JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LAGUERRE

Sur les courbes de troisième classe

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 4 (1878), p. 213-224.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1878_3_4__213_0>

Sur les courbes de troisième classe;

PAR M. LAGUERRE.

I.

1. Soit une courbe de troisième classe $\mathfrak{K}^3 = K^6$, représentée par l'équation tangentielle $F(u, v, w) = 0$; si l'on pose

$$F(\mu, -\lambda, \lambda y - \mu x) = U(\lambda, \mu),$$

l'équation $U(\lambda, \mu) = 0$ est l'équation mixte de la courbe.

En posant $U = (a, b, c, d)$, je prendrai, pour forme canonique de U, l'expression réduite $a\lambda^3 + d\mu^3$; de plus, je représenterai par (A, B, C) le hessien H de U, en sorte que l'on aura

$$A = ac - b^2, \quad 2B = ad - bc, \quad C = bd - c^2.$$

La courbe $\mathfrak{K}^3$ est une courbe du sixième ordre K^6, dont l'équation cartésienne s'obtient en égalant à zéro le discriminant Δ de la forme U. En adoptant les notations de mon *Mémoire sur l'application de la théorie des formes binaires à la Géométrie analytique* [*], je représenterai par Θ le contrevariant de F, qui, égalé à zéro, donne l'équation de la cayleyenne G^3 de $\mathfrak{K}^3$

2. En désignant respectivement par

$$\Pi = (\alpha, \beta, \gamma) = 0 \quad \text{et} \quad \varpi = \lambda q - \mu p = 0$$

---

[*] *Journal de Mathématiques*, 3e série, t. I. Les renvois à ce Mémoire sont indiqués par la désignation (F. B.).

l'équation mixte de la conique polaire de la droite de l'infini et l'équation mixte du pôle de cette droite relativement à $\mathfrak{K}^3$, les formules (6) et (11) du Mémoire déjà cité donnent immédiatement, en posant

$$\frac{1}{6}\frac{d\Delta}{dy} = \Delta_1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{6}\frac{d\Delta}{dx} = -\Delta_2 \text{ [*]},$$

le système de formules suivant :

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= a\Delta_1 + b\Delta_2 - 2A\Theta, \\ \Delta\beta &= b\Delta_1 + c\Delta_2 - 2B\Theta, \\ \Delta\gamma &= c\Delta_1 + d\Delta_2 - 2C\Theta; \end{aligned}$$

ou, sous forme canonique (1),

$$\Delta\alpha = a\Delta_1, \quad \Delta\beta = -a d\Theta, \quad \Delta\gamma = d\Delta_2,$$

puis

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{llll} \dfrac{da}{dx} = 0, & \dfrac{db}{dx} = -\alpha, & \dfrac{dc}{dx} = -2\beta, & \dfrac{d^2 d}{dx} = -3\gamma, \\ \dfrac{da}{dy} = 3\alpha, & \dfrac{db}{dy} = 2\beta, & \dfrac{dc}{dy} = \gamma, & \dfrac{d^2 d}{dy} = 0; \end{array} \right.$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{d\alpha}{dx} = 0, & \dfrac{d\beta}{dx} = -q, & \dfrac{d\gamma}{dx} = 2p, \\ \dfrac{d\alpha}{dy} = 2q, & \dfrac{d\beta}{dy} = -p, & \dfrac{d\gamma}{dy} = 0. \end{array} \right.$$

J'y joindrai encore les formules suivantes, que l'on déduit facilement des précédentes, et que j'écris sous forme canonique, en y faisant b et c égaux à zéro :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{dA}{dx} = -2a\beta, & 2\dfrac{dB}{dx} = -3a\gamma, & \dfrac{dC}{dx} = -d\alpha, \\ \dfrac{dA}{dy} = a\gamma, & 2\dfrac{dB}{dy} = 3d\alpha, & \dfrac{dC}{dy} = 2d\beta. \end{array} \right.$$

---

[*] En général, Z désignant une fonction de x et de y du degré n, je poserai

$$Z_1 = \frac{1}{n}\frac{dZ}{dy}, \quad Z_2 = -\frac{1}{n}\frac{dZ}{dx}.$$

On en déduit l'expression de p et de q, en partant de l'identité

$$\Theta = A\gamma + 2B\beta + C\alpha, \qquad \text{(F. B., n° 18)}$$

qui, dérivée successivement par rapport à x et y, donne les deux relations

$$(5) \qquad 3\Theta_1 = adp + a\gamma^2 - d\alpha\beta, \quad 3\Theta_2 = -adq + d\alpha^2 - a\beta\gamma.$$

3. En représentant par $W(\lambda, \mu) = 0$ l'équation mixte de la hessienne $\mathfrak{H}^3$ de la courbe, on a, sous forme canonique (F.B., n° 9),

$$\begin{aligned} W = & \begin{vmatrix} a\lambda & 0 & \alpha\lambda + \beta\mu \\ 0 & d\mu & \beta\lambda + \gamma\mu \\ \alpha\lambda + \beta\mu & \beta\lambda + \gamma\mu & \lambda q - \mu p \end{vmatrix} \\ = & \, ad\lambda\mu(\lambda q - \mu p) - d\mu(\alpha\lambda + \beta\mu)^2 - a\lambda(\beta\lambda + \gamma\mu)^2, \end{aligned}$$

ou, en développant le second membre et en remplaçant p et q par leurs valeurs déduites des équations (5),

$$W = -3(\lambda\Theta_2 + \mu\Theta_1)\lambda\mu - 3\lambda\mu\beta(a\gamma\lambda + d\alpha\mu) - \beta^2(\alpha\lambda^3 + d\mu^3);$$

ou encore, en multipliant les deux membres par $a^2 d^2 = \Delta$, et en remplaçant α, β, γ par leurs valeurs,

$$\Delta W = 3ad\lambda\mu \frac{ad\lambda(\Theta\Delta^2 - \Delta\Theta_2) + ad\mu(\Theta\Delta_1 - \Delta\Theta_1)}{\Delta} - \Theta^2(a\lambda^3 + d\mu^3),$$

d'où, enfin, en passant de la forme canonique à la forme générale,

$$\Delta W = 6H(\lambda, \mu)\frac{(\Theta\Delta_1 - \Delta\Theta_1)(A\lambda + B\mu) + (\Theta\Delta_2 - \Delta\Theta_2)(B\lambda + C\mu)}{\Delta} - \Theta^2 U(\lambda, \mu).$$

Pour abréger, je poserai

$$(6) \quad \tfrac{1}{6}\Delta(\lambda\mathfrak{X} - \mu\mathfrak{Y}) = (\Theta\Delta_1 - \Delta\Theta_1)(A\lambda + B\mu) + (\Theta\Delta_2 - \Delta\Theta_2)(B\lambda + C\mu),$$

où $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ désignent des polynômes du cinquième degré en x et y, et l'équation mixte de la hessienne sera donnée par la formule suivante :

$$(7)\qquad \Delta W(\lambda,\mu) = H(\lambda,\mu)(\lambda\mathfrak{Y} - \mu\mathfrak{X}) - \Theta^2 U(\lambda,\mu).$$

4. L'équation mixte du pôle de la droite de l'infini étant

$$\varpi = \lambda q - \mu p = 0,$$

on déduit, des équations (5), la relation suivante :

$$(8)\quad \Delta^2\varpi = a\Delta_1^2\lambda + d\Delta_2^2\mu + ad[\lambda(\Theta\Delta_2 - 3\Delta\Theta_2) + \mu(\Theta\Delta_1 - 3\Delta\Theta_1)].$$

En désignant toujours par $\Pi = 0$ l'équation de la conique polaire de la droite de l'infini, par $\Pi_\omega = 0$ et $\varpi_\omega = 0$ les équations de la conique polaire et du pôle de la droite,

$$\omega = ux + vy + wz = 0,$$

on aura d'abord (F. B., n° 18),

$$(9)\qquad \Delta\Pi_\omega = a\mathfrak{x}\lambda^2 + d\mathfrak{y}\mu^2 - 2ad\omega\,\Theta\lambda\mu,$$

formule où j'ai posé, pour abréger,

$$\mathfrak{x} = -v\Delta + \omega\Delta_1,\quad \mathfrak{y} = u\Delta + \omega\Delta_2;$$

puis (F. B., n° 11),

$$\varpi_\omega = u\Pi_{\omega,2} - v\Pi_{\omega,1} + \omega(u\Pi_2 - v\Pi_1) + \omega^2\varpi.$$

Substituons, dans cette expression, les valeurs de ϖ, Π_1, Π_2, ..., tirées des relations précédentes, il viendra

$$\begin{aligned}\Delta^2\varpi_\omega = {} & a\lambda\mathfrak{x}^2 + d\mu\mathfrak{y}^2 - 2\omega\Theta ad(\lambda\mathfrak{y} + \mu\mathfrak{x}) \\ & + \omega^2 ad[\lambda(\Theta\Delta_2 - \Delta\Theta_2) + \mu(\Theta\Delta_1 - \Delta\Theta_1)],\end{aligned}$$

ou encore, en vertu de l'identité (6),

$$(11)\quad \Delta^2\varpi_\omega = a\lambda\mathfrak{x}^2 + d\mu\mathfrak{y}^2 - 2\omega\Theta ad(\lambda\mathfrak{y} + \mu\mathfrak{x}) + \frac{\omega^2\Delta}{3}(\lambda\mathfrak{Y} - \mu\mathfrak{X}).$$

II.

5. La courbe $\mathfrak{K}^3$ et sa hessienne $\mathfrak{H}^3$ déterminent un faisceau tangentiel ; en désignant, pour un instant, par $F_0(u, v, w) = 0$ l'équation tangentielle de la hessienne, et par ρ un paramètre arbitraire, l'une quelconque des courbes de ce faisceau a pour équation tangentielle $F + 6\rho F_0 = 0$; je la désignerai par la notation $\mathfrak{K}_\rho$. Son équation mixte étant $U_\rho = 0$, la relation (7) donne immédiatement

$$(10) \qquad \Delta U_\rho = 6\rho H(\lambda, \mu)(\lambda \mathfrak{Y} - \mu \mathfrak{X}) + (\Delta - 6\rho\Theta^2) U(\lambda, \mu).$$

Les deux courbes du sixième ordre K^6 et $(G^3)^2$ déterminent également un faisceau ponctuel; l'une quelconque des courbes de ce faisceau a pour équation

$$\Delta - 6\rho\Theta^2 = 0;$$

je la désignerai par la notation K_ρ, et je dirai que deux courbes des faisceaux (K_ρ) et $(\mathfrak{K}_\rho)$, données par la même valeur de ρ, sont *correspondantes*.

6. Cherchons d'abord la signification géométrique des polynômes $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ qui s'introduisent, comme on l'a vu, d'une façon si simple et si naturelle, dans la recherche de l'équation mixte de la hessienne.

Soit M un point du plan, dont les coordonnées soient x et y; par ce point passe une courbe du faisceau (K_ρ), la valeur du paramètre ρ correspondant à cette courbe étant déterminée par la relation

$$(12) \qquad \Delta - 6\rho\Theta^2 = 0.$$

Le coefficient angulaire $\frac{\mu'}{\lambda'}$ de la tangente menée, en ce point, à la courbe est donné par la relation

$$\frac{\mu'}{\lambda'} = \frac{\Delta^2 - 6\rho\Theta\Theta_2}{\Delta_1 - 6\rho\Theta\Theta_1}.$$

ou, si l'on remplace ρ par sa valeur déduite de l'équation (12),

$$\frac{\mu'}{\lambda'} = \frac{\Theta\Delta_2 - \Delta\Theta_2}{\Theta\Delta_1 - \Delta\Theta_1}.$$

De là et de l'équation (6) résulte l'identité suivante :

$$(13) \qquad \lambda\mathfrak{Y} - \mu\mathfrak{X} = \lambda'(A\lambda + B\mu) + \mu'(B\lambda + C\mu),$$

dont il est facile de voir la signification géométrique.

7. A cet effet, je remarque que, du point M, on peut mener à la courbe $\mathfrak{K}^3$ trois tangentes dont les coefficients angulaires sont déterminés par l'équation $U(\lambda, \mu) = 0$. L'équation $H(\lambda, \mu) = 0$ détermine également les coefficients angulaires de deux droites passant par le même point : je dirai que ces droites sont les *hessiennes du point* M *relativement à la courbe* $\mathfrak{K}^3$. Je dirai encore que la droite passant par le point M, et ayant pour coefficient angulaire $\frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}}$ est l'*axc de ce point relativement à la courbe*. Cela posé, de l'équation (12) résulte la proposition suivante :

Si en un point M *du plan on considère l'axe et les hessiennes de ce point relativement à cette courbe, la conjuguée harmonique de l'axe, relativement aux hessiennes, se confond avec la tangente, menée au point* M, *à la courbe du faisceau* K_ρ *qui passe en ce point.*

8. Imaginons qu'une droite se meuve tangentiellement à la courbe $\mathfrak{K}_\rho$; le lieu des intersections de cette droite avec sa conique polaire relativement à $\mathfrak{K}^3$ s'obtient en éliminant λ et μ entre l'équation mixte de $\mathfrak{K}_\rho$ et l'équation $H(\lambda, \mu) = 0$ (F. B., n° 7); ou bien, en vertu de l'équation (10), en éliminant λ et μ entre les équations

$$H(\lambda, \mu) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\Delta - 6\rho\Theta^2}{\Delta} U(\lambda, \mu) = 0.$$

Le résultat de l'élimination est évidemment

$$\Delta - 6\rho\Theta^2 = 0.$$

D'où la proposition suivante :

Si une droite se meut tangentiellement à une courbe du faisceau ($\mathfrak{K}_\rho$), *le lieu des points où elle rencontre sa conique polaire, relativement à* $\mathfrak{K}^3$, *est la courbe correspondante du faisceau* (K_ρ).

9. Soit un point M ayant pour coordonnées x et y, et situé sur la courbe K_ρ, comme l'on a

$$\Delta - 6\rho\Theta^2 = 0,$$

il résulte, de l'équation (10), que les coefficients angulaires des tangentes menées de ce point à la courbe $\mathfrak{K}_\rho$ sont déterminés par l'équation

$$H(\lambda, \mu)(\lambda\mathfrak{Y} - \mu\mathfrak{X}) = 0.$$

D'où ce théorème :

Les trois tangentes que, d'un point de la courbe $\mathfrak{K}_\rho$ *on peut mener à la courbe correspondante du faisceau* $(\mathfrak{K}_\rho)$, *se confondent avec l'axe et les hessiennes de ce point relativement à* $\mathfrak{K}^3$.

10. Considérons une courbe quelconque du faisceau $(\mathfrak{K}_\rho)$; une tangente à cette courbe rencontre la courbe correspondante du faisceau (K_ρ) en six points, dont deux sont situés sur la conique polaire de la tangente, relativement à $\mathfrak{K}^3$ (n° 8). On sait, d'ailleurs, en vertu de la proposition précédente, que, par chacun de ces six points, la tangente considérée est un axe ou une hessienne de ce point relativement à $\mathfrak{K}^3$. Il est clair qu'elle est une hessienne pour les deux points situés sur la conique polaire, et seulement pour ces points; elle est donc un axe pour les quatre autres. D'où les conséquences suivantes :

Toute tangente à une courbe du faisceau $(\mathfrak{K}_\rho)$ *rencontre la courbe correspondante du faisceau* (K_ρ) *en six points; deux de ces points sont situés sur la conique polaire de la tangente relativement à* $\mathfrak{K}^3$. *Chacun des quatre autres jouit de la propriété que son axe, relativement à* $\mathfrak{K}^3$, *se confond avec la tangente considérée* [*].

L'enveloppe des axes, relativement à $\mathfrak{K}^3$, *des divers points d'une courbe quelconque du faisceau* (K_ρ), *est la courbe correspondante du faisceau* $(\mathfrak{K}_\rho)$.

---

[*] Des théorèmes corrélatifs ont évidemment lieu relativement aux courbes du troisième ordre; j'ai déjà donné sans démonstration ces théorèmes dans une Note *Sur les courbes du troisième ordre*, insérée dans le *Bulletin de la Société mathématique*, t. IV, p. 110.

11. Considérons un point M du plan ayant pour coordonnées ξ et η; l'équation de sa droite polaire, relativement à la courbe K^6, a pour équation

$$\omega = x\frac{d\Delta}{d\xi} + y\frac{d\Delta}{d\eta} + z\frac{d\Delta}{d\zeta} = 0.$$

Relativement à cette droite, on a

$$u = \frac{d\Delta}{d\xi}, \quad v = \frac{d\Delta}{d\eta} \quad \text{et} \quad w = \frac{d\Delta}{d\zeta},$$

et, par suite,

$$6\mathfrak{x} = \left(x\frac{d\Delta}{d\xi} + y\frac{d\Delta}{d\eta} + z\frac{d\Delta}{d\zeta}\right)\frac{d\Delta}{dy} - 6\Delta\frac{d\Delta}{d\eta},$$

$$6\mathfrak{y} = -\left(x\frac{d\Delta}{d\xi} + y\frac{d\Delta}{d\eta} + z\frac{d\Delta}{d\zeta}\right)\frac{d\Delta}{dx} + 6\Delta\frac{d\Delta}{d\xi}.$$

On voit, par ces formules, que $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$ s'annulent pour $x = \xi$ et $y = \eta$.

Désignons par D la droite précédente, et par m son pôle, relativement à la courbe $\mathfrak{K}^3$; l'équation mixte de ce pôle est (n° 4),

$$\alpha\lambda\mathfrak{x}^2 + d\mu\mathfrak{y}^2 - 2\omega\Theta ad(\lambda\mathfrak{y} + \mu\mathfrak{x}) + \frac{\omega^2\Delta}{3}(\lambda\mathfrak{Y} - \mu\mathfrak{X}) = 0;$$

et le coefficient angulaire de la droite Mm est donné par la formule précédente, quand on y fait $x = \xi$ et $y = \eta$. Comme je l'ai fait voir, $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$ s'annulent alors, et le coefficient angulaire cherché est déterminé par l'équation $\lambda\mathfrak{Y} - \mu\mathfrak{X} = 0$, où x et y doivent être respectivement remplacés par ξ et η.

D'où la proposition suivante :

Étant donné un point quelconque du plan M, *si l'on désigne par* m *le pôle, relativement à* $\mathfrak{K}^3$, *de la droite polaire du point* M, *relativement à* K^6, *la droite* Mm *est l'axe du point* M, *relativement à* $\mathfrak{K}^3$.

III.

12. L'équation mixte de la polaire de la droite

$$\omega = ux + vy + wz = 0$$

est

$$a\mathfrak{x}\lambda^2 + d\mathfrak{y}\mu^2 - 2ad\omega\Theta\lambda\mu = 0.$$

Supposons, comme ci-dessus, que la droite considérée soit la polaire, relativement à K^6, du point dont les coordonnées sont ξ, η, ζ. Les coefficients angulaires des tangentes menées de ce point à la conique polaire de la droite sont déterminés par l'équation précédente quand on y fait $x = \xi$ et $y = \eta$. Les fonctions $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$ devenant alors identiquement nulles, l'équation se réduit à $H(\lambda, \mu) = 0$.

Donc :

Étant donné un point quelconque M *du plan, si l'on considère la droite polaire de ce point, relativement à la courbe* K^6, *puis la conique polaire de cette droite, relativement à la courbe* $\mathfrak{K}^3$, *les tangentes menées du point* M *à cette conique sont les hessiennes du point* M, *relativement à* $\mathfrak{K}^3$ [*].

13. Soit M un point du plan ayant pour coordonnées x et y. Supposons ce point placé sur la hessienne de $\mathfrak{K}^3$; on a alors $\Theta = 0$, et les coefficients angulaires des tangentes, menées du point M à la conique polaire de la droite $\omega = 0$, sont déterminés par les racines de l'équation

$$(14) \qquad a\mathfrak{x}\lambda^2 + d\mathfrak{y}\mu^2 = 0.$$

Il est facile d'interpréter géométriquement ce résultat. Désignons, pour un instant, par ξ, η, ζ les coordonnées courantes, et soit

$$\eta - y = k(x - \xi)$$

l'équation de la droite qui joint le point M au point où sa droite polaire, relativement à K^6, rencontre la droite $\omega = 0$.

---

[*] Il est à peine nécessaire de rappeler que $\mathfrak{K}^3$ et K^6 désignent la même courbe; la première notation étant employée quand on considère cette courbe comme étant de troisième classe, et la seconde quand on la considère comme étant du sixième degré.

Le coefficient k se déterminera en exprimant que les trois droites

$$\begin{gathered}
k\xi+\eta-\zeta(y+kx)=0,\\
\xi\frac{d\Delta}{dx}+\eta\frac{d\Delta}{dy}\zeta+\frac{d\Delta}{dz}=0,\\
u\xi+v\eta+w\zeta=0
\end{gathered}$$

se coupent en un même point.

Un calcul facile donne

$$k=\frac{6u\Delta-\omega\dfrac{d\Delta}{dx}}{\omega\dfrac{d\Delta}{dy}-6v\Delta}=\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}},$$

et de l'équation (14) résulte immédiatement la conséquence suivante :

Étant donnée une droite quelconque D *du plan, et étant pris arbitrairement un point* M *sur la cayleyenne de la courbe* $\mathfrak{K}^3$, *désignons par* m *le point où la droite* D *est rencontrée par la droite polaire du point* M, *relativement à* K^6. *Cela posé, les deux tangentes, que l'on peut du point* M *mener à la conique polaire de* D, *relativement à* $\mathfrak{K}^3$, *sont les deux droites qui constituent la conique polaire de la droite* Mm, *relativement aux trois tangentes que l'on peut mener du point* M *à la courbe* $\mathfrak{K}^3$.

IV.

14. Les coniques polaires, relativement à $\mathfrak{K}^3$, des diverses droites qui passent par un point donné M du plan, sont inscrites dans un quadrilatère dont les côtés ont pour pôle M. Soient ξ, η, ζ les coordonnées du point M ; il est facile d'obtenir en coordonnées cartésiennes l'équation des côtés de ce quadrilatère.

Considérons, en effet, les deux droites $x-\xi=0$ et $y-\eta=0$, qui se croisent au point M ; relativement à la première droite, on aura, en posant, pour abréger, $x-\xi=X$ et $y-\eta=Y$, $\omega=X$, $u=1$, $v=0$, et, par suite, $\mathfrak{x}=X\Delta_1$ et $\mathfrak{y}=\Delta+X\Delta_2$. Relativement à la seconde, on aura $\omega = \mathrm{Y}$, $u = 0$, $v = 1$ et, par suite,

$$\mathfrak{x} = -\Delta + \mathrm{Y}\Delta_1 \quad \text{et} \quad \mathfrak{y} = \mathrm{Y}\Delta_2;$$

je désignerai ces deux dernières expressions par $\mathfrak{x}'$ et par $\mathfrak{y}'$.

Cela posé, les équations mixtes des coniques polaires des droites $\mathrm{X} = 0$ et $\mathrm{Y} = 0$ sont respectivement

$$\frac{a\mathfrak{x}\lambda^2 + d\mathfrak{y}\mu^2 - 2ad\mathrm{X}\Theta\lambda\mu}{\Delta^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{a\mathfrak{x}'\lambda^2 + d\mathfrak{y}'\mu^2 - 2ad\mathrm{Y}\Theta\lambda\mu}{\Delta^2} = 0.$$

Si l'on représente par T le résultant de ces deux équations, il est clair que $\mathrm{T} = 0$ est l'équation des quatre tangentes communes aux polaires des diverses droites qui se croisent au point M.

Une formule bien connue donne

$$\begin{aligned}\Delta^4\mathrm{T} &= a^2d^2(\mathfrak{x}\mathfrak{y}' + \mathfrak{y}\mathfrak{x}' - 2ad\Theta^2\mathrm{XY})^2 \\ &\quad - 4(ad\mathfrak{x}\mathfrak{y} - \Delta\Theta^2\mathrm{X}^2)(ad\mathfrak{x}'\mathfrak{y}' - \Delta\Theta^2\mathrm{Y}^2) \\ &= a^2d^2(\mathfrak{x}\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}\mathfrak{x}')^2 + 4\Delta\Theta^2 ad(\mathrm{Y}\mathfrak{x} - \mathrm{X}\mathfrak{x}')(\mathrm{Y}\mathfrak{y} - \mathrm{X}\mathfrak{y}').\end{aligned}$$

En remplaçant $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}'$ et $\mathfrak{y}'$ par leurs valeurs données ci-dessus, un calcul facile donne

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}\mathfrak{x}' = \frac{\Delta}{6}\left(\xi\frac{d\Delta}{dx} + \eta\frac{d\Delta}{dy} + \zeta\frac{d\Delta}{dz}\right),$$
$$\mathrm{Y}\mathfrak{y} - \mathrm{X}\mathfrak{x}' = \mathrm{X}\Delta \quad \text{et} \quad \mathrm{Y}\mathfrak{y} - \mathrm{X}\mathfrak{y}' = \mathrm{Y}\Delta.$$

Il vient donc définitivement

$$(15) \qquad \Delta\mathrm{T} = \frac{1}{36}\left(\xi\frac{d\Delta}{dx} + \eta\frac{d\Delta}{dy} + \zeta\frac{d\Delta}{dz}\right)^2 + 4\,\Theta^2\mathrm{H}(\mathrm{X},\mathrm{Y}).$$

15. On peut donc remarquer que l'équation

$$\xi\frac{d\Delta}{dx} + \eta\frac{d\Delta}{dy} + \zeta\frac{d\Delta}{dz} = 0$$

représente la polaire P du point M, relativement à la courbe K^6. De l'équation (15) résulte que les quatre tangentes communes aux coniques polaires des droites qui se croisent au point M rencontrent la cayleyenne de $\mathfrak{K}^3$ aux points où cette courbe rencontre P, les neuf points de rebroussement de $\mathfrak{K}^3$ étant exceptés. Ces points de rencontre sont évidemment, d'ailleurs, au nombre de six, et chacun d'eux doit être compté deux fois.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Les tangentes communes aux coniques polaires des diverses droites qui se croisent en un point M *forment un quadrilatère dont les six sommets sont situés à la fois sur la cayleyenne et sur la première polaire du point* M, *relativement à la courbe* K^6.

16. Si l'on considère x, y et z comme des quantités données, coordonnées d'un point N du plan, et ξ, η, ζ comme des coordonnées variables, il est clair que l'équation

$$\frac{1}{36}\left(\xi\frac{d\Delta}{dx}+\eta\frac{d\Delta}{dy}+\zeta\frac{d\Delta}{dz}\right)^2+4\Theta^2\mathrm{H}(\mathrm{X},\mathrm{Y})=0$$

représente le lieu des pôles, relativement à $\mathfrak{K}^3$, des droites que l'on peut mener par le point N. On voit que ce lieu est une conique; l'équation $\mathrm{H}(\mathrm{X},\mathrm{Y})=0$ représente les hessiennes du point N. Donc :

Le lieu des pôles relativement à $\mathfrak{K}^3$ *des droites, qui passent par un point donné* N, *est une conique tangente aux deux hessiennes du point* N, *et la corde de contact est la polaire du point* N, *relativement à* K^6.

Si le point N est sur la cayleyenne, $\Theta = 0$, et l'équation précédente se réduit à son premier terme. Donc :

Le lieu des pôles relativement à $\mathfrak{K}^3$ *des droites, qui passent par un point donné de la cayleyenne de cette courbe, est la polaire de ce point relativement à* K^6.