JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. MOLINS

Sur de nouvelles classes de courbes algébriques gauches dont les arcs représentent exactement la fonction elliptique de première espèce à module quelconque

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 4 (1878), p. 187-212.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1878_3_4__187_0>

Sur de nouvelles classes de courbes algébriques gauches dont les arcs représentent exactement la fonction elliptique de première espèce à module quelconque ;

PAR M. H. MOLINS.

1. Dans un précédent Mémoire inséré au *Journal de Mathématiques* (2e série, t. XIX, p. 436-440), nous avons été amené à indiquer deux classes de courbes algébriques gauches dont les arcs possèdent cette propriété que, pour l'une de ses deux classes, ils s'expriment exactement par des arcs de cercle, et que pour l'autre ils représentent une fonction elliptique quelconque de deuxième espèce. Nous nous proposons maintenant de signaler de nouvelles classes de courbes algébriques gauches dont les arcs s'expriment par la fonction elliptique de première espèce à module quelconque. On connaît les courbes gauches découvertes par M. William Roberts, dont les arcs représentent les trois sortes de fonctions elliptiques [*], et celles indiquées par M. Hermite pour représenter la fonction de première espèce [**]. Les courbes dont nous nous occupons offrent cette particularité que, tout en représentant par leurs arcs une fonction elliptique quelconque de première espèce, elles conduisent à de nouvelles classes de courbes algébriques gauches dont les arcs s'expriment par des arcs de cercle ou par une fonction elliptique quelconque de deuxième espèce.

2. Considérons deux courbes rapportées à trois axes rectangulaires, et désignons-les par Σ et Σ'; admettons que chacune d'elles soit la

[*] *Journal de Mathématiques*, 1re série, t. IX, p. 155.
[**] *Cours d'Analyse*, Ire Partie, p. 419.

transformée de l'autre par rayons vecteurs réciproques, en prenant pour pôle de transformation l'origine O des coordonnées. Soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque M de la courbe Σ, et x', y', z' celles du point correspondant M' de la courbe Σ'; les deux rayons vecteurs OM, OM' sont liés par la relation $OM \times OM' = \lambda^2$, λ^2 étant le paramètre de transformation, que nous supposerons positif. On a, en outre, les relations

$$(1) \qquad x' = \frac{\lambda^2 x}{x^2+y^2+z^2}, \quad y' = \frac{\lambda^2 y}{x^2+y^2+z^2}, \quad z' = \frac{\lambda^2 z}{x^2+y^2+z^2}.$$

Supposons que la courbe Σ soit la courbe algébrique représentée par les équations

$$(2) \qquad \begin{cases} x = a\cos(p+1)\zeta + b\cos(p-1)\zeta, \\ y = a\sin(p+1)\zeta + b\sin(p-1)\zeta, \\ z = c\sin\zeta, \end{cases}$$

dans lesquelles ζ est une indéterminée et p un nombre commensurable quelconque. Ce nombre p peut d'ailleurs être supposé positif; car, s'il était négatif, on n'aurait qu'à changer le sens dans lequel on compte les y positifs, pour retomber sur les équations (2) où p est positif, sauf le changement de a en b, et réciproquement. De ces équations on déduit

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= a^2+b^2+2ab\cos 2\zeta + c^2\sin^2\zeta \\ &= (a+b)^2 - (4ab-c^2)\sin^2\zeta, \end{aligned}$$

ou bien

$$(3) \qquad x^2+y^2+z^2 = (a+b)^2\left[1 - \frac{4ab-c^2}{(a+b)^2}\sin^2\zeta\right].$$

En vertu des relations (1), les équations de la courbe Σ' seront

$$\begin{aligned} \frac{x'}{\lambda^2} &= \frac{a\cos(p+1)\zeta + b\cos(p-1)\zeta}{(a+b)^2-(4ab-c^2)\sin^2\zeta}, \\ \frac{y'}{\lambda^2} &= \frac{a\sin(p+1)\zeta + b\sin(p-1)\zeta}{(a+b)^2-(4ab-c^2)\sin^2\zeta}, \\ \frac{z'}{\lambda^2} &= \frac{c\sin\zeta}{(a+b)^2-(4ab-c^2)\sin^2\zeta}. \end{aligned}$$

Cette courbe Σ' sera d'ailleurs algébrique, de même que la courbe Σ, lorsque p sera commensurable.

3. Soient ds l'élément de l'arc de la courbe Σ, ds' l'élément de l'arc de la courbe Σ'; ces deux quantités sont liées par la relation

$$(4) \qquad ds' = \frac{\lambda^2 ds}{x^2+y^2+z^2}.$$

Les équations (2) donnent par la différentiation

$$\begin{aligned} dx &= -[a(p+1)\sin(p+1)\zeta + b(p-1)\sin(p-1)\zeta]d\zeta, \\ dy &= [a(p+1)\cos(p+1)\zeta + b(p-1)\cos(p-1)\zeta]d\zeta, \\ dz &= c\cos\zeta\, d\zeta, \end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned} ds^2 &= [a^2(p+1)^2 + b^2(p-1)^2 + 2ab(p^2-1)\cos 2\zeta + c^2\cos^2\zeta]d\zeta^2, \\ &= \{[p(a+b)+a-b]^2 + c^2 - [4ab(p^2-1)+c^2]\sin^2\zeta\}d\zeta^2, \end{aligned}$$

$$(5) \quad ds = d\zeta\sqrt{[p(a+b)+a-b]^2+c^2}\sqrt{1-\frac{4ab(p^2-1)+c^2}{[p(a+b)+a-b]^2+c^2}\sin^2\zeta}.$$

Substituant dans la formule (4) les valeurs de ds et $x^2+y^2+z^2$, données par les équations (3) et (5), on obtient

$$ds' = \frac{\lambda^2\sqrt{[p(a+b)+a-b]^2+c^2}}{(a+b)^2}\,\frac{\sqrt{1-\dfrac{4ab(p^2-1)+c^2}{[p(a+b)+a-b]^2+c^2}\sin^2\zeta}}{1-\dfrac{4ab-c^2}{(a+b)^2}\sin^2\zeta}\,d\zeta.$$

Établissons maintenant entre les constantes a, b, c et p la condition

$$(6) \qquad \frac{4ab(p^2-1)+c^2}{[p(a+b)+a-b]^2+c^2} = \frac{4ab-c^2}{(a+b)^2};$$

la formule précédente deviendra

$$ds' = \frac{\lambda^2\sqrt{[p(a+b)+a-b]^2+c^2}}{(a+b)^2}\,\frac{d\zeta}{\sqrt{1-\dfrac{4ab-c^2}{(a+b)^2}\sin^2\zeta}},$$

d'où

$$(7)\qquad s' = \frac{\lambda^2\sqrt{[p(a+b)+a-b]^2+c^2}}{(a+b)^2}\int_0^{\zeta}\frac{d\zeta}{\sqrt{1-\frac{4ab-c^2}{(a+b)^2}\sin^2\zeta}},$$

l'arc s' étant supposé compté à partir du point pour lequel $\zeta = 0$.

Admettons que la valeur de c tirée de la relation (6) soit réelle et que le rapport $\frac{4ab-c^2}{(a+b)^2}$ soit positif et moindre que l'unité : on voit par la formule (7) que l'arc s' s'exprimera par une fonction elliptique de première espèce ayant pour module $\frac{\sqrt{4ab-c^2}}{a+b}$. Or je vais démontrer qu'on peut toujours disposer des trois constantes a, b et p, dont la dernière restera commensurable, pour que les deux conditions dont il s'agit soient remplies ; je ferai voir en outre que le module $\frac{\sqrt{4ab-c^2}}{a+b}$ peut être supposé quelconque, d'où il résultera que toutes les fonctions elliptiques de première espèce se trouveront représentées par des arcs de courbes algébriques.

4. La relation (6), après quelques réductions faciles, peut se mettre sous la forme

$$c^4 + c^2\{[p(a+b)+a-b]^2+(a-b)^2\} - 8ab[p(a^2-b^2)+a^2+b^2] = 0,$$

ou bien

$$\frac{c^4}{a^4}+\frac{c^2}{a^2}\left\{\left[p\left(1+\frac{b}{a}\right)+1-\frac{b}{a}\right]^2+\left(1-\frac{b}{a}\right)^2\right\}-8\frac{b}{a}\left[p\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)+1+\frac{b^2}{a^2}\right]=0.$$

Le nombre p étant supposé positif, si l'on choisit a et b de manière que $\frac{b}{a}$ soit une fraction positive, le terme $-8\frac{b}{a}\left[p\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)+1+\frac{b^2}{a^2}\right]$ sera négatif et par conséquent les deux valeurs de $\frac{c^2}{a^2}$ déduites de l'équation précédente seront réelles ; l'une d'elles sera positive et l'autre négative. En outre, comme le coefficient de $\frac{c^2}{a^2}$ est positif, la valeur positive de $\frac{c^2}{a^2}$ sera numériquement la plus petite. On trouve pour cette valeur positive

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{c^2}{a^2} = -\frac{1}{2}\left[p\left(1+\dfrac{b}{a}\right)+1-\dfrac{b}{a}\right]^2 - \frac{1}{2}\left(1-\dfrac{b}{a}\right)^2 \\ \qquad + \frac{1}{2}\left(1+\dfrac{b}{a}\right)\sqrt{p^2\left[p+2+(p-2)\dfrac{b}{a}\right]^2+4\left[p+1-(p-1)\dfrac{b}{a}\right]^2}. \end{cases}$$

Or la relation (6), mise sous la forme

$$(9)\qquad \frac{4ab-c^2}{(a+b)^2} = \frac{4abp^2}{[p(a+b)+a-b]^2+(a+b)^2+c^2},$$

montre d'abord que, si l'on met pour c^2 la valeur positive déterminée par la formule (8), le rapport $\frac{4ab-c^2}{(a+b)^2}$ est positif, comme étant égal à un autre rapport nécessairement positif. En second lieu, il est moindre que l'unité, c'est-à-dire qu'on a $(a+b)^2 > 4ab - c^2$, inégalité évidente puisqu'elle revient à $(a-b)^2+c^2 > 0$. Ainsi le rapport $\frac{4ab-c^2}{(a+b)^2}$ est rendu positif et moindre que l'unité par la valeur positive de c^2, en sorte que cette valeur de c^2 est admissible; donc toute valeur positive et moindre que l'unité de $\frac{b}{a}$, jointe à la valeur positive de $\frac{c^2}{a^2}$ qui y correspond, donne lieu à un arc s' de courbe algébrique Σ', lequel s'exprime par une fonction elliptique de première espèce.

Si l'on faisait $\frac{b}{a} = 1$, la valeur positive de $\frac{c^2}{a^2}$ serait

$$\frac{c^2}{a^2} = -2p^2 + 2\sqrt{p^4+4};$$

par suite le rapport $\frac{4ab-c^2}{(a+b)^2}$ deviendrait

$$\frac{4ab-c^2}{(a+b)^2} = \frac{1}{2}\left(2+p^2-\sqrt{p^4+4}\right),$$

et l'on vérifie immédiatement que c'est une fraction positive, quel que soit p.

5. Il reste à démontrer que, par une valeur convenable attribuée

au nombre commensurable p, on peut rendre le rapport $\frac{4ab-c^2}{(a+b)^2}$ égal à une fraction positive quelconque. Posons donc

$$\frac{4ab-c^2}{(a+b)^2}=k^2, \tag{10}$$

k étant une fraction donnée : c'est la condition à laquelle il s'agit de satisfaire. On devra avoir aussi, en vertu de la relation (9),

$$\frac{4abp^2}{[p(a+b)+a-b]^2+(a+b)^2+c^2}=k^2. \tag{11}$$

Les équations (10) et (11) donnent

$$c^2=4ab-k^2(a+b)^2,$$
$$c^2=\frac{4abp^2}{k^2}-[p(a+b)+a-b]^2-(a+b)^2;$$

par suite

$$4ab-k^2(a+b)^2=\frac{4abp^2}{k^2}-[p(a+b)+a-b]^2-(a+b)^2,$$

ou bien

$$4ab\left(1-\frac{p^2}{k^2}\right)+(1-k^2)(a+b)^2+[p(a+b)+a-b]^2=0.$$

Posant $\frac{b}{a}=t$, on obtient

$$4t\left(1-\frac{p^2}{k^2}\right)+(1-k^2)(1+t)^2+[p(1+t)+1-t]^2=0,$$

ou enfin

$$[(p-1)^2+1-k^2]t^2-2(p^2-k^2)\left(\frac{2}{k^2}-1\right)t+1-k^2+(p+1)^2=0. \tag{12}$$

Pour que les racines de cette dernière équation soient réelles, il faut qu'on ait

$$(p^2-k^2)^2\left(\frac{2}{k^2}-1\right)^2-[(p-1)^2+1-k^2][1-k^2+(p+1)^2]>0,$$

ce qui revient, toutes réductions faites, à la condition

$$\frac{4p^2}{k^4}(1-k^2)(p^2-2k^2)>0.$$

On devra donc attribuer à p une valeur commensurable telle qu'on ait $p^2-2k^2>0$, ou $p>k\sqrt{2}$. Les deux racines seront en outre positives, puisque, p étant plus grand que k, le coefficient de t dans l'équation (12), à savoir $-2(p^2-k^2)\left(\frac{2}{k^2}-1\right)$, est négatif, tandis que le coefficient de t^2 et le dernier terme sont positifs. On va démontrer maintenant que la plus petite des deux racines peut être supposée moindre que l'unité.

Faisons successivement $t=0$ et $t=1$ dans le premier membre de l'équation (12) : 1° pour $t=0$, ce premier membre devient

$$1-k^2+(p+1)^2,$$

quantité positive ; 2° pour $t=1$, il devient

$$(p-1)^2+1-k^2-2(p^2-k^2)\left(\frac{2}{k^2}-1\right)+1-k^2+(p+1)^2,$$

ou, en réduisant,

$$4\left[2-k^2-p^2\left(\frac{1}{k^2}-1\right)\right];$$

et, si l'on exprime que ce dernier résultat est négatif, on a

$$2-k^2-p^2\left(\frac{1}{k^2}-1\right)<0,$$

d'où

(13) $$p>k\sqrt{\frac{2-k^2}{1-k^2}}.$$

Donc, si l'on prend pour p un nombre commensurable supérieur à $k\sqrt{\frac{2-k^2}{1-k^2}}$, l'équation (12) aura une racine comprise entre zéro et 1; l'autre racine, qui est aussi positive, sera plus grande que l'unité.

D'ailleurs la condition (13) entraîne celle déjà trouvée $p > k\sqrt{2}$, qui exprime que les racines sont réelles, puisqu'on a $\sqrt{\frac{2-k^2}{1-k^2}} > \sqrt{2}$. C'est la racine comprise entre zéro et 1 qui sera la valeur choisie pour $\frac{b}{a}$.

Le cas où $k^2 = \frac{1}{2}$ mérite d'être remarqué. On obtient alors des courbes algébriques gauches dont l'arc s'exprime par la même fonction elliptique de première espèce que l'arc de la lemniscate. La condition (13) devient $p > \sqrt{\frac{3}{2}}$, et l'on peut faire, par exemple, $p = \frac{3}{2}$ ou $p = 2$.

6. La valeur de $\frac{b}{a}$ moindre que l'unité ayant été trouvée dans le cas où l'on se donne k, il y aura deux valeurs de $\frac{c^2}{a^2}$ qui y correspondront, l'une positive, l'autre négative, et elles seront déterminées par l'équation (6). Mais, de ces deux valeurs il n'y en aura évidemment qu'une seule qui puisse rendre le rapport $\frac{4ab - c^2}{(a+b)^2}$ égal à k^2; je vais faire voir que c'est la valeur positive qui possède cette propriété.

D'abord l'équation (12) détermine $\frac{b}{a}$ en fonction de k; puis, à l'aide de la valeur de $\frac{b}{a}$, on détermine $\frac{c^2}{a^2}$ par l'équation

$$\frac{4ab - c^2}{(a+b)^2} = \frac{4ab(p^2-1) + c^2}{[p(a+b) + a - b]^2 + c^2},$$

laquelle se déduit des deux conditions (10), (11), et revient à

$$\frac{4ab - c^2}{(a+b)^2} = \frac{4abp^2}{[p(a+b) + a - b]^2 + (a+b)^2 + c^2}.$$

Or, si l'on prend pour $\frac{c^2}{a^2}$ la valeur positive donnée par la formule (8), je dis qu'il résulte des équations précédentes que la valeur des deux rapports égaux

$$\frac{4ab - c^2}{(a+b)^2}, \quad \frac{4abp^2}{[p(a+b) + a - b]^2 + (a+b)^2 + c^2}$$

est égale à k^2.

Posons, en effet, $\frac{4ab - c^2}{(a+b)^2} = \mu$; on aura aussi

$$\frac{4abp^2}{[p(a+b)+a-b]^2+(a+b)^2+c^2} = \mu,$$

puisque ces deux rapports sont rendus égaux par la valeur de $\frac{c^2}{a^2}$; on en déduit

$$(a+b)^2 = \frac{4ab-c^2}{\mu}, \quad [p(a+b)+a-b]^2+(a+b)^2 = \frac{4abp^2}{\mu} - c^2.$$

Substituant ces expressions de

$$(a+b)^2 \quad \text{et} \quad [p(a+b)+a-b]^2+(a+b)^2$$

dans l'équation suivante:

$$4ab - k^2(a+b)^2 = \frac{4abp^2}{k^2} - [p(a+b)+a-b]^2 - (a+b)^2,$$

obtenue au n° 5 et qui est l'équivalente de l'équation (12), il vient

$$4ab - \frac{k^2}{\mu}(4ab - c^2) = \frac{4abp^2}{k^2} + c^2 - \frac{4abp^2}{\mu},$$

ce qui peut se mettre sous la forme

$$(\mu - k^2)\left[4\frac{b}{a}\left(\frac{p^2}{k^2} - 1\right) + \frac{c^2}{a^2}\right] = 0.$$

Mais on a

$$p > k\sqrt{\frac{2-k^2}{1-k^2}}, \quad \text{d'où} \quad \frac{p^2}{k^2} > \frac{2-k^2}{1-k^2}, \quad \frac{p^2}{k^2} - 1 > 0;$$

les trois quantités

$$\frac{b}{a}, \quad \frac{p^2}{k^2} - 1 \quad \text{et} \quad \frac{c^2}{a^2}$$

étant positives, l'expression

$$4\frac{b}{a}\left(\frac{p^2}{k^2} - 1\right) + \frac{c^2}{a^2}$$

l'est aussi, et dès lors l'équation précédente ne peut avoir lieu qu'autant que l'on a $\mu - k^2 = 0$ ou $\mu = k^2$, c'est-à-dire que la valeur positive de $\frac{c^2}{a^2}$ rend le rapport $\frac{4ab - c^2}{(a+b)^2}$ égal à k^2.

7. De ce résultat il faut conclure qu'on peut se servir, pour déterminer la valeur positive de $\frac{c^2}{a^2}$, de la relation

$$\frac{4ab - c^2}{(a+b)^2} = k^2,$$

qui donne

$$(14) \qquad \frac{c^2}{a^2} = 4\frac{b}{a} - k^2\left(1 + \frac{b}{a}\right)^2.$$

Quant à la valeur de $\frac{b}{a}$ qu'on doit substituer dans cette formule, c'est la plus petite racine de l'équation (12), laquelle est positive et moindre que l'unité, pourvu qu'on prenne $p > k\sqrt{\frac{2-k^2}{1-k^2}}$; on trouve pour cette racine

$$(15) \qquad \frac{b}{a} = \frac{(p^2 - k^2)\left(\frac{2}{k^2} - 1\right) - \frac{2p}{k^2}\sqrt{(1-k^2)(p^2 - 2k^2)}}{(p-1)^2 + 1 - k^2},$$

d'où

$$1 + \frac{b}{a} = \frac{2p}{k^2}\,\frac{p - k^2 - \sqrt{(1-k^2)(p^2-2k^2)}}{(p-1)^2 + 1 - k^2}.$$

Portant ces valeurs de $\frac{b}{a}$ et $1 + \frac{b}{a}$ dans la formule (14), on obtient, toutes réductions faites,

$$\begin{aligned}\frac{c^2}{a^2} = {} & \frac{4}{k^2[(p-1)^2 + 1 - k^2]^2} \\ & \times\{4p^3(k^2 - 1) + p^2[4(1-k^2) - k^4] + 2k^2(2-k^2)p \\ & \quad - k^2(2-k^2)^2 + 2p(p-1)(2-k^2)\sqrt{(1-k^2)(p^2-2k^2)}\}.\end{aligned}$$

8. D'après ce qui précède, lorsqu'on se donne la valeur de k, supposée moindre que l'unité, on peut prendre arbitrairement le nombre commensurable p, pourvu qu'il satisfasse à la condition $p > k\sqrt{\frac{2-k^2}{1-k^2}}$.

Réciproquement, si l'on se donne p, la même condition devra être satisfaite par une valeur de k moindre que l'unité; mais elle peut alors se mettre sous une forme plus commode. On en déduit, en effet,

$$p^2(1-k^2) > k^2(2-k^2), \quad \text{ou} \quad k^4-(p^2+2)k^2+p^2 > 0,$$

d'où

$$\left(\frac{p^2+2}{2}-k^2\right)^2 > \frac{1}{4}(p^4+4),$$

et enfin

$$k^2 < \frac{1}{2}\left(p^2+2-\sqrt{p^4+4}\right).$$

La quantité $\frac{1}{2}(p^2+2-\sqrt{p^4+4})$ est d'ailleurs positive et moindre que l'unité, quel que soit p. Ainsi, en se donnant p, on pourra attribuer à k une valeur quelconque inférieure à la racine carrée de cette quantité. Si l'on fait, par exemple, $p=1$, on devra avoir $k^2 < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

9. Les valeurs des rapports $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$ étant supposées connues, les courbes Σ', dont les arcs s'expriment par la fonction elliptique de première espèce, se trouveront déterminées. La constante a restera arbitraire, et les constantes b et c se déduiront des rapports dont il s'agit. Quant au nombre commensurable p, il sera susceptible de recevoir un nombre infini de valeurs, et chaque valeur de p donnera lieu à une classe de courbes qui répondront à toutes les valeurs moindres que l'unité attribuées au rapport $\frac{b}{a}$; d'ailleurs, $\frac{b}{a}$ et p étant connus, $\frac{c}{a}$ n'aura qu'une seule valeur correspondante, qu'on obtiendra à l'aide de la formule (8).

Nous remarquerons encore que, pour un même système de valeurs de $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ et p, on aura un nombre infini de courbes homothétiques, répondant à toutes les valeurs particulières du paramètre a et ayant pour centre commun d'homothétie le point O. Cela résulte visiblement des expressions de x', y', z', en fonction de ζ, lesquelles sont homogènes par rapport à a, b, c.

10. Considérons maintenant une quelconque des courbes Σ'. On peut vouloir substituer aux expressions de x', y', z' en fonction de l'indéterminée ζ deux équations entre ces trois coordonnées; ce seront les équations de la courbe Σ'. Formons d'abord les équations de la courbe Σ, dont Σ' est la transformée, et qui est représentée par les équations (2). Nous nous bornerons à examiner le cas où p est un entier positif.

Les deux premières équations (2) donnent

$$x^2 + y^2 = (a+b)^2 - 4ab\sin^2\zeta;$$

par suite, en ayant égard à la troisième, qui donne $\sin\zeta = \frac{z}{c}$,

$$(16)\qquad x^2 + y^2 + \frac{4ab}{c^2}z^2 = (a+b)^2;$$

c'est l'une des équations de la courbe Σ, et l'on voit qu'elle représente un ellipsoïde de révolution ou un hyperboloïde de révolution à une nappe, selon que a et b sont de même signe ou de signes contraires.

Pour obtenir une autre équation de la même courbe, posons

$$u^2 = x^2 + y^2.$$

Il vient

$$u^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos 2\zeta,$$

d'où

$$\cos 2\zeta = \frac{u^2 - a^2 - b^2}{2ab}, \quad \sin 2\zeta = \frac{1}{2ab}\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - u^2)^2},$$

$$a + b\cos 2\zeta = \frac{u^2 + a^2 - b^2}{2a}, \quad \operatorname{tang}\zeta = \sqrt{\frac{(a+b)^2 - u^2}{u^2 - (a-b)^2}}.$$

On a en outre les formules suivantes :

$$\frac{\sin(p+1)\zeta}{\cos^{p+1}\zeta} = (p+1)\operatorname{tang}\zeta - \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3}\operatorname{tang}^3\zeta + \ldots,$$

$$\frac{\cos(p+1)\zeta}{\cos^{p+1}\zeta} = 1 - \frac{(p+1)p}{1.2}\operatorname{tang}^2\zeta + \frac{(p+1)p(p-1)(p-2)}{1.2.3.4}\operatorname{tang}^4\zeta - \ldots$$

qui deviennent, en remplaçant $\operatorname{tang}\zeta$ par sa valeur en u,

$$\frac{\sin(p+1)\zeta}{\cos^{p+1}\zeta} = \sqrt{\frac{(a+b)^2 - u^2}{u^2 - (a-b)^2}}\left[p + 1 - \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3}\,\frac{(a+b)^2 - u^2}{u^2 - (a-b)^2} + \ldots\right],$$

$$\frac{\cos(p+1)\zeta}{\cos^{p+1}\zeta} = 1 - \frac{(p+1)p}{1.2}\,\frac{(a+b)^2 - u^2}{u^2 - (a-b)^2} + \frac{(p+1)p(p-1)(p-2)}{1.2.3.4}\left[\frac{(a+b)^2 - u^2}{u^2 - (a-b)^2}\right]^2 - \ldots.$$

Faisons

$$A = p + 1 - \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3}\frac{(a+b)^2-u^2}{u^2-(a-b)^2} + \frac{(p+1)p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3.4.5}\left[\frac{(a+b)^2-u^2}{u^2-(a-b)^2}\right]^2 - \ldots,$$

$$B = 1 - \frac{(p+1)p}{1.2}\frac{(a+b)^2-u^2}{u^2-(a-b)^2} + \frac{(p+1)p(p-1)(p-2)}{1.2.3.4}\left[\frac{(a+b)^2-u^2}{u^2-(a-b)^2}\right]^2 - \ldots;$$

il vient

$$\sin(p+1)\zeta = A\cos^{p+1}\zeta\sqrt{\frac{(a+b)^2-u^2}{u^2-(a-b)^2}},$$
$$\cos(p+1)\zeta = B\cos^{p+1}\zeta.$$

Maintenant, des deux premières équations (2) on déduit

$$\frac{y}{x} = \frac{a\sin(p+1)\zeta + b\sin(p-1)\zeta}{a\cos(p+1)\zeta + b\cos(p-1)\zeta} = \frac{(a+b\cos2\zeta)\sin(p+1)\zeta - b\sin2\zeta\cos(p+1)\zeta}{(a+b\cos2\zeta)\cos(p+1)\zeta + b\sin2\zeta\sin(p+1)\zeta};$$

et si l'on met pour $\sin(p+1)\zeta$, $\cos(p+1)\zeta$ les expressions précédentes, et pour $a+b\cos2\zeta$, $\sin2\zeta$ leurs valeurs en fonction de u, on obtient l'équation suivante :

$$(17) \qquad \frac{y}{x} = \sqrt{\frac{(a+b)^2-u^2}{u^2-(a-b^2)}}\,\frac{A(u^2+a^2-b^2) - B[u^2-(a-b)^2]}{B(u^2+a^2-b^2) + A[(a+b)^2-u^2]},$$

qui est celle de la projection de la courbe Σ sur le plan xy, en concevant que u^2 soit remplacé par x^2+y^2.

Les équations de la courbe Σ' se déduiront des équations (16) et (17) de la courbe Σ, dont elle est la transformée, en y remplaçant x, y, z par les expressions

$$x = \frac{\lambda^2 x'}{x'^2+y'^2+z'^2}, \quad y = \frac{\lambda^2 y'}{x'^2+y'^2+z'^2}, \quad z = \frac{\lambda^2 z'}{x'^2+y'^2+z'^2}.$$

D'abord, au moyen de l'équation (16), on obtient la suivante :

$$(18) \qquad x'^2 + y'^2 + \frac{4ab}{c^2}z'^2 = \frac{(a+b)^2}{\lambda^4}(x'^2+y'^2+z'^2)^2;$$

puis, si l'on fait

$$r^2 = x'^2 + y'^2, \quad R^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

$$A' = p + 1 - \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3} \frac{(a+b)^2 R^4 - \lambda^4 r^2}{\lambda^4 r^2 - (a-b)^2 R^4} + \ldots,$$

$$B' = 1 - \frac{(p+1)p}{1.2} \frac{(a+b)R^4 - \lambda^4 r^2}{\lambda^4 r^2 - (a-b)^2 R^4} + \ldots$$

on trouve que l'équation (17) donne cette autre :

$$(19) \quad \frac{y'}{x'} = \sqrt{\frac{(a+b)^2 R^4 - \lambda^4 r^2}{\lambda^4 r^2 - (a-b)^2 R^4}} \, \frac{A'[\lambda^4 r^2 + (a^2-b^2)R^4] - B'[\lambda^4 r^2 - (a-b)^2 R^4]}{B'[\lambda^4 r^2 + (a^2-b^2)R^4] + A'[(a+b)^2 R^4 - \lambda^4 r^2]}.$$

Ainsi les équations (18) et (19), où r^2 et R^2 doivent être remplacés par leurs expressions en x', y', z', sont celles de la courbe Σ'.

11. Appliquons ce qui précède au cas où $p = 1$. L'inégalité

$$k^2 < \frac{1}{2}\left(p^2 + 2 - \sqrt{p^4 + 4}\right)$$

devient $k^2 < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$; admettons que cette condition soit remplie. Les valeurs de $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$, données par les formules qui expriment ces quantités en fonction de p et k (n° 7), sont

$$\frac{b}{a} = \frac{2}{k^2\sqrt{1-k^2}}\left[(2-k^2)\sqrt{1-k^2} - 2\sqrt{1-2k^2}\right], \quad \frac{c}{a} = \frac{2k}{\sqrt{1-k^2}}.$$

Voyons ce que devient l'équation (19).

D'abord, en faisant $p = 1$ dans les expressions de A' et B', on trouve

$$A' = 2, \quad B' = 1 - \frac{(a+b)^2 R^4 - \lambda^4 r^2}{\lambda^4 r^2 - (a-b)^2 R^4} = \frac{2[\lambda^4 r^2 - (a^2+b^2)R^4]}{\lambda^4 r^2 - (a-b)^2 R^4};$$

par suite

$$\begin{aligned}
&A'[\lambda^4 r^2 + (a^2 - b^2)R^4] - B'[\lambda^4 r^2 - (a-b)^2 R^4] \\
&\quad = 2[\lambda^4 r^2 + (a^2 - b^2)R^4] - 2[\lambda^4 r^2 - (a^2+b^2)R^4] = 4a^2 R^4, \\
&B'[\lambda^4 r^2 + (a^2 - b^2)R^4] + A'[(a+b)^2 R^4 - \lambda^4 r^2] \\
&\quad = \frac{2}{\lambda^4 r^2 - (a-b)^2 R^4}\Big\{[\lambda^4 r^2 - (a^2+b^2)R^4][\lambda^4 r^2 + (a^2-b^2)R^4] \\
&\qquad\qquad + [(a+b)^2 R^4 - \lambda^4 r^2][\lambda^4 r^2 - (a-b)^2 R^4]\Big\} \\
&\quad = \frac{4a^2 R^4[\lambda^4 r^2 - (a^2 - b^2)R^4]}{\lambda^4 r^2 - (a-b)^2 R^4}.
\end{aligned}$$

Substituant ces expressions dans l'équation (19), on obtient

$$\frac{y'}{x'} = \frac{\sqrt{[(a+b)^2 R^4 - \lambda^4 r^2][\lambda^4 r^2 - (a-b)^2 R^4]}}{\lambda^4 r^2 - (a^2 - b^2) R^4};$$

mais on peut déduire de ce résultat une équation beaucoup plus simple. Pour cela, faisons les carrés des deux membres et ajoutons-y l'unité; il vient

$$\begin{aligned}\frac{r^2}{x'^2} &= \frac{[(a+b)^2 R^4 - \lambda^4 r^2][\lambda^4 r^2 - (a-b)^2 R^4] + [\lambda^4 r^2 - (a^2 - b^2) R^4]^2}{[\lambda^4 r^2 - (a^2 - b^2) R^4]^2} \\ &= \frac{4\lambda^4 b^2 r^2 R^4}{[\lambda^4 r^2 - (a^2 - b^2) R^4]^2},\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{x'} = \frac{2\lambda^2 b R^2}{\lambda^4 r^2 - (a^2 - b^2) R^4},$$

ou bien, en mettant pour r^2 et R^2 leurs valeurs,

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} &\lambda^4(x'^2 + y'^2) - 2\lambda^2 b x'(x'^2 + y'^2 + z'^2) \\ &\quad = (a^2 - b^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2)^2.\end{aligned}\right.$$

Concluons-en que les équations (18) et (20) représentent une classe de courbes algébriques dont les arcs s'expriment par la fonction elliptique de première espèce.

On peut, au reste, en procédant directement, arriver bien plus simplement à l'équation (20). En vertu de l'hypothèse $p = 1$, les équations (2) donnent

$$x = a\cos 2\zeta + b, \quad y = a \sin 2\zeta,$$

par suite

$$\frac{\lambda^2 x'}{x'^2 + y'^2 + z'^2} - b = a\cos 2\zeta, \quad \frac{\lambda^2 y'^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2} = a \sin 2\zeta;$$

on a donc

$$\left(\frac{\lambda^2 x'}{x'^2 + y'^2 + z'^2} - b\right)^2 + \frac{\lambda^4 y'^2}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^2} = a^2$$

ou bien

$$\frac{\lambda^4(x'^2 + y'^2)}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^2} - \frac{2\lambda^2 b x'}{x'^2 + y'^2 + z'^2} = a^2 - b^2,$$

ce qui fait retomber sur l'équation (20).

12. Dans le cas général, où p est un nombre commensurable quelconque, on peut vouloir exprimer x', y', z' en fonction rationnelle d'une même indéterminée. Admettons, par exemple, que p soit entier, et posons

$$\operatorname{tang}\zeta = \frac{1-v^2}{2v},$$

v étant cette indéterminée; on en déduit

$$\sin\zeta = \frac{1-v^2}{1+v^2},\quad \cos\zeta = \frac{2v}{1+v^2},\quad \sqrt{1+\operatorname{tang}^2\zeta} = \frac{1+v^2}{2v},\quad \sin 2\zeta = \frac{4v(1-v^2)}{(1+v^2)^2},$$

$$a + b\cos 2\zeta = \frac{a+b+(a-b)\operatorname{tang}^2\zeta}{1+\operatorname{tang}^2\zeta} = \frac{4(a+b)v^2+(a-b)(1-v^2)^2}{4v^2+(1-v^2)^2}.$$

Les formules (2) peuvent se mettre sous la forme

$$(21)\quad \begin{cases} x = (a+b\cos 2\zeta)\cos(p+1)\zeta + b\sin 2\zeta\sin(p+1)\zeta, \\ y = (a+b\cos 2\zeta)\sin(p+1)\zeta - b\sin 2\zeta\cos(p+1)\zeta, \\ z = c\sin\zeta. \end{cases}$$

Or nous avons trouvé plus haut (n° **10**)

$$\cos(p+1)\zeta = \mathrm{B}\cos^{p+1}\zeta,\quad \sin(p+1)\zeta = \mathrm{A}\operatorname{tang}\zeta\cos^{p+1}\zeta;$$

donc on a

$$\cos(p+1)\zeta = \mathrm{B}\left(\frac{2v}{1+v^2}\right)^{p+1},\quad \sin(p+1)\zeta = \mathrm{A}\frac{1-v^2}{2v}\left(\frac{2v}{1+v^2}\right)^{p+1};$$

et d'un autre côté, les valeurs de A et B exprimées en v sont

$$\mathrm{A} = p+1 - \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3}\left(\frac{1-v^2}{2v}\right)^2 + \frac{(p+1)p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3.4.5}\left(\frac{1-v^2}{2v}\right)^4 - \ldots,$$

$$\mathrm{B} = 1 - \frac{(p+1)p}{1.2}\left(\frac{1-v^2}{2v}\right)^2 + \frac{(p+1)p(p-1)(p-2)}{1.2.3.4}\left(\frac{1-v^2}{2v}\right)^4 - \ldots.$$

Substituant dans les formules (21) les expressions de $\sin\zeta$, $\sin 2\zeta$,

$a + b\cos 2\zeta$, $\cos(p+1)\zeta$, $\sin(p+1)\zeta$ en fonction de v, il vient

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \mathrm{B}\left(\frac{2v}{1+v^2}\right)^{p+1} \frac{4(a+b)v^2+(a-b)(1-v^2)^2}{4v^2+(1-v^2)^2} + b\mathrm{A}\frac{4v(1-v^2)}{(1+v^2)^2}\,\frac{1-v^2}{2v}\left(\frac{2v}{1+v^2}\right)^{p+1}, \\ y &= \mathrm{A}\,\frac{4(a+b)v^2+(a-b)(1-v^2)^2}{4v^2+(1-v^2)^2}\,\frac{1-v^2}{2v}\left(\frac{2v}{1+v^2}\right)^{p+1} - b\mathrm{B}\left(\frac{2v}{1+v^2}\right)^{p+1}\frac{4v(1-v^2)}{(1+v^2)^2}, \\ z &= \frac{c(1-v^2)}{1+v^2}; \end{aligned}\right.$$

on a en outre

$$x^2+y^2+z^2=(a+b)^2-(4ab-c^2)\sin^2\zeta=(a+b)^2-(4ab-c^2)\left(\frac{1-v^2}{1+v^2}\right)^2.$$

Cela posé, si l'on remplace la quantité $x^2+y^2+z^2$ par sa valeur en v, les formules (1) deviennent

$$x' = \frac{\lambda^2 x}{(a+b)^2-(4ab-c^2)\left(\frac{1-v^2}{1+v^2}\right)^2},$$

$$y' = \frac{\lambda^2 y}{(a+b)^2-(4ab-c^2)\left(\frac{1-v^2}{1+v^2}\right)^2},$$

$$z' = \frac{\lambda^2 z}{(a+b)^2-(4ab-c^2)\left(\frac{1-v^2}{1+v^2}\right)^2}.$$

Mettant enfin à la place de x, y, z les expressions (22), on trouve, pour exprimer x', y', z' en fonction rationnelle de v, les formules suivantes :

$$x' = \frac{\lambda^2\left(\frac{2v}{1+v^2}\right)^{p+1}}{(a+b)^2-(4ab-c^2)\left(\frac{1-v^2}{1+v^2}\right)^2}\left[\mathrm{B}\,\frac{4(a+b)v^2+(a-b)(1-v^2)^2}{4v^2+(1-v^2)^2} + b\mathrm{A}\,\frac{4v(1-v^2)}{(1-v^2)}\,\frac{1-v^2}{2v}\right],$$

$$y' = \frac{\lambda^2\left(\frac{2v}{1+v^2}\right)^{p+1}}{(a+b)^2-(4ab-c^2)\left(\frac{1-v^2}{1+v^2}\right)^2}\left[\mathrm{A}\,\frac{4(a+b)v^2+(a-b)(1-v^2)^2}{4v^2+(1-v^2)^2}\,\frac{1-v^2}{2v} - b\mathrm{B}\,\frac{4v(1-v^2)}{(1+v^2)^2}\right],$$

$$z' = \frac{c(1-v^2)}{1+v^2}.$$

13. On peut se servir des équations (2), où p sera toujours supposé commensurable, pour obtenir une infinité de classes de courbes algébriques dont les arcs s'expriment exactement par des arcs de cercle. Il n'y a pour cela qu'à reprendre la formule (5), qui donne l'élément d'une quelconque des courbes Σ représentées par ces équations, en posant $4ab(p^2-1)+c^2=0$; d'où

$$c = 2\sqrt{ab(1-p^2)}. \tag{23}$$

Il vient en effet

$$ds = d\zeta\sqrt{[p(a+b)+a-b]^2+c^2};$$

mettant pour c^2 sa valeur, on a

$$\begin{aligned}[p(a+b)+a-b]^2+c^2 &= [p(a+b)+a-b]^2+4ab(1-p^2)\\ &= [p(a-b)+a+b]^2;\end{aligned}$$

par suite

$$ds = [p(a-b)+a+b]d\zeta.$$

D'après la formule (23), la valeur de c sera réelle, quel que soit le signe de p, si p est moindre que l'unité, a et b étant de même signe, ou si p est plus grand que l'unité, a et b étant de signes contraires. Les valeurs de x, y, z deviennent

$$\left\{\begin{aligned} x &= a\cos(p+1)\zeta + b\cos(p-1)\zeta,\\ y &= a\sin(p+1)\zeta + b\sin(p-1)\zeta,\\ z &= 2\sqrt{ab(1-p^2)}\sin\zeta. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Ainsi, les courbes algébriques déterminées par ces trois équations sont telles que leurs arcs s'expriment exactement par des arcs de cercle. On remarquera que les valeurs de a et b restent arbitraires, de sorte qu'à chaque valeur de p répondent une infinité de courbes.

Examinons quelques cas particuliers :

1° Soit $p=0$, a et b étant de même signe. Les formules (23) et (24) donnent

$$c = 2\sqrt{ab}, \quad x = (a+b)\cos\zeta, \quad y = (a-b)\sin\zeta, \quad z = 2\sqrt{ab}\sin\zeta,$$

d'où

$$\frac{y}{z} = \frac{a-b}{2\sqrt{ab}},$$

ce qui montre que chacune des courbes Σ est située dans un plan passant par l'axe des x. D'un autre côté, l'équation

$$x^2 + y^2 + \frac{4ab}{c^2} z^2 = (a+b)^2$$

devient celle d'une sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = (a+b)^2;$$

donc, dans le cas actuel, on tombe sur des cercles.

2° Faisons $p = \frac{1}{2}$, a et b étant encore de même signe. Il vient

$$x = a\cos\frac{3\zeta}{2} + b\cos\frac{\zeta}{2}, \quad y = a\sin\frac{3\zeta}{2} - b\sin\frac{\zeta}{2},$$

et, en remplaçant $\cos\frac{3\zeta}{2}$, $\sin\frac{3\zeta}{2}$ par les expressions

$$\cos\frac{3\zeta}{2} = 4\cos^3\frac{\zeta}{2} - 3\cos\frac{\zeta}{2}, \quad \sin\frac{3\zeta}{2} = 3\sin\frac{\zeta}{2} - 4\sin^3\frac{\zeta}{2},$$

on trouve

$$\begin{aligned} x &= 4a\cos^3\frac{\zeta}{2} + (b-3a)\cos\frac{\zeta}{2}, \\ y &= -4a\sin^3\frac{\zeta}{2} + (3a-b)\sin\frac{\zeta}{2}. \end{aligned}$$

Posons $b = 3a$, ce qui est permis, puisque a et b sont de même signe. Les deux dernières formules deviennent

$$x = 4a\cos^3\frac{\zeta}{2}, \quad y = -4a\sin^3\frac{\zeta}{2};$$

d'où l'on déduit, pour l'équation de la projection de la courbe sur le plan xy,

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (4a)^{\frac{2}{3}}.$$

Cette projection est donc l'hypocycloïde bien connue se rapportant au cas où le rayon du cercle mobile serait égal à a et celui du cercle fixe à $4a$.

La formule (23) donne $c = 3a$, $\frac{4ab}{c^2} = \frac{4}{3}$, en sorte que l'ellipsoïde de révolution sur lequel la courbe est située a pour équation

$$x^2 + y^2 + \tfrac{4}{3}z^2 = 16a^2.$$

3° a et b étant supposés de signes contraires, faisons $p = 2$, ce qui donne $c^2 = -12ab$, $\frac{4ab}{c^2} = -\frac{1}{3}$. D'abord la courbe est située sur un hyperboloïde de révolution à une nappe déterminé par l'équation (16), laquelle devient ici

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{3} = (a + b)^2;$$

et si l'on avait en outre $a + b = 0$, cet hyperboloïde se changerait en un cône du second degré ayant son sommet à l'origine des coordonnées.

Pour former l'équation de la projection de la courbe sur le plan xy, on se servira des expressions de x et y déduites des deux premières équations (24), à savoir:

$$x = a\cos 3\zeta + b\cos\zeta, \quad y = a\sin 3\zeta + b\sin\zeta.$$

On en conclut

$$\frac{y}{x} = \frac{a\sin 3\zeta + b\sin\zeta}{a\cos 3\zeta + b\cos\zeta},$$

et en exprimant, comme on l'a fait au n° **10**, le second membre en fonction de $u^2 = x^2 + y^2$, on obtient l'équation

$$\frac{y}{x} = \sqrt{\frac{(a+b)^2 - u^2}{u^2 - (a-b)^2}}\,\frac{\mathrm{A}(u^2 + a^2 - b^2) - \mathrm{B}[u^2 - (a-b)^2]}{\mathrm{B}(u^2 + a^2 - b^2) + \mathrm{A}[(a+b)^2 - u^2]}.$$

Ici l'hypothèse $p = 2$ donne

$$\mathrm{A} = 3 - \frac{(a+b)^2 - u^2}{u^2 - (a-b)^2} = \frac{4(u^2 - a^2 - b^2 + ab)}{u^2 - (a-b)^2},$$
$$\mathrm{B} = 1 - 3\frac{(a+b)^2 - u^2}{u^2 - (a-b)^2} = \frac{4(u^2 - a^2 - b^2 - ab)}{u^2 - (a-b)^2};$$

par suite

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}(u^2+a^2-b^2)-\mathrm{B}[u^2-(a-b)^2]\\
&\quad=4\frac{(u^2-a^2-b^2+ab)(u^2+a^2-b^2)-(u^2-a^2-b^2-ab)[u^2-(a-b)^2]}{u^2-(a-b)^2}\\
&\quad=\frac{8a^2[u^2-a(a-b)]}{u^2-(a-b)^2},\\
&\mathrm{B}(u^2+a^2-b^2)+\mathrm{A}[(a+b)^2-u^2]\\
&\quad=4\frac{(u^2-a^2-b^2-ab)(u^2+a^2-b^2)+(u^2-a^2-b^2+ab)[(a+b)^2-u^2]}{u^2-(a-b)^2}\\
&\quad=\frac{8a^2[u^2-a(a+b)]}{u^2-(a-b)^2}.
\end{aligned}$$

On trouve enfin, pour l'équation de la projection de la courbe sur le plan xy,

$$\frac{y}{x}=\sqrt{\frac{(a+b)^2-u^2}{u^2-(a-b)^2}\,\frac{u^2-a(a-b)}{u^2-a(a+b)}}$$

ou bien

$$\frac{y}{x}=\sqrt{\frac{(a+b)^2-x^2-y^2}{x^2+y^2-(a-b)^2}\,\frac{x^2+y^2-a(a-b)}{x^2+y^2-a(a+b)}}.$$

14. A l'aide des équations (2) on peut encore déterminer une infinité de classes de courbes algébriques dont les arcs offrent la représentation exacte de la fonction elliptique de deuxième espèce à module quelconque.

Considérons une quelconque des courbes déterminées par ces équations. En vertu de la formule (5), l'arc indéfini s a pour expression

$$s=\sqrt{[p(a+b)+a-b]^2+c^2}\int d\zeta\sqrt{1-\frac{4ab(p^2-1)+c^2}{[p(a+b)+a-b]^2+c^2}\sin^2\zeta},$$

et l'on voit qu'il s'exprimera par la fonction elliptique de deuxième espèce, si le rapport

$$\frac{4ab(p^2-1)+c^2}{[p(a+b)+a-b]^2+c^2}$$

est une quantité positive moindre que l'unité. D'abord cela a lieu, quel que soit c, si l'on a $p>1$, a et b étant de même signe, ou si

$p < 1$, a et b étant de signes contraires : car le numérateur est positif, et de plus il est moindre que le dénominateur, en vertu de l'identité

$$(25)\quad [p(a+b)+a-b]^2 - 4ab(p^2-1) = [p(a-b)+a+b]^2.$$

Supposons, en second lieu, $p > 1$, a et b étant de signes contraires, ou bien $p < 1$, a et b étant de même signe, ce qui revient à la condition $ab(p^2-1) < 0$. Faisons

$$(26)\qquad \frac{4ab(p^2-1)+c^2}{[p(a+b)+a-b]^2+c^2} = k^2,$$

k étant une quantité moindre que l'unité, qu'on se donne à volonté. On en déduit

$$c^2 = \frac{k^2}{1-k^2}[p(a+b)+a-b]^2 - \frac{4ab(p^2-1)}{1-k^2},$$

et l'on reconnaît que c^2 est positif, ou c réel, puisque le terme

$$-\frac{4ab(p^2-1)}{1-k^2}$$

est positif. En outre, le numérateur $4ab(p^2-1)+c^2$ est rendu positif par cette valeur de c^2, le premier membre de l'équation (26) étant une quantité positive égale à k^2 ; et d'ailleurs on le vérifie aisément, car on a

$$\begin{aligned}4ab(p^2-1)+c^2 &= 4ab(p^2-1)+\frac{k^2}{1-k^2}[p(a+b)+a-b]^2-\frac{4ab(p^2-1)}{1-k^2}\\ &= \frac{k^2}{1-k^2}[p(a-b)+a+b]^2.\end{aligned}$$

Ainsi, dans l'hypothèse $ab(p^2-1) < 0$, on peut attribuer à c une valeur réelle qui rende le multiplicateur de $-\sin^2\zeta$, dans l'expression de l'arc s, égal à une fraction positive quelconque k^2. Cela revient à dire qu'on peut représenter une fonction elliptique de deuxième espèce, quel qu'en soit le module, par les arcs d'une infinité de courbes algébriques. A chaque valeur de p répondra une classe de ces courbes, puisque les valeurs de a et b restent arbitraires, sauf leurs signes respectifs.

Réciproquement, dans la même hypothèse $ab(p^2-1)<0$, si l'on se donne une valeur quelconque pour c, mais telle que $4ab(p^2-1)+c^2$ soit positif, ou qu'on ait $c>2\sqrt{ab(1-p^2)}$, l'arc s représentera une fonction elliptique de deuxième espèce; car, d'après la formule (25), le multiplicateur de $-\sin^2\zeta$ sera évidemment une fraction positive.

Donc, si l'on satisfait aux deux conditions

$$ab(p^2-1)<0,\quad c>2\sqrt{ab(1-p^2)},$$

l'arc s s'exprimera toujours par une fonction elliptique de deuxième espèce; et de plus, étant donnée une fonction elliptique de deuxième espèce à module quelconque, il existera une infinité de classes de courbes algébriques dont les arcs en offriront la représentation géométrique.

Appliquons ce qui précède à quelques cas particuliers. Soit d'abord $p=0$; les équations (2) deviennent

$$x=(a+b)\cos\zeta,\quad y=(a-b)\sin\zeta,\quad z=c\sin\zeta,$$

et l'on en déduit

$$x^2+y^2+\frac{4ab}{c^2}z^2=(a+b)^2,\quad \frac{y}{z}=\frac{a-b}{c}.$$

Par où l'on voit que la courbe que nous considérons est donnée par l'intersection d'un ellipsoïde ou d'un hyperboloïde de révolution et d'un plan passant par l'axe des x, c'est-à-dire que cette courbe est une ellipse, puisque l'arc s s'exprime par un arc elliptique. Le carré du module de la fonction elliptique de deuxième espèce représentée par l'arc s est ici $\frac{c^2-4ab}{(a-b)^2+c^2}$, ce qui exige $c^2>4ab$; moyennant cette condition, on est sûr que le rapport dont il s'agit est positif et moindre que l'unité, quelles que soient les valeurs de a, b et c. Si l'on se donnait réciproquement un module k, il faudrait satisfaire à l'équation

$$\frac{c^2-4ab}{(a-b)^2+c^2}=k^2,$$

d'où

$$c^2=\frac{k^2(a+b)^2}{1-k^2}+\frac{4ab}{1-k^2}.$$

Admettons qu'on prenne a et b de même signe : cette valeur de c^2 sera admissible, en même temps que celle de $c^2 - 4ab$, en vertu de l'expression de k^2.

Faisons, en second lieu, $p = 1$. Les constantes a, b, c étant laissées arbitraires, il y aura une classe de courbes répondant à cette hypothèse et dont une quelconque sera déterminée par les équations

$$(27) \qquad x = a\cos 2\zeta + b, \quad y = a\sin 2\zeta, \quad z = c\sin\zeta,$$

d'ou

$$x^2 + y^2 + \frac{4ab}{c^2}z^2 = (a+b)^2, \quad (x-b)^2 + y^2 = a^2$$

Cette courbe est donc l'intersection d'un ellipsoïde ou d'un hyperboloïde de révolution et d'un cylindre de révolution. Les axes de ces deux surfaces sont parallèles, et l'on remarquera en outre que le cercle servant de base au cylindre est tangent à celui qui est la trace de l'ellipsoïde ou de l'hyperboloïde sur le plan xy, ce qui résulte visiblement de ce que ces deux cercles ont pour équations

$$(x-b)^2 + y^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 = (a+b)^2.$$

Le carré du module de la fonction elliptique de deuxième espèce représentée par l'arc de la courbe est ici égal à $\frac{c^2}{4a^2+c^2}$, et ce module peut être supposé quelconque; car, si l'on fait $\frac{c^2}{4a^2+c^2} = k^2$, k étant une fraction donnée, on en déduit pour c une valeur réelle

$$c = \frac{2ak}{\sqrt{1-k^2}}.$$

Il est d'ailleurs facile de reconnaître que la courbe représentée par les équations (27) est une courbe gauche, en admettant toutefois qu'aucun des deux paramètres a et c ne soit nul. Supposons, en effet, qu'elle soit plane et que son plan ait pour équation

$$Ax + By + Cz + D = 0;$$

il faudrait qu'en substituant les valeurs de x, y, z en fonction de ζ, cette équation fût identiquement satisfaite. Or cette substitution donne

$$A(a \cos 2\zeta + b) + Ba \sin 2\zeta + Cc \sin\zeta + D = 0;$$

et, en faisant successivement $\zeta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$, on trouve

$$\begin{aligned} A(a+b) + D &= 0, \\ Ab + Ba + \frac{Cc}{\sqrt{2}} + D &= 0, \\ A(b-a) + Cc + D &= 0, \\ A(b-a) - Cc + D &= 0. \end{aligned}$$

Mais des deux dernières relations on tire $2Cc = 0$, d'où $C = 0$ Puis la première et la troisième donnent $Ab + D = 0$, et au moyen de la deuxième on obtient $B = 0$; d'un autre côté, la troisième devient $-Aa = 0$, d'où $A = 0$, et l'on a dès lors $D = 0$. Donc le plan dont il s'agit n'existe pas, c'est-à-dire que la courbe n'est point plane.

15. Un dernier cas à signaler est celui où les courbes Σ seraient des courbes sphériques, en prenant pour centre de sphère le point O. Si l'on exprime que la quantité $x^2 + y^2 + z^2$ est constante, on obtient, en vertu de la formule (3), la condition

$$4ab - c^2 = 0,$$

en sorte que a et b doivent être de même signe. On a donc $c = 2\sqrt{ab}$, et le rayon de la sphère sur laquelle les courbes Σ sont situées est

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = a + b.$$

La formule (5) devient

$$ds = d\zeta\sqrt{[p(a+b)+a-b]^2 + 4ab}\sqrt{1 - \frac{4abp^2}{[p(a+b)+a-b]^2+4ab}\sin^2\zeta},$$

ce qui montre que l'arc s s'exprime par une fonction elliptique de deuxième espèce. Je dis, en outre, que cet arc peut représenter une fonction quelconque de deuxième espèce ayant pour module k.

Il faut poser la relation

$$\frac{4abp^2}{[p(a+b)+a-b]^2+4ab}=k^2;$$

qui déterminera $\frac{b}{a}$. On la mettra sous la forme

$$(p-1)^2\frac{b^2}{a^2}+2\left[p^2-1-2\left(\frac{p^2}{k^2}-1\right)\right]\frac{b}{a}+(p+1)^2=0,$$

et l'on trouvera

$$\frac{b}{a}=\frac{2\left(\frac{p^2}{k^2}-1\right)-(p^2-1)\pm 2p\sqrt{\left(\frac{1}{k^2}-1\right)\left(\frac{p^2}{k^2}-1\right)}}{(p-1)^2}.$$

Par où l'on voit que, pour que les deux valeurs de $\frac{b}{a}$ soient réelles, il faut qu'on ait $\frac{p^2}{k^2}-1>0$, c'est-à-dire que le nombre commensurable p doit être plus grand que k.

Dans le cas où $p=1$, l'équation qui détermine $\frac{a}{b}$ s'abaisse au premier degré et donne $\frac{b}{a}=\frac{k^2}{1-k^2}$; la courbe Σ est l'intersection d'une sphère et d'un cylindre représentés par les équations

$$x^2+y^2+z^2=(a+b)^2,\quad (x-b)^2+y^2=a^2,$$

où b doit être remplacé par $\frac{ak^2}{1-k^2}$. Si l'on fait $k^2=\frac{1}{2}$, on aura $b=a$, et le rayon de la base du cylindre sera la moitié du rayon de la sphère. On reconnaît par là que la courbe Σ est la même que la courbe sphérique par laquelle se résout le problème de Viviani, en sorte que l'arc de cette dernière courbe s'exprime par une fonction elliptique de deuxième espèce ayant pour module $\sqrt{\frac{1}{2}}$.