JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

VILLIÉ

Sur l'équilibre relatif d'une masse fluide soumise à l'action de corps quelconques

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 4 (1878), p. 257-264.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1878_3_4__257_0>

Sur l'équilibre relatif d'une masse fluide soumise à l'action de corps quelconques;

Par M. VILLIÉ,

Ingénieur des Mines,
Professeur à l'Université catholique de Lille.

1. Considérons un corps solide en mouvement, et supposons qu'une masse fluide, accompagnant ce corps solide, conserve une position fixe et une distribution invariable des masses de ses divers points, relativement à ce corps solide; nous supposerons que cet équilibre relatif a lieu dans le cas le plus général que nous présente la nature, c'est-à-dire sous l'influence des actions du corps solide, de la masse fluide sur les points de son intérieur, et de corps extérieurs quelconques, soumis à la seule condition de déterminer le mouvement propre de la masse fluide considérée, de façon à assurer l'équilibre de cette masse liquide ou gazeuse.

S'il s'agit, par exemple, du globe terrestre, les conditions dans lesquelles nous nous sommes placés reviendraient à supposer qu'il n'y a ni vents, ni marées. Les conséquences que nous tirerons de l'étude du problème actuel devront donc s'appliquer à peu près à notre planète, sans quoi il y aurait des déplacements, non plus simplement faibles et périodiques, mais très-importants de la masse fluide qui l'entoure.

2. Rapportons le système en mouvement à trois axes rectangulaires fixes dans l'espace OX, OY, OZ, et considérons trois autres axes également rectangulaires ox, oy, oz fixes, par rapport au corps en mouvement que nous considérons; soient G l'accélération, et ξ, η, ζ les

coordonnées de O, point qui sera, par exemple, le centre de gravité de l'ensemble du corps et de la masse fluide qui l'accompagne.

Chaque élément fluide dont il s'agit est en équilibre sous l'action des forces suivantes :

1° La pression P de la masse fluide, au point (X, Y, Z), pression qui, de même que la densité ρ, au même point, est supposée ne dépendre que des trois variables x, y, z, lesquelles sont indépendantes du temps t;

2° L'attraction du corps solide qu'entoure la masse fluide;

3° L'attraction de cette dernière masse sur le point que l'on considère à son intérieur;

4° L'attraction des corps extérieurs en mouvement;

5° La force d'inertie résultant du mouvement du point dont il s'agit.

3. Appelons

f le coefficient de l'attraction universelle;

V le potentiel de l'action du corps considéré sur les points extérieurs;

V′ le potentiel de l'action de la masse fluide sur les points de son intérieur;

$V_1, V_2, \ldots, V_n$ les potentiels des actions des corps extérieurs $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Pour l'équilibre, il faut et il suffit que l'on ait en chaque point

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{dP}{dX} &= f\left(\frac{dV}{dX}+\frac{dV'}{dX}+\sum\frac{dV_n}{dX}\right)-\frac{d^2X}{dt^2},\\ \frac{1}{\rho}\frac{dP}{dY} &= f\left(\frac{dV}{dY}+\frac{dV'}{dY}+\sum\frac{dV_n}{dY}\right)-\frac{d^2Y}{dt^2},\\ \frac{1}{\rho}\frac{dP}{dZ} &= f\left(\frac{dV}{dZ}+\frac{dV'}{dZ}+\sum\frac{dV_n}{dZ}\right)-\frac{d^2Z}{dt^2}.\end{aligned}\right.$$

On a, d'ailleurs, entre les coordonnées d'un même point dans les deux systèmes, les équations

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= \xi + ax + by + cz,\\ Y &= \eta + a'x + b'y + c'z,\\ Z &= \zeta + a''x + b''y + c''z,\end{aligned}\right.$$

qui donnent, à l'aide de deux différentiations successives et en tenant compte de la constance des coordonnées x, y et z,

$$\frac{d^2X}{dt^2}=\frac{d^2\xi}{dt^2}+x\frac{d^2a}{dt^2}+y\frac{d^2b}{dt^2}+z\frac{d^2c}{dt^2},$$
$$\frac{d^2Y}{dt^2}=\frac{d^2\eta}{dt^2}+x\frac{d^2a'}{dt^2}+y\frac{d^2b'}{dt^2}+z\frac{d^2c'}{dt^2},$$
$$\frac{d^2Z}{dt^2}=\frac{d^2\zeta}{dt^2}+x\frac{d^2a''}{dt^2}+y\frac{d^2b''}{dt^2}+z\frac{d^2c''}{dt^2}.$$

Les équations de l'équilibre peuvent donc s'écrire

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dX}&=f\left(\frac{dV}{dX}+\frac{dV'}{dX}+\sum\frac{dV_n}{dX}\right)-\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}+x\frac{d^2a}{dt^2}+y\frac{d^2b}{dt^2}+z\frac{d^2c}{dt^2}\right),\\
\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dY}&=f\left(\frac{dV}{dY}+\frac{dV'}{dY}+\sum\frac{dV_n}{dY}\right)-\left(\frac{d^2\eta}{dt^2}+x\frac{d^2a'}{dt^2}+y\frac{d^2b'}{dt^2}+z\frac{d^2c'}{dt^2}\right),\\
\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dZ}&=f\left(\frac{dV}{dZ}+\frac{dV'}{dZ}+\sum\frac{dV_n}{dZ}\right)-\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2}+x\frac{d^2a''}{dt^2}+y\frac{d^2b''}{dt^2}+z\frac{d^2c''}{dt^2}\right).
\end{aligned}\right.$$

Les quantités ρ et P sont fonctions de t et des coordonnées X, Y, Z, qui dépendent elles-mêmes, en vertu des formules (2), de x, y, z et t; en les considérant comme des fonctions composées, dépendant seulement, en définitive, de x, y et z, et en différentiant P par rapport à chacune de ces dernières variables, il viendra

$$\frac{dP}{dx}=\frac{dP}{dX}\frac{dX}{dx}+\frac{dP}{dY}\frac{dY}{dx}+\frac{dP}{dZ}\frac{dZ}{dx},$$

ou

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{dP}{dx}&=a\frac{dP}{dX}+a'\frac{dP}{dY}+a''\frac{dP}{dZ},\\
\frac{dP}{dy}&=b\frac{dP}{dX}+b'\frac{dP}{dY}+b''\frac{dP}{dZ},\\
\frac{dP}{dz}&=c\frac{dP}{dX}+c'\frac{dP}{dY}+c''\frac{dP}{dZ}.
\end{aligned}\right.$$

On aurait des formules analogues pour les dérivées de V, V', V_1, V_2, ..., V_n. Cela posé, si l'on ajoute les équations (3) respectivement multipliées, soit par a, a', a'', soit par b, b', b'', soit enfin par c, c', c'', on aura trois nouvelles équations évidemment équivalentes à (3), et qui seront, eu égard aux équations (4) et aux relations

$$a\frac{d^2\xi}{dt^2}+a'\frac{d^2\eta}{dt^2}+a''\frac{d^2\zeta}{dt^2}=G_x,$$

$$b\frac{d^2\xi}{dt^2}+b'\frac{d^2\eta}{dt^2}+b''\frac{d^2\zeta}{dt^2}=G_y,$$

$$c\frac{d^2\xi}{dt^2}+c'\frac{d^2\eta}{dt^2}+c''\frac{d^2\zeta}{dt^2}=G_z,$$

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx}&=f\left(\frac{dV}{dx}+\frac{dV'}{dx}+\sum\frac{dV_n}{dx}\right)-G_x-x\left(a\frac{d^2a}{dt^2}+a'\frac{d^2a'}{dt^2}+a''\frac{d^2a''}{dt^2}\right)\\&\quad-y\left(a\frac{d^2b}{dt^2}+a'\frac{d^2b'}{dt^2}+a''\frac{d^2b''}{dt^2}\right)-z\left(a\frac{d^2c}{dt^2}+a'\frac{d^2c'}{dt^2}+a''\frac{d^2a''}{dt^2}\right),\\\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dy}&=f\left(\frac{dV}{dy}+\ldots\right)-G_y-x\left(b\frac{d^2a}{dt^2}+\ldots\right)\\&\quad-y\left(b\frac{d^2b}{dt^2}+\ldots\right)-z\left(b\frac{d^2c}{dt^2}+\ldots\right),\\\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dz}&=f\left(\frac{dV}{dz}+\ldots\right)-G_z-x\left(c\frac{d^2a}{dt^2}+\ldots\right)\\&\quad-y\left(c\frac{d^2b}{dt^2}+\ldots\right)-z\left(c\frac{d^2c}{dt^2}+\ldots\right).\end{aligned}\right.$$

Différentions les équations (5), respectivement par rapport à x, y et z, il vient

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{1}{\rho}\frac{d^2P}{dx^2}-\frac{1}{\rho^2}\frac{dP}{dx}\frac{d\rho}{dx}&=f\left(\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V'}{dx^2}+\sum\frac{d^2V_n}{dx^2}\right)\\&\quad-\left(a\frac{d^2a}{dt^2}+a'\frac{d^2a'}{dt^2}+a''\frac{d^2a''}{dt^2}\right),\\\frac{1}{\rho}\frac{d^2P}{dy^2}-\frac{1}{\rho^2}\frac{dP}{dy}\frac{d\rho}{dy}&=f\left(\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V'}{dy^2}+\sum\frac{d^2V_n}{dy^2}\right)\\&\quad-\left(b\frac{d^2b}{dt^2}+b'\frac{d^2b'}{dt^2}+b''\frac{d^2b''}{dt^2}\right),\\\frac{1}{\rho}\frac{d^2P}{dz^2}-\frac{1}{\rho^2}\frac{dP}{dz}\frac{d\rho}{dz}&=f\left(\frac{d^2V}{dz^2}+\frac{d^2V'}{dz^2}+\sum\frac{d^2V_n}{dz^2}\right)\\&\quad-\left(c\frac{d^2c}{dt^2}+c'\frac{d^2c'}{dt^2}+c''\frac{d^2c''}{dt^2}\right).\end{aligned}\right.$$

Posons, pour abréger l'écriture, φ étant une fonction quelconque de x, y et z,

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=\Delta_2\varphi,$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2=(\Delta_1\varphi)^2,$$

et ajoutons les équations (6), nous aurons, en tenant compte des relations bien connues, $\Delta_2 V = 0$, $\Delta_2 V' = -4\pi\rho$, $\Delta_2 V_n = 0$,

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\rho\Delta_2 P - \left(\frac{dP}{dx}\frac{d\rho}{dx}+\frac{dP}{dy}\frac{d\rho}{dy}+\frac{dP}{dz}\frac{d\rho}{dz}\right)+4\pi f\rho^3\\ &\quad+\rho^2\left\{\begin{aligned} &a\frac{d^2a}{dt^2}+a'\frac{d^2a'}{dt^2}+a''\frac{d^2a''}{dt^2}\\ &+b\frac{d^2b}{dt^2}+b'\frac{d^2b'}{dt^2}+b''\frac{d^2b''}{dt^2}\\ &+c\frac{d^2c}{dt^2}+c'\frac{d^2c'}{dt^2}+c''\frac{d^2c''}{dt^2}\end{aligned}\right\}=0.\end{aligned}\right.$$

Or la relation

$$a^2+a'^2+a''^2=1$$

donne

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2+\left(\frac{da'}{dt}\right)^2+\left(\frac{da''}{dt}\right)^2+a\frac{d^2a}{dt^2}+a'\frac{d^2a'}{dt^2}+a''\frac{d^2a''}{dt^2}=0,$$

ce qui permet d'écrire comme suit le terme en ρ^2 de l'équation (7) :

$$-\rho^2\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{da}{dt}\right)^2+\left(\frac{da'}{dt}\right)^2+\left(\frac{da''}{dt}\right)^2\\ &+\left(\frac{db}{dt}\right)^2+\left(\frac{db'}{dt}\right)^2+\left(\frac{db''}{dt}\right)^2\\ &+\left(\frac{dc}{dt}\right)^2+\left(\frac{dc'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dc''}{dt}\right)^2\end{aligned}\right.$$

Or $a, a', a'', b, b', b'', c, c', c''$ sont les coordonnées, par rapport à des parallèles menées par o, des points situés sur les axes ox, oy et oz, à une distance de o égale à l'unité, et les dérivées de ces quantités sont les vitesses de c s trois points projetées sur oX, oY et oZ; il est donc permis pour les calculer d'introduire l'axe instantané du système xyz, pivotant autour de o. Soient donc ω_x, ω_y, ω_z les trois composantes de cette rotation ω dont la direction et la grandeur sont des fonctions du temps t; on a

$$\frac{da}{dt} = c\omega_Y - b\omega_Z, \quad \frac{da'}{dt} = c'\omega_Y - b'\omega_Z, \quad \frac{da''}{dt} = c''\omega_Y - b''\omega_Z,$$

d'où

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \left(\frac{da'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{da''}{dt}\right)^2 = \omega_Y^2 + \omega_Z^2.$$

L'équation (7) devient donc

$$(8) \qquad \rho\Delta_2 P - \left(\frac{dP}{dx}\frac{d\rho}{dx} + \frac{dP}{dy}\frac{d\rho}{dy} + \frac{dP}{dz}\frac{d\rho}{dz}\right) + 4\pi f\rho^3 - 2\rho^2\omega^2 = 0.$$

Telle est l'équation générale qui lie, indépendamment du mouvement de chaque point, la pression à la densité dans une masse fluide en équilibre relatif, dans les conditions générales dans lesquelles nous nous sommes placés; elle est à l'abri de toute hypothèse sur la nature du fluide et indépendante de l'action des corps extérieurs à cette masse fluide. Cette équation nous montre que la vitesse angulaire du système autour de son axe instantané de rotation passant par le centre de gravité doit être constante; c'est en effet la seule quantité qui, dans l'équation (8), pourrait être fonction du temps. Il peut être nécessaire, pour la conservation de l'équilibre, que la direction de cet axe varie, mais la vitesse angulaire devra toujours avoir la même valeur. Ainsi, en admettant que l'on puisse disposer à son gré de toutes les conditions du problème, *l'équilibre ne pourra jamais avoir lieu si la vitesse angulaire du système autour de son axe instantané de rotation n'est pas constante,* et cette constante est indépendante des corps extérieurs et des positions nécessaires de l'axe instantané de rotation autour duquel le système tourne.

4. Examinons spécialement le cas encore très-général où la température est constante et le fluide de constitution homogène; on a alors

$$(9) \qquad \rho = \varphi(P),$$

et, si nous ajoutons les équations (5) nécessaires et suffisantes pour l'équilibre, après les avoir multipliées respectivement par dx, dy et dz, le premier membre devient

$$\frac{1}{\varphi(P)}dP = d\psi(P),$$

c'est-à-dire la différentielle exacte d'une fonction de x, y et z, ce qui donne, puisque les termes fournis par la première parenthèse sont intégrables, les conditions nécessaires et suffisantes

$$a\frac{d^2b}{dt^2}+a'\frac{d^2b'}{dt^2}+a''\frac{d^2b''}{dt^2}=b\frac{d^2a}{dt^2}+b'\frac{d^2a'}{dt^2}+b''\frac{d^2a''}{dt^2},$$
$$b\frac{d^2c}{dt^2}+b'\frac{d^2c'}{dt^2}+b''\frac{d^2c''}{dt^2}=c\frac{d^2b}{dt^2}+c'\frac{d^2b'}{dt^2}+c''\frac{d^2b''}{dt^2},$$
$$c\frac{d^2a}{dt^2}+c'\frac{d^2a'}{dt^2}+c''\frac{d^2a''}{dt^2}=a\frac{d^2c}{dt^2}+a'\frac{d^2c'}{dt^2}+a''\frac{d^2c''}{dt^2}.$$

ou

$$(10)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[\left(a\frac{db}{dt}-b\frac{da}{dt}\right)+\left(a'\frac{db'}{dt}-b'\frac{da'}{dt}\right)+\left(a''\frac{db''}{dt}-b''\frac{da''}{dt}\right)\right]=0,\\&\frac{d}{dt}\left[\left(b\frac{dc}{dt}-c\frac{db}{dt}\right)+\left(b'\frac{dc'}{dt}-c'\frac{db'}{dt}\right)+\left(b''\frac{dc''}{dt}-c''\frac{db''}{dt}\right)\right]=0,\\&\frac{d}{dt}\left[\left(c\frac{da}{dt}-a\frac{dc}{dt}\right)+\left(c'\frac{da'}{dt}-a'\frac{dc'}{dt}\right)+\left(c''\frac{da''}{dt}-a''\frac{dc''}{dt}\right)\right]=0.\end{aligned}\right.$$

$$a\frac{db}{dt}-b\frac{da}{dt}=(a^2+b^2)\omega_Z-ac\,\omega_X-bc\,\omega_Y,$$
$$a'\frac{db'}{dt}-b'\frac{da'}{dt}=(a'^2+b'^2)\omega_Z-a'c'\omega_X-b'c'\omega_Y,$$
$$a''\frac{db''}{dt}-b''\frac{da''}{dt}=(a''^2+b''^2)\omega_Z-a''c''\omega_X-b''c''\omega_Y;$$

les équatious (10) reviennent donc à

$$\frac{d\omega_Z}{dt}=0,\quad\frac{d\omega_X}{dt}=0,\quad\frac{d\omega_Y}{dt}=0$$

ou

$$(11)\qquad \omega_X=A,\quad \omega_Y=B,\quad \omega_Z=C,$$

A, B et C étant des constantes, c'est-à-dire que, dans ce cas, un peu moins général que celui que nous avons traité tout d'abord, l'équilibre exige, outre la constance de la vitesse angulaire, que la position de l'axe instantané de rotation par rapport aux axes fixes ne change pas.

5. Voyons, en terminant, ce que devient, dans quelques cas plus particuliers, l'équation (8), qui peut servir à déterminer la pression en fonction de x, y et z.

Masse gazeuse. — On admet alors que la relation qui lie la pression à la densité est la suivante :

$$\rho = \frac{P}{K}, \tag{12}$$

K étant une constante, si, comme nous continuons à le supposer, la température ne varie pas; on a alors

$$K^2 P \Delta_2 P - K^2 (\Delta_1 P)^2 + 4\pi f P^3 - 2K\omega^2 P^2 = 0. \tag{13}$$

Masse liquide. — Si l'on suppose d'abord ce liquide incompressible, c'est-à-dire de densité constante, l'équation (8) devient

$$\Delta_2 P = 2\rho(\omega^2 - 2\pi f \rho). \tag{14}$$

C'est l'équation à laquelle satisferait le potentiel de l'action de la masse fluide considérée sur les points de son intérieur, si celle-ci avait pour densité constante

$$\rho_1 = f\rho^2 - \frac{\rho\omega^2}{2\pi};$$

enfin, si le liquide est compressible, on peut admettre, pour la relation qui lie la pression à la densité, la formule

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + KP_0}(1 + KP) = \frac{1 + KP}{\alpha}, \tag{15}$$

autrement dit, supposer la contraction proportionnelle à la pression; l'équation (8) devient alors

$$\alpha^2 (1 + KP)\Delta_2 P - \alpha K (\Delta_1 P)^2 + 4\pi f (1 + KP)^3 - 2\omega^2 \alpha (1 + KP)^2 = 0,$$

ou, en posant $1 + KP = KP_1$,

$$\alpha^2 P_1 \Delta_2 P_1 - \alpha^2 (\Delta P_1)^2 + 4\pi f K^2 P_1^3 - 2\omega^2 \alpha K P_1^2 = 0, \tag{16}$$

équation qui a beaucoup d'analogie avec l'équation (13), qui caractérise les corps gazeux.