée, en fonction du nombre des côtés du polygone; pour cela, il faudrait pouvoir exprimer Z_n en fonction de n. On est donc amené aux deux questions suivantes :

1° n étant un nombre entier positif, existe-t-il une fonction $\varphi(n)$ satisfaisant à la relation

$$1 + \varphi(n)\varphi(n-2) - \varphi(n)\varphi(n-2)[\varphi(n-1)]^2\alpha^2 - [\varphi(n-1)]^2 = 0.$$

2° Trouver cette fonction.

$\varphi(u)$ étant trouvé, la relation cherchée en fonction de (n) serait

$$\varphi(u+1) - \varphi(u) = 0,$$

pour un polygone de $(2u+1)$ côtés, et

$$\varphi(u+1) - \varphi(u-1) = 0,$$

pour un polygone de $(2u)$ côtés.

Mais ces deux questions paraissent présenter de sérieuses difficultés.

Troisième remarque. — L'équation (S), relative à l'hexagone, est bicarrée; on peut donc la résoudre et, par suite, construire avec la règle et le compas un hexagone satisfaisant aux conditions énoncées. Nous allons donner à ce propos un théorème beaucoup plus général :

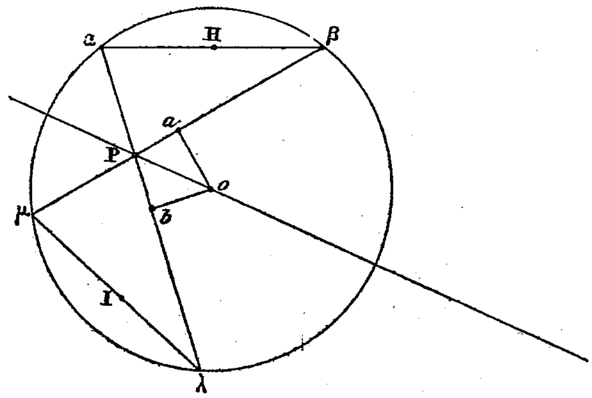
Théorème VI. — *On peut avec la règle et le compas passer d'un polygone de p côtés inscrit et circonscrit à deux cercles à un polygone de $2p$ côtés inscrit et circonscrit à deux cercles.*

Considérons un polygone de $2p$ côtés inscrit et circonscrit à deux cercles; les points de contact de ses côtés avec le cercle intérieur sont les sommets d'un polygone $\alpha\beta\gamma\ldots$; ce polygone est inscrit à un cercle, et ses milieux sont sur un autre cercle. Il suffit, évidemment, de démontrer le théorème énoncé, pour ce polygone $\alpha\beta\gamma\ldots$.

Ce polygone ayant un nombre pair de côtés, les droites qui joignent les sommets opposés concourent en un même point; en effet, soient P et Q deux sommets opposés. Lorsque le polygone se déplace, les points P et Q sont tellement liés, qu'à une position de l'un ne correspond qu'une seule position de l'autre, et réciproquement; donc PQ passe par un point fixe.

Cela posé, soient $\alpha\beta$, $\lambda\mu$ deux groupes de sommets opposés; les droites $\alpha\lambda$, $\beta\mu$ passent par un point fixe P. Les milieux a et b des

Fig. 9.



droites $\alpha\lambda$, $\beta\mu$ se déplacent sur une circonférence fixe, pendant le mouvement du polygone $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$.

Ces points a et b sont les sommets d'un polygone de p côtés, qui se déplace en restant inscrit à une circonférence.

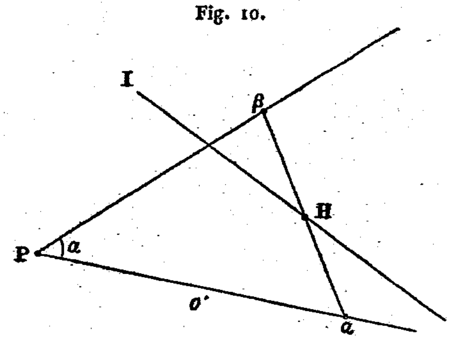
Pour prouver que ce polygone $ab\ldots$ est analogue de $\alpha\beta\gamma\ldots$, il suffit de montrer que le milieu de ab décrit une circonférence, et le théorème énoncé s'en déduira.

Or le milieu de ab est le milieu de la droite HI qui joint les milieux des côtés opposés $\alpha\beta$, $\lambda\mu$. Mais H et I sont les sommets opposés d'un polygone de $2p$ côtés qui se déplace en restant inscrit à une circonférence et circonscrit à une conique; donc HI passe par un point fixe, H et I étant sur une circonférence fixe, le milieu de HI, qui est aussi celui de ab, décrit un cercle.

Nous allons montrer maintenant comment, du polygone $ab\ldots$ de p côtés, on peut déduire, avec la règle et le compas, le polygone $\alpha\beta\gamma\ldots$ de $2p$ côtés. Le côté ab étant donné, le point O est connu, les droites $P\alpha$, $P\beta$, IH sont connues, mais non les points α, β, H; pour les trouver, on est amené au problème suivant.

Trois droites étant données, $P\alpha$, $P\beta$, IH, *tracer une droite* $\beta H \alpha$, *qui soit coupée en* H, *en deux parties égales, et telle que* α *et* β *soient également distants d'un point* O.

Fig. 10.



Si l'on traite la question par l'Analyse, on trouve que le problème est résolu par l'intersection de la droite IH et d'une hyperbole ayant pour équation (en prenant pour axes les bissectrices de l'angle des droites $P\alpha$, $P\beta$)

$$2xy = (xx_0 + yy_0)\sin\alpha.$$

On voit que la question se résout très-simplement.

THÉORÈME VII. — *On peut, avec la règle et le compas, construire un polygone inscrit et circonscrit à deux cercles, quand le nombre des côtés est de la forme* 3.2^p *ou* 4.2^p.

En effet, on sait construire le triangle et le quadrilatère inscrits et circonscrits à deux cercles, et, en vertu du théorème qui précède, on peut passer du triangle au polygone de 6, 12, 24, 48, ... côtés; et du quadrilatère au polygone de 8, 16, 32, ... côtés.

SUITE DE L'ÉTUDE DES ÉQUATIONS (S).

L'une quelconque des équations (S) contient deux quantités seulement, α et Z_2, et l'on a

$$\alpha = \frac{\delta}{R}, \quad Z_2 = \frac{2R\rho_1}{R^2 - \delta^2}.$$

On peut poser divers problèmes, à propos de ces équations; on peut envisager la question de la manière suivante :

Les rayons R, ρ_1 de deux cercles étant donnés, trouver quelle doit être la distance δ de leurs centres pour qu'on puisse inscrire et circonscrire un polygone de m côtés aux deux cercles; dans ce cas, on a

$$\alpha = \frac{K}{R}, \quad Z_2 = \frac{2R\rho_1}{R^2 - \delta^2};$$

il faudra remplacer, dans l'équation (S) qui correspond au polygone considéré, α et Z_2 en fonction de l'inconnue δ, et l'équation changera. Si, au contraire, on se donne δ et R, on a

$$\alpha = K, \quad Z_2 = K'\rho_1,$$

K et K' étant des quantités données, et l'équation (S), où $Z_2 = K'\rho_1$ est l'inconnue, résout immédiatement le problème proposé. Supposons que l'on se donne le rayon R et la fonction $\frac{2R\rho_1}{R^2 - \delta^2}$, ρ_1 et δ étant deux inconnues; l'équation $(S) = 0$ pourra se résoudre en y regardant α comme l'inconnue; prenons, par exemple, le cas du polygone de sept côtés; l'équation (S) ne contient que α^2 et α^4 : on peut donc la résoudre, on en déduira une valeur de δ. Transportant cette valeur de δ dans la quantité donnée $\frac{2R\rho_1}{R^2 - \delta^2}$, on en déduira l'inconnue ρ_1; et le système des valeurs $R\rho_1\delta$, dont l'une était donnée et les deux autres viennent d'être calculées, correspondra à un heptagone. On aurait un résultat analogue pour le pentagone; on peut donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME VIII. — *On peut, avec la règle et le compas, tracer des polygones inscrits et circonscrits à deux cercles, lorsque le nombre de leurs côtés est de la forme* 5.2^p *ou* 7.2^p. *Remarquons que les rayons des deux cercles ne sont pas donnés, mais que l'on donne le rayon du cercle extérieur, et une certaine relation entre les rayons des deux cercles et la distance de leurs centres, cette relation étant ici*

$$\frac{2R\rho_1}{R^2 - \delta^2} = a.$$

Nous avons trouvé, par les considérations qui précèdent, un système unique de valeurs $R\rho_1\delta$ qui répondent à l'inscription, par exemple, d'un polygone de sept côtés. Si l'on demande d'inscrire dans un cercle donné de rayon R' un polygone de sept côtés qui soit inscrit à un autre cercle dont on ne donne pas le rayon, il SUFFIRA de prendre un système de valeurs $R'\rho'_1\delta'$, respectivement proportionnelles à $R\rho_1\delta$; si l'on donne à la fois deux des quantités $R'\rho'_1\delta'$, le problème dépendra, en général, d'une équation que nous ne savons pas résoudre, et, par conséquent, on ne pourra pas construire le polygone à l'aide de la règle et du compas.

Remarque. — Le théorème qui précède offre cette particularité qu'il donne le moyen d'inscrire, dans un cercle donné, un polygone de sept côtés qui soit circonscrit à un cercle, tandis qu'on ne sait pas inscrire dans un cercle un polygone régulier de sept côtés. Ce que nous avons dit plus haut suffit pour expliquer cette anomalie apparente. A un polygone inscrit et circonscrit à deux cercles de rayons R, ρ_1 et de distance des centres δ, correspond un polygone formé par les points de contact des côtés du premier avec le cercle ρ_1. Ce deuxième polygone est inscrit dans un cercle de rayon ρ_1, et les milieux de ses côtés sont sur un cercle de rayon ρ_2; ses côtés sont tangents à une conique dont l'un des foyers est au centre de la circonférence ρ_1, dont la distance focale est $\frac{\delta_2}{2}$, et le demi-grand axe ρ_2. On a les relations

$$\alpha = \frac{\delta_2}{\rho_2}, \quad Z_2 = \frac{2\rho_2}{\rho_1},$$
$$\alpha = \frac{\delta}{R}, \quad Z_2 = \frac{2R\rho_1}{R^2 - \delta^2}.$$

Or, dans le théorème précédent, nous nous sommes donné Z_2, et nous en avons déduit $\frac{\delta}{R}$, au moyen de l'équation (S). Nous pouvons donc dire aussi que nous supposons donné $\frac{\rho_2}{\rho_1}$, et que nous en déduisons $\frac{\delta_2}{\rho_2}$, ou encore que nous nous donnons ρ_2 et ρ_1 et que nous en déduisons δ_2. On peut donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME IX. — *On peut, avec la règle et le compas, tracer un* *polygone de* 3, 4, 5, 6, 7 *côtés qui soit inscrit à un cercle donné, et circonscrit à une conique ayant pour foyer le centre du cercle et dont on donne le grand axe.*

CONCLUSION DE LA PREMIÈRE PARTIE.

Nous avons indiqué, dans cette partie de notre étude, une méthode nouvelle et fort simple pour traiter les questions relatives aux polygones inscrits et circonscrits à deux cercles. Cette méthode nous a fourni un certain nombre de théorèmes intéressants, et peut en fournir un grand nombre, tous relatifs à la construction de ces polygones, selon le nombre de leurs côtés. Nous nous proposons d'étendre considérablement ces théorèmes; mais nous abandonnerons, pour le moment, cette partie, et nous allons donner un certain nombre de propriétés curieuses de ces mêmes polygones, toutes déduites du théorème IV et du théorème V.

DEUXIÈME PARTIE.

Définitions. — Pour éviter des redites et abréger le langage, nous donnerons quelques définitions :

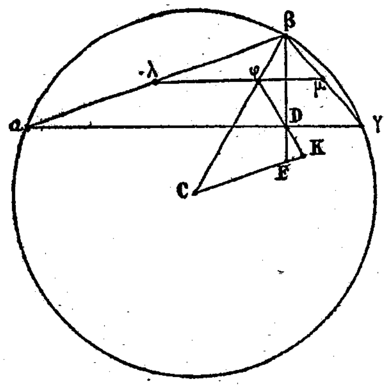
Une *ligne polygonale* A est une ligne polygonale *non fermée qui se déplace* en restant inscrite à la circonférence O et circonscrite à la circonférence C; un *polygone* A est un polygone *fermé qui se déplace* dans les mêmes conditions; *ligne polygonale* α, une ligne polygonale *non fermée,* formée, à chaque instant, par les points de contact des côtés de la ligne A avec le cercle intérieur, et *qui se déplace* en même temps que la ligne A; *polygone* α, un polygone fermé correspondant au polygone fermé A.

Théorème I. — *Dans une ligne* α, *la droite qui joint les milieux* λ, μ *de deux côtés consécutifs* $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ *touche une conique.*

Nous savons que la perpendiculaire βD, abaissée de β sur $\alpha\gamma$, passe par le deuxième foyer F de la conique Φ. Joignons Cβ, qui rencontre

$\lambda\mu$ en φ; φD rencontre en K l'axe CF de la conique Φ. Nous savons que le produit FD, Fβ est constant; donc KD est constant, et K est le

Fig. 11.



centre du cercle décrit par le point D. On a

$$C\varphi + \varphi K = C\varphi + \varphi D + DK = C\beta + DK.$$

Donc φ décrit une conique ayant pour foyers C et K, et ce point φ est le point de contact de $\lambda\mu$ avec cette courbe.

Théorème II. — *Dans une ligne* A, *le centre du cercle inscrit au triangle formé par un côté et les prolongements des deux côtés adjacents décrit une circonférence.*

Soient α, β, γ trois sommets consécutifs de la ligne α; αA, Aβ, Bγ trois côtés de la ligne A. Menons CA, CB et Aβ', Bβ' perpendiculaires à ces droites; par le deuxième foyer F de la conique Φ, menons FA$'$, FB$'$ parallèles à FA, FB.

On a

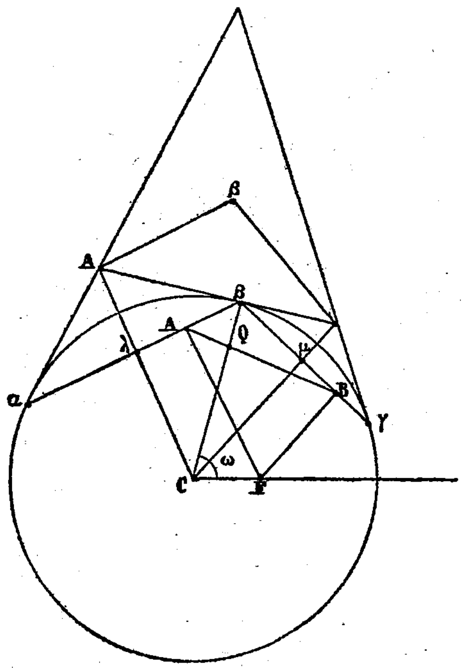
$$C\lambda . FA' = \text{const.},$$
$$C\lambda . CA = \text{const.};$$

d'où

$$\frac{FA'}{CA} = \text{const.}$$

La figure CAβ'B est donc homothétique à la figure FA'βB'; le théorème est donc démontré.

Fig. 12.



THÉORÈME III. — *La surface d'un polygone* A *reste, pendant le déplacement du polygone, proportionnelle à celle du polygone* α *correspondant.*

Reportons-nous à la figure précédente : il suffit de démontrer que la surface du polygone formé par les points A', B', ... reste proportionnelle à celle du polygone α.

On a

$$\beta Q = C\beta - CQ = R - (a + b\cos\omega)$$

(R, a, b étant trois constantes égales respectivement, R au rayon du cercle C; a à la distance constante du point F au côté A'B', et b à la distance CF).

$$\Sigma(A'B'\beta Q) = (R - a)\Sigma A'B' - b\,\Sigma A'B'\cos\omega = (R - a)\Sigma A'B',$$

c'est-à-dire,

$$\text{surface}(\alpha\beta\gamma\ldots) - \text{surface}(A'B'\ldots) = (R - a)\,\Sigma\, A'B'.$$

Or

$$\text{surface}(A'B'\ldots) = a\,\Sigma\, A'B';$$

donc

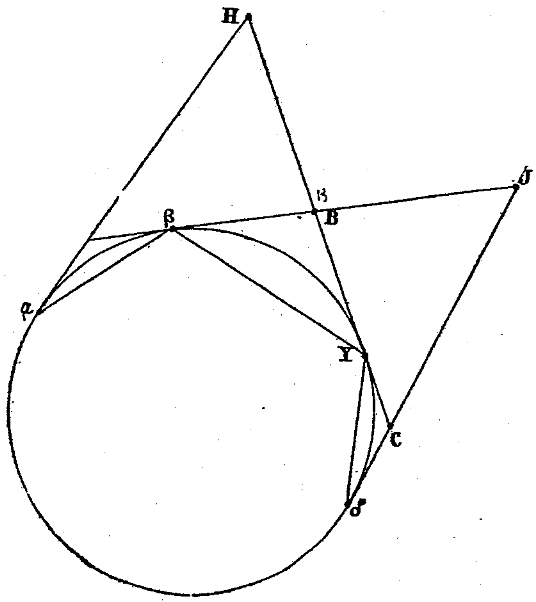
$$\text{surface}(\alpha\beta\gamma\ldots) = R\,\Sigma\, A'B'.$$

Ces deux relations démontrent le théorème :

THÉORÈME IV. — *La surface d'un polygone A reste, pendant le déplacement du polygone, proportionnelle à la somme des sinus de ses angles, et aussi à la somme des droites qui joignent ses sommets de deux en deux.*

Ce théorème est évident, en vertu du précédent.

Fig. 13.

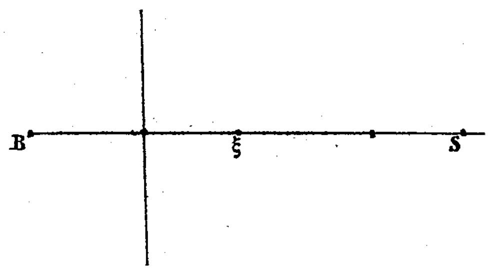


THÉORÈME V. — *Les centres des cercles circonscrits aux triangles formés par un côté d'une ligne A et les prolongements des deux côtés adjacents sont les sommets d'une ligne polygonale inscrite et circonscrite à deux coniques.*

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ quatre sommets consécutifs de la ligne α; ABH, BJC les deux triangles de la ligne A qui leur correspondent.

Le cercle circonscrit à ABH est le transformé par rayons vecteurs réciproques du cercle des neuf points du triangle $\alpha\beta\gamma$; or le centre de ce cercle des neuf points décrit une circonférence, car le centre des moyennes distances des points $\alpha\beta\gamma$ en décrit une; le rayon de ce cercle

Fig. 14.



des neuf points est constant; donc il touche deux cercles concentriques : son transformé ABH touche donc aussi deux cercles, son centre décrit donc une conique.

Soient B et ξ les deux points de rencontre des cercles ABH, BJC; la droite Bξ passe au centre S de similitude des deux cercles auxquels sont tangents les cercles ABH, BJC, de plus

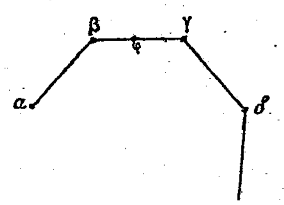
$$SB.S\xi = \text{const.};$$

donc, en vertu du théorème II de la Ire Partie, la perpendiculaire élevée au milieu de Bξ, laquelle passe par les centres des cercles ABH, BJC, touche une conique.

Théorème VI. — *Dans une ligne α qui se déplace, les centres des hyperboles équilatères passant par quatre sommets consécutifs décrivent une circonférence.*

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ quatre sommets consécutifs : le centre de l'hyperbole équilatère qui passe par les quatre points est au point de rencontre des cercles des neuf points des triangles $\alpha\beta\gamma$, $\beta\gamma\delta$; ces cercles se rencontrent déjà au milieu φ de $\beta\gamma$, de plus ils touchent deux cercles fixes; donc, en répétant le raisonnement du théorème précédent, on

Fig. 15.



voit que le deuxième point de rencontre de ces cercles décrit un cercle fixe.

Théorème VII. — *Dans un polygone α qui se déplace, la somme des carrés des côtés reste constante.*

Soient x', y', x'', y'', ... les coordonnées des sommets du polygone α, par rapport à deux axes rectangulaires passant par le point C, l'axe des x étant l'axe de la conique Φ.

Les sommets du polygone α et les milieux de ses côtés décrivant des circonférences, on a

$$x'^2 + y'^2 = R^2, \quad \left(\frac{x'+x''}{2}\right)^2 + \left(\frac{y'+y''}{2}\right)^2 + A\frac{x'+x''}{2} + B = 0,$$
$$x''^2 + y''^2 = R^2, \quad \left(\frac{x''+x'''}{2}\right)^2 + \left(\frac{y''+y'''}{2}\right)^2 + A\frac{x''+x'''}{2} + B = 0.$$

On en déduit

$$x'x'' + y'y'' + A(x'+x'') + B_1 = 0$$
$$x''x''' + y''y''' + A(x''+x''') + B_1 = 0.$$

En appelant S^2 la somme des carrés des côtés, on a

$$\begin{aligned} S^2 &= \Sigma[(x'-x'')^2 + (y'-y'')^2] \\ &= K + \Sigma(x'x'' + y'y'') = K_1 + A_1 \Sigma x'. \end{aligned}$$

Or $\Sigma x'$ est constant, car le centre des moyennes distances des sommets du polygone α est fixe, en vertu du théorème V de la Ire Partie.

Théorème VIII. — *La somme des carrés des droites qui joignent les sommets du polygone α, pris de deux en deux, reste constante, pendant le déplacement de ce polygone.*

En effet, les milieux des côtés du polygone α décrivant une circonférence, on a

$$\Sigma(x'x'' + y'y'') = \text{const.}$$

Les centres des moyennes distances de trois sommets consécutifs du polygone α décrivant une circonférence, on a de même

$$\Sigma\left[(x'x'' + x'x''' + x''x''') + (y'y'' + y'y''' + y''y''')\right] = \text{const.}$$

On en déduit

$$\Sigma(x'x''' + x'y''') = \text{const.}$$

Le théorème est démontré par cette relation.

Théorème IX. — *La somme des carrés des droites qui joignent les sommets du polygone α, pris de p en p, reste constante, pendant le déplacement du polygone.*

Même démonstration que pour les deux théorèmes précédents. Cette somme varie d'ailleurs avec p.

Théorème X. — *Dans un polygone* A, *la somme des cosinus des angles reste constante, pendant le déplacement du polygone.*

Conséquence évidente du théorème VII.

Théorème XI. — *Dans un polygone* A, *la somme des cosinus des angles formés par deux côtés, pris de p en p, reste constante, pendant le déplacement du polygone.*

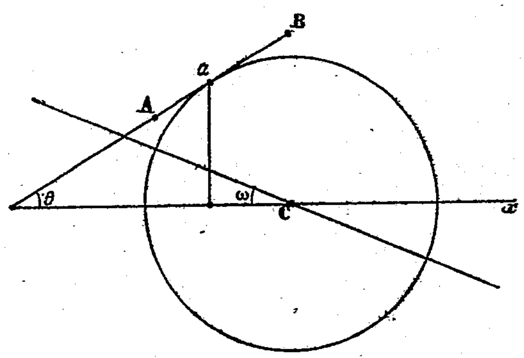
Conséquence évidente du théorème IX.
Cette somme varie d'ailleurs avec p.

Théorème XII. — *La somme des cosinus des angles que font tous les côtés d'un polygone* A *avec une direction fixe reste constante, pendant* *le déplacement de ce polygone. Cette somme varie d'ailleurs avec la direction choisie.*

Soit AB un des côtés du polygone, α le point où il touche le cercle C. Menons par le centre C une parallèle à la direction donnée; $\cos\theta$ est proportionnel à la distance du point α à cette droite Cx.

Donc la somme des $\cos\theta$ est proportionnelle à la somme des distances des points α à une droite fixe, et cette dernière somme est constante en vertu du théorème V de la I^{re} Partie. De même $\Sigma\sin\theta$ est constante.

Fig. 16.



Le centre des moyennes distances des points α est un point fixe situé sur la ligne des centres des deux cercles auxquels le polygone A est inscrit et circonscrit; appelons Δ la distance de ce point au centre C et ω l'angle que fait la ligne des centres avec la direction Ox; nous aurons

$$\Sigma\cos\theta = \frac{\Sigma y'}{\rho_1} = \frac{m\,\Delta\sin\omega}{\rho_1},$$

$$\Sigma\sin\theta = \frac{m\,\Delta\cos\omega}{\rho_1}.$$

On en déduit

$$\frac{\Sigma\sin\theta}{\Sigma\cos\theta} = \cot\omega.$$

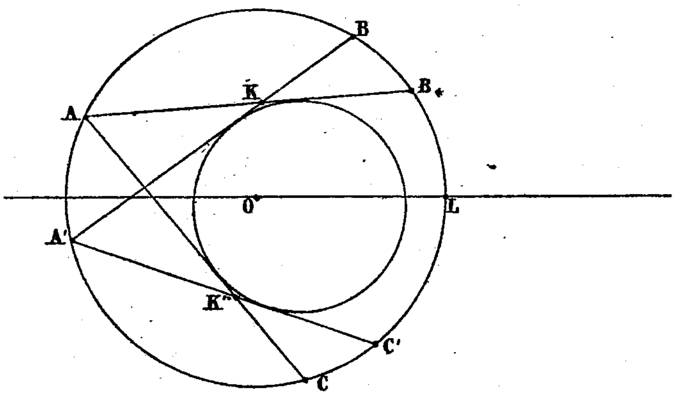
On a donc le théorème suivant :

Théorème XIII. — *Lorsqu'un polygone se déplace en restant inscrit* *et circonscrit à deux cercles, le rapport entre la somme des sinus des angles formés par tous ses côtés avec une direction fixe et la somme des cosinus de ces mêmes angles reste constant, quel que soit le nombre des côtés du polygone.*

Remarque. — Nous allons donner du théorème XII, qui est important, une démonstration directe.

Soient B, A, C trois sommets consécutifs du polygone A; B', A', C' les positions de ces points après un déplacement infiniment petit du polygone A. Menons par le centre O du cercle extérieur une parallèle à la

Fig. 17.



direction donnée; nous pouvons déterminer un sommet B du polygone A par l'arc $LB = \varphi$, compté à partir du point L. Nous aurons

$$\frac{d\varphi}{BK} = \frac{d\varphi'}{AK} = \frac{d\varphi'}{AK'} = \frac{d\varphi''}{K'C} = \frac{d\varphi + d\varphi'}{AB} = \frac{d\varphi + d\varphi''}{AC}.$$

Cela posé, le polygone $BAC\ldots$ se fermant, en appelant θ l'angle d'un de ses côtés AB avec la droite fixe Ox, on a

$$\Sigma\, AB \sin\theta = 0.$$

Or

$$\theta = \frac{\varphi + \varphi' - \pi}{2}, \quad d\theta = \frac{d\varphi + d\varphi'}{2}, \quad AB = K(d\varphi + d\varphi') = 2K\, d\theta;$$

donc

$$\Sigma \sin\theta \, d\theta = 0;$$

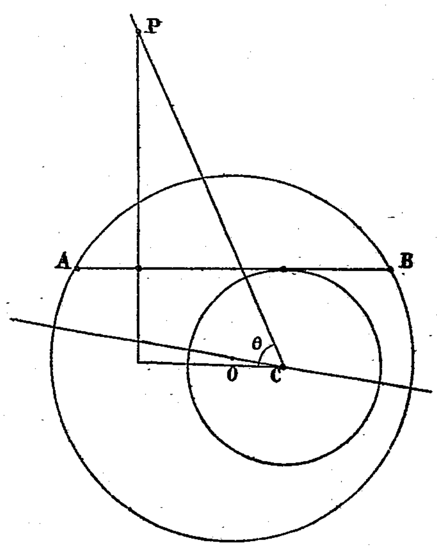
par suite

$$\Sigma \cos\theta = \text{const.} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

THÉORÈME XIV. — *Quand un polygone A se déplace, la somme des distances d'un point fixe du plan à ses côtés reste constante. Cette somme varie avec la position du point dans le plan.*

Soient P le point fixe, AB un côté du polygone. Joignons CP, la

Fig. 18.



droite CP reste fixe pendant le déplacement du polygone. En appelant δ la distance de P à AB, on a

$$\delta + \rho_1 = \text{CP} \sin\theta,$$
$$\Sigma\delta + m\rho_1 = \text{CP}\,\Sigma \sin\theta.$$

On voit que $\Sigma\delta$ reste constante.

Nous avons

$$\Sigma \sin\theta = \frac{m \Delta \cos\omega}{\rho_1};$$

donc

$$\Sigma\delta = \frac{\mathrm{CP}\, m\, \Delta \cos\omega}{\rho_1} - m\rho_1.$$

On voit que cette somme des distances reste la même lorsque le point P se déplace sur une perpendiculaire à la ligne des centres, menée à une distance du point C égale à $\frac{\rho_1^2}{\Delta}$; cette somme est alors nulle.

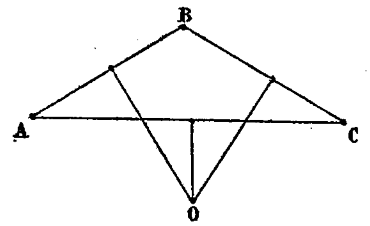
Cette somme des distances reste encore la même et égale à $-m\rho_1$, lorsque le point P se déplace sur la perpendiculaire à la ligne des centres, menée par le point C. Enfin cette somme des distances conserve la même valeur pour tous les points P, situés sur une même perpendiculaire à la ligne des centres.

Théorème XV. — *La somme des distances du centre* O *du cercle circonscrit au polygone* A, *aux droites qui joignent les sommets de ce polygone pris de deux en deux, reste constante pendant le déplacement de ce polygone.*

En effet, chacune de ces distances est proportionnelle au cosinus d'un des angles du polygone.

Théorème XVI. — *La somme des rayons des cercles inscrits dans les triangles formés par trois sommets consécutifs du polygone* A *reste constante, pendant le déplacement de ce polygone.*

Fig. 19.



Soient A, B, C trois sommets consécutifs, appelons δ', δ'', δ''' les distances de O aux trois droites AB, BC, AC.

On a, en appelant r le rayon du cercle inscrit au triangle ABC,

$$R + r = \delta' + \delta'' + \delta''',$$
$$\Sigma r = \Sigma\delta' + \Sigma\delta'' + \Sigma\delta''' - mR.$$

Or $\Sigma\delta'$, $\Sigma\delta''$ sont constantes, en vertu du théorème XIV, et $\Sigma\delta'''$ est constante en vertu du théorème XV.

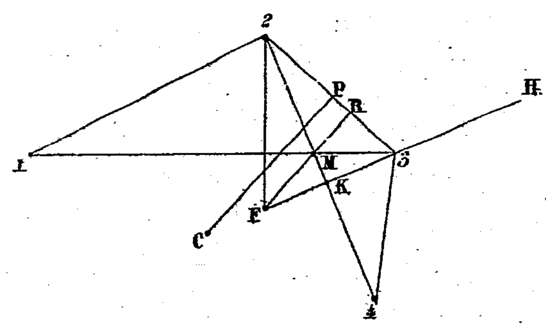
Théorème XVII. — *La somme des rayons des cercles inscrits dans les triangles formés par un côté du polygone* A, *et les prolongements des deux côtés adjacents, reste constante, quand le polygone se déplace.*

Reportons-nous à la figure du théorème II. Le rayon du cercle inscrit au triangle AHB est la distance de β' au côté AB; or cette distance est proportionnelle à βQ ou à Cβ — CQ; or la somme des longueurs CQ reste constante en vertu du théorème XIV.

Théorème XVIII. — *Si l'on considère quatre sommets consécutifs* (1, 2, 3, 4,) *d'un polygone* α, *les droites* (13), (24) *se rencontrent en un point* M.

Ce point M est le sommet d'un polygone qui se déplace en même temps que le polygone α et qui jouit des propriétés suivantes: il est

Fig. 20.



inscrit à un cercle et circonscrit à une conique; le centre des moyennes distances de ses sommets est fixe; la somme des carrés de ses côtés est constante.

En effet, les perpendiculaires abaissées des points 2 et 3 sur les droites (13), (24) passent par le deuxième foyer F de la conique Φ; et l'on a, en vertu du théorème II, Ire Partie,

$$F\mu \,.\, FR = FK \,.\, F3 = \text{const.},$$
$$FR \,.\, CP = \text{const.},$$

d'où

$$\frac{FM}{CP} = \text{const.}$$

Cette dernière relation démontre le théorème.

THÉORÈME XIX. — *Le point* K, *projection du sommet* (3), *sur le côté* (24), *est le sommet d'un polygone qui jouit des mêmes propriétés que le polygone des points* M (voir la figure du théorème précédent).

En effet, si H est le point de concours des hauteurs du triangle (2, 3, 4), on a

$$\frac{FK}{FH} = \text{const.};$$

donc le point K décrit une courbe homothétique à celle du point H_1, et par suite à celle du centre G_3 des moyennes distances des trois points (2, 3, 4).

THÉORÈME XX. — *Si l'on considère, dans un polygone* α, *les centres des moyennes distances de* p *sommets consécutifs, ces points sont les sommets d'un polygone qui jouit des propriétés suivantes:*

1° Il se déplace en restant inscrit à un cercle et circonscrit à une conique fixe.

2° Le centre des moyennes distances de ses sommets est fixe.

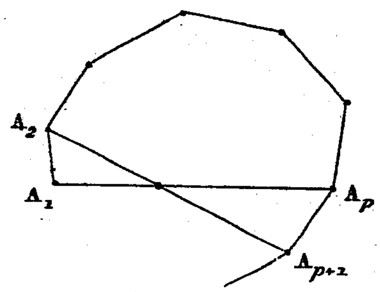
3° La somme des carrés de ses côtés reste constante.

4° La somme des carrés des droites qui joignent ses sommets de n en n reste constante.

Ces propriétés se déduisent aisément des théorèmes précédents.

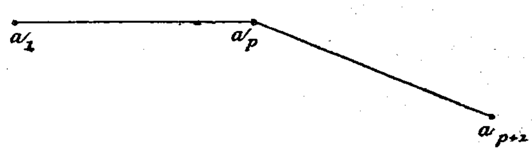
THÉORÈME XXI. — *Si, en considérant un polygone* α, *on mène par un point* a_1 *du plan une droite égale et parallèle à* A_1A_p *qui joint les* *sommets* A_1, A_p, *puis par l'extrémité* a_p *de cette droite, une droite égale et parallèle à* $A_2 A_{p+1}$, *et ainsi de suite, on formera un polygone fermé inscrit à un cercle et circonscrit à une conique; lorsque le polygone* α

Fig. 21.



se déplacera, le polygone des points α *se déplacera en même temps, le cercle et la conique auxquels il est inscrit et circonscrit tourneront autour du point* a_1 *sans changer de grandeur ni de position relative,*

Fig. 22.



et la somme des carrés des côtés $a_1 a_p$ *restera constante; enfin le centre des moyennes distances des points* $a_1\ a_p\ a_{p+1} \ldots$ *décrira un cercle ayant son centre au point* a_1.

Pour démontrer ce théorème, il suffit de remarquer que la droite $A_1 A_p$ est parallèle en direction, et proportionnelle en grandeur à la droite qui joint les centres des moyennes distances des deux groupes de points $(A_1 A_2 \ldots A_{p-1})$, $(A_2 A_3 \ldots A_p)$.

Remarque. — Si le polygone α a un nombre pair de $2m$ côtés, et qu'on joigne les sommets de m en m, le polygone $a_1\ a_m\ a_{m+1} \ldots$, construit comme nous venons de le faire, aura ses côtés opposés égaux et parallèles; le cercle et la conique auxquels ce polygone est inscrit et circonscrit seront donc concentriques.

THÉORÈME XXII. — *Si dans un polygone α on considère $2p$ sommets consécutifs, et qu'on joigne les centres des moyennes distances des p premiers et des p suivants, la droite ainsi obtenue est le côté d'un polygone analogue de α, c'est-à-dire dont les sommets décrivent une circonférence, pendant que les milieux de ses côtés décrivent aussi une circonférence.*

En effet, soient g_p, g'_p les centres des moyennes distances des sommets $(1, 2, 3, \ldots, p)$ $(p+1, p+2, \ldots, 2p)$; le milieu g_{2p} de la droite

Fig. 23.

$g_p g'_p$ est le centre des moyennes distances des points $(1, 2, 3, \ldots, 2p)$; donc il décrit une circonférence, et le théorème se trouve démontré.

Si p est premier avec m nombre des côtés du polygone α, et plus petit que $\frac{m}{2}$, le polygone des points g_p aura m côtés; cela posé, nous appellerons *polygones α distincts* deux polygones de m côtés, tels qu'un côté dans le premier polygone partage le plan en deux régions dont l'une contient K sommets et l'autre $(m - \mathrm{K} - 2)$, tandis que dans le deuxième polygone K se change en K'.

On voit donc qu'il y a autant de polygones α distincts, de m côtés, qu'il y a d'entiers premiers avec m et plus petits que $\frac{m}{2}$.

Supposons construit un quelconque de ces polygones de m côtés; qui sera inscrit à un cercle de rayon ρ_1, pendant que les milieux de ses côtés seront sur un cercle de rayon ρ_2, et tel que la distance des centres des deux cercles soit δ_2; à ce polygone α correspond un polygone A de m côtés inscrit à un cercle de rayon R, circonscrit au cercle ρ_1, la distance des centres des deux cercles étant égale à δ.

Si, dans le polygone α, nous considérons les centres des moyennes distances g_p, g'_p, g''_p, ..., pour toute valeur de p première avec m et plus petite que $\frac{m}{2}$, ces points seront les sommets d'un polygone α_p de m côtés, dont les *éléments* seront $\rho_p\,\rho_{2p}\,(\delta_{2p}-\delta_p)$; à ce polygone α_p correspondra un polygone A_p dont les éléments seront R_p, ρ_p, δ'_p, et les quantités R_p, ρ_p, δ'_p seront des *fonctions rationnelles* des données R, ρ_1, δ, fonctions que nous savons calculer au moyen des formules (R'') de la Ire Partie.

On en déduit aisément le théorème suivant :

Théorème XXIII. — *L'équation* $(S)=0$, *ou* $f(Z, \alpha^2)=0$ (voir Ire Partie), *est telle que, si l'on en connaît* une seule racine réelle et positive, *toutes les autres racines réelles et positives peuvent se calculer rationnellement et successivement en fonction de la première.*

Pour appliquer ce théorème à un exemple, considérons l'équation du sixième degré $\rho(Z_2, \alpha^2)=0$, qui correspond au polygone de sept côtés; remarquons qu'il y a trois polygones α *distincts* de sept côtés.

Donnons-nous α et R, nous aurons alors $Z_2=K'\rho_1$ et l'équation $\varphi=0$ nous donnera Z_2, c'est-à-dire ρ_1; à une valeur déterminée réelle et positive de Z_2, satisfaisant à l'équation $\varphi=0$, correspond un polygone A dont les *éléments* sont δ, R, ρ_1; ce polygone peut donc être construit : par suite aussi le polygone α qui lui correspond. Cela posé, calculons, au moyen des formules (R), les valeurs ρ_2, ρ_3, ρ_4, ρ_5; nous aurons

$$\rho_4=\rho_3, \quad \rho_5=\rho_2, \quad Z_2=\frac{2\rho_2}{\rho_1}, \quad Z_3=\frac{3\rho_3}{\rho_1},$$

$$z_3-\frac{\delta^2}{R^2}Z_2^2-Z_2^2+1=0.$$

Calculons aussi δ_2, δ_3, δ_4.

Le polygone α de sept côtés, dont les *éléments* sont ρ_2, ρ_4, $(\delta_4-\delta_2)$, pourra donc être construit, par suite aussi les *éléments* ρ_2, R_2, δ'_2 du polygone A_2 correspondant, si nous posons $\alpha=\frac{\delta'_2}{R_2}$, $Z_2=\frac{2R_2\rho_2}{R_2^2-\delta'^2_2}$, ces valeurs de α et Z_2, substituées dans la relation $\varphi=0$, la rendront identique; c'est en ce sens qu'il faut entendre le théorème énoncé. Si donc, pour une valeur donnée de α, on connaît une valeur de Z_2 qui annule l'équation, on pourra calculer rationnellement deux autres valeurs de Z_2 qui, pour une autre valeur de α dépendant de la première valeur donnée à α, rendent encore l'équation $\varphi = o$ identique. Ces explications font nettement comprendre le théorème.

THÉORÈME XXIV. — *Dans un polygone* A, *la somme des inverses des rayons des cercles circonscrits aux triangles formés par un côté et les prolongements des deux côtés adjacents reste constante, pendant le déplacement du polygone.*

Ce théorème se démontre facilement en s'appuyant sur ce que l'un de ces cercles est le transformé par rayons vecteurs réciproques du cercle des neuf points d'un triangle fermé par trois sommets consécutifs du polygone α.

THÉORÈME XXV. — *Si l'on considère p sommets consécutifs d'une ligne* α, *et les p côtés d'une ligne* A *qui correspondent à ces points, le centre des moyennes distances de ces p sommets a pour polaire et, par suite, pour droite correspondante dans la ligne* A, *la droite lieu géométrique des points dont la somme des distances à ces p côtés de la ligne* A *est nulle.*

On peut donc appliquer à ces droites les théorèmes démontrés sur les centres des moyennes distances.

THÉORÈME XXVI. — *Quand un polygone de 2m côtés se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux coniques, les côtés opposés se rencontrent en m points qui restent sur une droite fixe ; les droites qui joignent les sommets opposés passent par un même point qui reste fixe.*

Ce théorème se démontre en remarquant qu'à une position d'un des sommets ou d'un des côtés ne correspond qu'une seule position du sommet ou du côté opposé, et réciproquement. Si nous considérons les m points déterminés sur la droite fixe par les points de rencontre des côtés opposés pris deux à deux, ou bien encore les m points d'intersection d'une droite fixe du plan, avec les m droites formées par les lignes qui joignent les sommets opposés pris deux à deux, et qui pivotent autour d'un point fixe, ces m points formeront sur la droite considérée un système de divisions en *involution du* $(m)^{\text{ième}}$ *ordre,* c'est-à-dire qu'à une position de l'un d'eux ne correspondra qu'une seule position des $(m-1)$ autres, quel que soit le point choisi.

Cela posé, considérons, en particulier, un hexagone, nous aurons un système de trois points se déplaçant sur une droite fixe; appelons α, β, γ les distances de ces trois points à un point fixe quelconque de la droite; puisque les trois points se correspondent de telle manière qu'à une valeur de α correspondent deux valeurs β, γ, et que de même à la valeur β correspondent deux valeurs α, γ, et à la valeur γ deux valeurs α, β, nous aurons, entre α, β, γ, les trois relations

$$\begin{aligned}
&A\alpha^2\beta^2 + B(\alpha^2\beta + \alpha\beta^2) + C(\alpha^2 + \beta^2) + D\alpha\beta + E(\alpha + \beta) + F = 0,\\
&A\alpha^2\gamma^2 + B(\alpha^2\gamma + \alpha\gamma^2) + \ldots + F = 0,\\
&A\beta^2\gamma^2 + \ldots + F = 0.
\end{aligned}$$

Éliminons β et γ entre ces trois relations, et exprimons que l'équation en α est identiquement satisfaite, nous aurons, entre les coefficients A, B, C, ..., F, les relations qui caractérisent l'*involution du deuxième ordre*. Nous ne faisons qu'indiquer cette généralisation, qui fera l'objet d'une étude ultérieure.

THÉORÈME XXVII. — *Il existe entre les angles qui déterminent les sommets d'un polygone α un grand nombre de relations faciles à trouver.*

Les coordonnées des sommets d'un polygone α pourront se représenter par

$$\begin{aligned}
&\rho_1\cos\omega_1,\quad \rho_1\cos\omega_2,\quad \ldots,\\
&\rho_1\sin\omega_1,\quad \rho_2\sin\omega_2,\quad \ldots.
\end{aligned}$$

Exprimons, par exemple, que la perpendiculaire abaissée de l'un des sommets sur la droite qui joint les deux sommets adjacents passe par un point fixe, nous aurons

$$-\sin\omega_2(\sin\omega_3 - \sin\omega_1) + (A - \cos\omega_2)(\cos\omega_3 - \cos\omega_1) = 0;$$

d'où, en différentiant,

$$\left\{\begin{aligned}
0 = {}& d\omega_1[A\sin\omega_1 + \sin(\omega_2 - \omega_1)]\\
& + d\omega_2[\sin(\omega_2 - \omega_3) - \sin(\omega_1 + \omega_2)] + d\omega_3[A\sin\omega_3 - \sin(\omega_2 + \omega_3)].
\end{aligned}\right.$$

On a donc la relation suivante :

$$\begin{vmatrix} A\sin\omega_1+\sin(\omega_2-\omega_1) & \sin(\omega_2-\omega_3)-\sin(\omega_1+\omega_2) & A\sin\omega_3-\sin(\omega_2+\omega_3) & 0, & 0, \\ 0 & A\sin\omega_2+\sin(\omega_3-\omega_2) & \sin(\omega_3-\omega_4)-\sin(\omega_2+\omega_3) & A\sin\omega_4-\sin(\omega_3+\omega_4) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix} = 0.$$

On trouverait de même une série d'autres relations exprimées par des déterminants égalés à zéro.

Théorème XXVIII. — *Si l'on a une série d'angles $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ entre lesquels il existe la série des relations suivantes, au nombre de m :*

$$\begin{gathered} \cos(\omega_2-\omega_1)+A(\cos\omega_2+\cos\omega_1)+B=0, \\ \cos(\omega_3-\omega_2)+A(\cos\omega_3+\cos\omega_2)+B=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \cos(\omega_m-\omega_{m-1})+A(\cos\omega_m+\cos\omega_{m-1})+B=0, \\ \cos(\omega_1-\omega_m)+A(\cos\omega_1+\cos\omega_m)+B=0, \end{gathered}$$

1° *On peut éliminer les m angles entre ces m équations, et obtenir par suite une relation entre* A *et* B.

2° *On a entre les angles la série des $\frac{m}{2}$ relations suivantes :*

$$\begin{gathered} \Sigma\cos(\omega_2-\omega_1)=\text{const.}, \\ \Sigma\cos(\omega_3-\omega_1)=\text{const.}, \\ \Sigma\cos(\omega_4-\omega_1)=\text{const.}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Sigma\cos\left(\omega_{\frac{m+1}{2}}-\omega_1\right)=\text{const.} \end{gathered}$$

Ce théorème n'est que la traduction des théorèmes qui précèdent.

Théorème XXIX. — *Dans un triangle* A, *le centre des moyennes distances des sommets décrit une circonférence pendant le déplacement du triangle.*

Représentons les coordonnées des trois sommets par

$$\begin{aligned} &R\cos\alpha_1, \quad R\sin\alpha_1,\\ &R\cos\alpha_2, \quad R\sin\alpha_2,\\ &R\cos\alpha_3, \quad R\sin\alpha_3. \end{aligned}$$

Posons

$$\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} = \xi, \quad \cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2} = y.$$

Il vient

$$\begin{aligned} \pm\rho_1 &= -\delta\xi + Ry,\\ \pm\rho_1 &= -\delta\xi' + Ry',\\ \pm\rho_1 &= -\delta\xi'' + Ry'' \end{aligned}$$

On en tire

$$\begin{aligned} R^2\Sigma y^2 + \delta^2\Sigma\xi^2 - 3\rho_1^2 - 2\delta R\Sigma y\xi &= 0,\\ R^2\Sigma y^2 - \delta^2\Sigma\xi^2 + 3\rho_1^2 \mp 2R\rho_1\Sigma y &= 0,\\ R^2\Sigma y^2 - \delta R\Sigma y\xi \pm R\rho_1\Sigma y &= 0. \end{aligned}$$

Or $R\Sigma y$ est égal à $R+\rho_1$, car $R\Sigma y$ représente la somme des distances du centre du cercle circonscrit à un triangle à ses côtés; donc

$$R^2\Sigma y^2 - \delta R\Sigma y\xi \pm \rho_1(R+\rho_1) = 0. \tag{1}$$

Considérons un cercle dont le centre soit sur la droite qui joint les centres O et C des cercles inscrit et circonscrit au triangle, à une distance de O égale à $\frac{2\delta}{3}$, passant par le centre des moyennes distances des trois sommets et de rayon H, on aura

$$\left\{\begin{aligned} H^2 = &\left(\frac{R\cos\alpha_1 + R\cos\alpha_2 + R\cos\alpha_3}{3} - \frac{2\delta}{3}\right)^2\\ &+ (R\sin\alpha_1 + R\sin\alpha_2 + R\sin\alpha_3)^3. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Cette relation devient, en vertu de la relation (1),

$$4\delta^2 - 9h^2 - 3R^2 \pm 4\rho_1(R+\rho_1) = 0.$$

h est donc constant, et le théorème est démontré. On en déduit aisément que le point de concours des hauteurs décrit aussi une circonférence, et que le centre du cercle des neuf points en décrit une dont le centre est au centre du cercle inscrit et de rayon $\frac{R}{2} - \rho_1$. On a donc une démonstration très-courte de ce théorème, que le cercle des neuf points d'un triangle est tangent au cercle inscrit.

Théorème XXX. — *Le centre des moyennes distances des sommets d'un quadrilatère qui se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux coniques décrit une conique : les deux diagonales sont les rayons homologues de deux faisceaux en involution.*

En effet, les deux diagonales passent par un point fixe, et leurs milieux décrivent une même conique, la droite qui joint ces milieux passant par un point fixe.

Théorème XXXI. — *Quand un polygone se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux coniques ayant un foyer commun, la somme des cosinus des angles formés avec une droite fixe par les rayons vecteurs qui sont de ce foyer aux divers sommets reste constante. La somme des inverses de ces rayons vecteurs est constante. La somme des cosinus des angles formés par deux rayons vecteurs pris de p en p reste constante; cette somme varie d'ailleurs avec la valeur de p.*

Ces théorèmes sont des conséquences des théorèmes XI, XII, XIII.

RÉSUMÉ.

Nous avons ramené le problème proposé à l'étude d'un système d'équations particulier qui résout la question et donne la condition cherchée sans aucune élimination, et par des calculs successifs; il est important de remarquer que les relations cherchées étant trouvées pour tous les polygones dont le nombre des côtés est inférieur à n, la relation analogue relative au polygone de n côtés se déduit des relations précédentes. Nous avons indiqué de quelle *équation aux différences finies* dépend la solution du problème en fonction directe du nombre des côtés. Nos formules comprennent, d'ailleurs, comme cas particulier, les polygones réguliers. Nous avons démontré un théorème nouveau (théorème V), qui nous a donné un grand nombre de conséquences formant la seconde Partie de notre travail. Nous nous proposons de faire une étude plus approfondie des équations fondamentales, qui paraissent devoir donner lieu à des recherches dignes d'intérêt.