JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WORMS DE ROMILLY

Note sur l'intégration de l'équation $\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{\mu+1}{x}\frac{dV}{dx} + V = 0$

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 4 (1878), p. 177-186.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1878_3_4__177_0>

Note sur l'intégration de l'équation $\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{\mu+1}{x}\frac{dV}{dx} + V = 0$;

PAR M. WORMS DE ROMILLY,

Ingénieur des Mines.

Considérons les quatre intégrales définies suivantes :

$$\varphi(x, \mu) = \int_0^\pi \sin(x\cos\omega)\sin^\mu\omega\, d\omega,$$

$$\theta(x, \mu) = \int_0^\pi \cos(x\cos\omega)\sin^\mu\omega\, d\omega,$$

$$\psi(x, \mu) = \int_0^\pi \sin(x\sin\omega)\cos^\mu\omega\, d\omega,$$

$$\tau(x, \mu) = \int_0^\pi \cos(x\sin\omega)\cos^\mu\omega\, d\omega.$$

Remplaçons dans les deux premières $\sin^\mu\omega$ par $\sin^{\mu-2k}\omega\,(1-\cos^2\omega)^k$, et dans les deux autres $\cos^\mu\omega$ par $\cos^{\mu-2k}\omega\,(1-\sin^2\omega)^k$, et développons les binômes, nous obtiendrons, pour les quatre fonctions, des relations analogues à

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(x, \mu) = \int_0^\pi &\sin(x\cos\omega)\sin^{\mu-2k}\omega \\ &\left[1 - \frac{k\cos^2\omega}{1} + \frac{k(k-1)}{1.2}\cos^4\omega \ldots\right] d\omega. \end{aligned}\right.$$

Différentions $2n$ fois, par rapport à x, la fonction φ, il vient

$$\frac{d^{2n}\varphi(x, \mu)}{dx^{2n}} = (-1)\int_0^\pi \sin(x\cos\omega)\sin^\mu\omega\cos^{2n}\omega\, d\omega;$$

la relation (1) peut donc s'écrire

$$(2)\quad \varphi(x,\mu)=\varphi(x,\mu-2k)+\frac{k}{1}\frac{d^2\varphi(x,\mu-2k)}{dx^2}+\cdots+\frac{d^{2k}\varphi(x,\mu-2k)}{dx^{2k}}.$$

En effectuant les mêmes opérations sur les autres fonctions, on parviendrait à des relations de forme identique.

L'intégration par parties nous donne

$$\begin{aligned}\int \sin(x\cos\omega)\sin^{\mu}\omega\, d\omega &= \frac{1}{x}\cos(x\cos\omega)\sin^{\mu-1}\omega+\frac{\mu-1}{x^2}\sin(x\cos\omega)\sin^{\mu-3}\omega\cos\omega\\ &\quad-\frac{(\mu-1)(\mu-3)}{x^2}\int\sin(x\cos\omega)\sin^{\mu-4}\omega\cos^2\omega\, d\omega\\ &\quad+\frac{\mu-1}{x^2}\int\sin(x\cos\omega)\sin^{\mu-2}\omega\, d\omega.\end{aligned}$$

Pour $\mu=1$ ou >1, les deux premiers termes du second membre s'annulent entre les limites zéro et π, et en remplaçant dans le troisième terme $\cos^2\omega$ par sa valeur en $\sin\omega$, on trouve, après une dernière réduction,

$$\varphi(x,\mu)=\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{x^2}\varphi(x,\mu-2)-\frac{(\mu-1)(\mu-3)}{x^2}\varphi(x,\mu-4).$$

Pour la fonction θ, les termes que l'on peut faire sortir du signe $\int$ sont

$$-\frac{1}{x}\sin(x\cos\omega)\sin^{\mu-1}\omega+\frac{\mu-1}{x^2}\cos(x\cos\omega)\sin^{\mu-3}\omega\cos\omega.$$

Le deuxième terme est nul, quel que soit μ; il n'en est pas de même du premier terme qui, pour $\mu=1$, devient égal à $+\frac{2\sin x}{x}$; nous aurons donc

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}\theta(x,\mu)&=\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{x^2}\theta(x,\mu-2)\\ &\quad-\frac{(\mu-1)(\mu-3)}{x^2}\theta(x,\mu-4)+A_{\mu},\end{aligned}\right.$$

A_μ étant nul, sauf dans le cas de $\mu=1$, où il a pour valeur $+\frac{2\sin x}{x}$. On trouve de même

$$\tau(x,\mu)=\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{x^2}\tau(x,\mu-2)-\frac{(\mu-1)(\mu-3)}{x^2}\tau(x,\mu-4),$$

$$\psi(x,\mu)=\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{x^2}\psi(x,\mu-2)$$
$$-\frac{(\mu-1)(\mu-3)}{x^2}\psi(x,\mu-4)+\frac{1-(-1)^{\mu-1}}{x}.$$

Si l'on remplace dans $\frac{d^m\varphi(x,\mu)}{dx^m}$ le facteur $\cos^m\omega$ ou le facteur $\cos^{m-1}\omega$, suivant que m est pair ou non, par sa valeur en $\sin\omega$, on obtient les relations

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{d^{2n}\varphi(x,\mu)}{dx^{2n}}&=(-1)^n\Big[\varphi(x,\mu)-\frac{n}{1}\varphi(x,\mu+2)\\&\qquad+\frac{n(n-1)}{1.2}\varphi(x,\mu+4)\cdots+(-1)^n\varphi(x,\mu+2n)\Big],\\\frac{d^{2n+1}\varphi(x,\mu)}{dx^{2n+1}}&=(-1)^n\left[\frac{d\varphi(x,\mu)}{dx}-\frac{n}{1}\frac{d\varphi(x,\mu+2)}{dx}+\cdots\right].\end{aligned}\right.$$

Les relations seraient de forme identique pour θ, ψ, τ.

De ce qui précède il résulte que, connaissant les intégrales pour les valeurs 0, 1, 2, 3 de μ, on en déduira les intégrales pour une valeur quelconque de μ.

Nous remarquerons d'abord que la fonction φ est toujours nulle; car, pour deux valeurs $\frac{\pi}{2}+\omega'$, $\frac{\pi}{2}-\omega'$ de ω, le facteur $\sin(x\cos\omega)$ aura même valeur absolue et signe contraire, le facteur $\sin^\mu\omega$ aura même valeur : il est de même facile de voir que $\tau(x,\mu)$, $\psi(x,\mu)$ sont nuls quand μ est impair.

Quand μ est pair, θ et τ ont même valeur. En effet, faisons varier dans θ, ω_1 de zéro à $\frac{\pi}{2}$, et dans τ, ω_2 de $\frac{\pi}{2}$ à π, pour une valeur intermédiaire ω'; on aura

$$\omega_1=\omega',\quad \omega_2=\frac{\pi}{2}+\omega',$$

$$d\theta=\cos(x\cos\omega')\sin^\mu\omega'\,d\omega',\quad d\tau=\cos(x\cos\omega')(-\sin\omega')^\mu d\omega'.$$

23..

Ces deux valeurs sont égales. Prenons maintenant

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2} + \omega', \quad \omega_2 = \omega',$$

$$d\theta = \cos(-x\sin\omega')(-\cos\omega')^{\mu} d\omega', \quad d\tau = \cos(x\sin\omega')\cos^{\mu}\omega' d\omega'.$$

Nous avons encore des valeurs égales; donc θ et τ ont mêmes valeurs quand μ est un nombre pair.

On a, d'autre part, immédiatement

$$\theta(x, 1) = \left[-\frac{\sin(x\cos\omega)}{x}\right]_0^{\pi} = \frac{2\sin x}{x},$$

et en appliquant la formule (2), où nous ferons $k = 1$, $\mu = 3$,

$$\theta(x, 3) = \theta(x, 1) + \frac{d^2\theta(x, 1)}{dx^2} = \frac{4}{x^2}\frac{\sin x}{x} - \frac{4\cos x}{x^2}.$$

Il ne nous reste plus à chercher que les valeurs de θ et de ψ pour $\mu = 0$, $\mu = 2$. Or on a

$$\theta(x, 0) = \int_0^{\pi}\cos(x\cos\omega)\,d\omega = \int_0^{\pi}\left(1 - \frac{x^2\cos^2\omega}{1.2} + \frac{x^4\cos^4\omega}{1.2.3.4} + \cdots\right)d\omega,$$

$$\theta(x, 2) = \int_0^{\pi}\cos(x\cos\omega)\sin^2\omega\,d\omega$$

$$= \theta(x, 0) - \int_0^{\pi}\left(\frac{\cos^2\omega}{1} - \frac{x^2\cos^4\omega}{1.2} + \frac{x^4\cos^6\omega}{1.2.3.4} + \cdots\right)d\omega,$$

et de même

$$\psi(x, 2) = \psi(x, 0) - \int_0^{\pi}\left(x\sin^3\omega - \frac{x^3\sin^5\omega}{1.2.3} - \cdots\right)d\omega.$$

$$\psi(x, 0) = \int_0^{\pi}\left(x\sin\omega - \frac{x^3\sin^3\omega}{1.2.3} + \cdots\right)d\omega.$$

Or, en vertu des relations connues,

$$\int_0^{\pi}\cos^{2n}\omega\,d\omega = \frac{1.3\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n}\pi \qquad \int_0^{\pi}\cos^{2n+1}\omega\,d\omega = 0,$$

$$\int_0^{\pi}\sin^{2n}\omega\,d\omega = \frac{1.3\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n}\pi \qquad \int_0^{\pi}\sin^{2n+1}\omega\,d\omega = 2\frac{1.2.4\ldots 2n}{1.3.5\ldots 2n+1},$$

il vient

$$\theta(x,0)=\pi\left(1-\frac{x^2}{1.2}\frac{1}{2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}\frac{1.3}{2.4}-\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdots\right),$$

$$\theta(x,2)=\theta(x,0)-\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{1.2}\frac{1.3}{2.4}+\frac{x^4}{1.2.3.4}\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdots\right),$$

$$\theta(x,2)=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{1.2}\frac{1}{2}\frac{1}{4}+\frac{x^4}{1.2.3.4}\frac{1.3}{2.4}\frac{1}{6}-\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{8}\cdots\right),$$

$$\psi(x,0)=2x\left(1-\frac{x^2}{1.2.3}\frac{2}{3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}\frac{2.4}{3.5}-\frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7}\frac{2.4.6}{3.5.7}\cdots\right),$$

$$\psi(x,2)=\psi(x,0)-\left(x\frac{2}{3}\frac{2}{1}-\frac{x^3}{1.3.5}\frac{2}{5}\frac{2.4}{1.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}\frac{2}{7}\frac{2.4.6}{1.3.5}\cdots\right),$$

$$\psi(x,2)=x\left(\frac{2}{1}\frac{1}{3}-\frac{x^3}{1.2.3}\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{1}{5}+\frac{x^5}{1.2.3.4\,5}\frac{2.4}{1.3}\frac{2}{5}\frac{1}{7}\right.$$
$$\left.-\frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7}\frac{2.4.6}{1.3.5}\frac{2}{7}\frac{1}{9}\cdots\right),$$

Application.

Nous avons vu que l'une quelconque des fonctions φ, θ, ψ, τ, que nous désignerons par V, satisfait à la relation

$$V(x,\mu)=V(x,\mu-2k)+\frac{k}{1}\frac{d^2V(x,\mu-2k)}{dx^2}+\ldots$$

Si nous posons $k=1$, il vient

$$(5)\qquad V(x,\mu)=V(x,\mu-2)+\frac{d^2V(x,\mu-2)}{dx^2}.$$

Supposons maintenant que la relation

$$(6)\qquad \frac{d^2V(x,\mu)}{dx^2}+\frac{\mu+1}{x}\frac{dV(x,\mu)}{dx}+V(x,\mu)=0$$

soit satisfaite, je dis qu'en vertu de la relation (5) on aura aussi

$$(7)\qquad \frac{d^2V(x,\mu+2)}{dx^2}+\frac{\mu+3}{x}\frac{dV(x,\mu+2)}{dx}+V(x,\mu+2)=0.$$

Nous pouvons, en effet, écrire la relation (5)

$$V(x, \mu+2) = V(x, \mu) + \frac{d^2V(x, \mu)}{dx^2}.$$

Substituons cette valeur dans l'équation (7), on a

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 = {} & \frac{d^2V(x, \mu)}{dx^2} + \frac{d^4V(x, \mu)}{dx^4} + \frac{\mu+3}{x}\frac{dV(x, \mu)}{dx} \\ & + \frac{\mu+3}{x}\frac{d^3V(x, \mu)}{dx^3} + V(x, \mu) + \frac{d^2V(x, \mu)}{dx^2}. \end{aligned} \right.$$

Or, si nous différentions deux fois de suite la relation (6), nous trouvons

$$\begin{aligned} \frac{d^4V(x, \mu)}{dx^4} + \frac{\mu+1}{x}\frac{d^3V(x, \mu)}{dx^3} - 2\frac{\mu+1}{x^2}\frac{d^2V(x, \mu)}{dx^2} & \\ + 2\frac{\mu+1}{x^3}\frac{dV(x, \mu)}{dx} + \frac{d^2V(x, \mu)}{dx^2} & = 0; \end{aligned}$$

$$\frac{d^3V(x, \mu)}{dx^3} + \frac{\mu+1}{x}\frac{d^2V(x, \mu)}{dx^2} - \frac{\mu+1}{x^2}\frac{dV(x, \mu)}{dx} + \frac{dV(x, \mu)}{dx} = 0.$$

Multiplions la première par $\frac{2}{x}$ et ajoutons-la membre à membre à l'autre; nous trouverons

$$\frac{d^4V(x, \mu)}{dx^4} + \frac{\mu+3}{x}\frac{d^3V(x, \mu)}{dx^3} + \frac{d^2V(x, \mu)}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dV(x, \mu)}{dx} = 0,$$

et, en retranchant cette équation membre à membre de l'équation (8),

$$\frac{d^2V(x, \mu)}{dx^2} + \frac{\mu+1}{x}\frac{dV(x, \mu)}{dx} + V(x, \mu) = 0,$$

ce qui est précisément l'équation (6) que nous avons supposée satisfaite.

Donc, si $V(x, 0)$, $V(x, 1)$ satisfont à la relation (6), il en est de même quel que soit μ.

La fonction φ étant toujours nulle, il n'y a pas lieu de la considérer; $\tau(x, 1)$, $\psi(x, 1)$ étant nuls satisfont à l'équation différentielle; $\theta(x, 1)$ substitué à V rend l'équation différentielle identiquement nulle. On vérifie facilement que $\theta(x, 0)$ satisfait à l'équation différentielle; car, en substituant dans le premier membre la valeur de $\theta(x, 0)$ et de ses dérivées, on trouve

$$\int_0^\pi \cos(x\cos\omega)\sin^2\omega d\omega - \frac{1}{x}\int_0^\pi \sin(x\cos\omega)\cos\omega d\omega;$$

le dernier terme est nul, le premier, intégré par parties, se réduit à

$$-\left[\frac{\sin(x\cos\omega)}{x}\sin\omega\right]_0^\pi,$$

qui est évidemment nul.

Pour $\psi(x, 0)$, on arrive à un terme

$$-\left[\frac{\cos(x\sin\omega)}{x}\cos\omega\right]_0^\pi,$$

dont la valeur est $\frac{2}{x}$; par conséquent $\psi(x, 0)$ ne satisfait pas à l'équation différentielle. Celle-ci n'est donc satisfaite que par la fonction $\theta(x, \mu)$ et par la fonction $\tau(x, \mu)$, qui est toujours nulle ou identique à $\theta(x, \mu)$.

Ainsi l'équation

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{\mu+1}{x}\frac{dV}{dx}+V=0 \tag{6}$$

admet toujours l'intégrale

$$V = A\theta(x, \mu). \tag{9}$$

On pourrait déduire de là, dans certains cas, l'intégrale complète. Considérons A comme fonction de x, cherchons les valeurs de $\frac{dV}{dx}$, $\frac{d^2V}{dx^2}$, et introduisons-les dans l'équation (6); celle-ci deviendra

$$A\frac{d^2\theta}{dx^2}+\frac{\mu+1}{x}A\frac{d\theta}{dx}+A\theta+2\frac{dA}{dx}\frac{d\theta}{dx}+\frac{\mu+1}{x}\theta\frac{dA}{dx}+\theta\frac{d^2A}{dx^2}=0,$$

qui se réduit à

$$\theta\frac{d^2A}{dx^2}+\left(2\frac{d\theta}{dx}+\frac{\mu+1}{x}\theta\right)\frac{dA}{dx}=0$$

ou, en posant $\frac{dA}{dx} = B$,

$$\frac{\frac{dB}{dx}}{B} = -2\frac{\frac{d\theta}{dx}}{\theta} - \frac{\mu+1}{x}.$$

On a donc, en intégrant et désignant par k une constante arbitraire,

$$B\theta^2 x^{\mu+1} = k,$$

c'est-à-dire

$$\frac{dA}{dx} = \frac{k}{\theta^2 x^{\mu+1}}, \quad A = k' + \int \frac{k\,dx}{x^{\mu+1}\theta^2},$$

ou enfin

$$V = k'\theta(x,\mu) + k\theta(x,\mu)\int \frac{dx}{x^{\mu+1}\theta^2(x,\mu)}.$$

Si $\mu = 1$, l'intégration se fait immédiatement, et l'on a

$$V = \frac{2k'\sin x}{x} - \frac{k\cos x}{x} = \frac{k_1\sin x + k_2\cos x}{x};$$

mais, en général, il serait impossible d'effectuer l'intégration.

Nous avons vu que la formule (2) permet d'exprimer $\theta(x,\mu)$ en fonction de $\theta(x,\mu-2k)$ et de ses dérivées par rapport à x; si μ est impair et que l'on prenne $\mu - 2k = 1$, ce qui est toujours possible, la formule (2) donne

$$(10)\quad \theta(x,\mu) = \theta(x,1) + \frac{\mu-1}{2}\frac{d^2\theta(x,1)}{dx^2} + \frac{\frac{\mu-1}{2}\left(\frac{\mu-1}{2}-1\right)}{1.2}\frac{d^4\theta(x,1)}{dx^4} + \ldots + \frac{d^{\mu-1}\theta(x,1)}{dx^{\mu-1}}.$$

De la valeur connue de $\theta(x,1)$ on déduit

$$(11)\quad \tfrac{1}{2}d^{2n}\theta(x,1) = (-1)^n\Big[\frac{\sin x}{x} + 2n\frac{\cos x}{x^2} - 2n(2n-1)\frac{\sin x}{x^3} - 2n(2n-1)(2n-2)\frac{\cos x}{x^4} + \ldots + \ldots + 2n(2n-1)\ldots 2.1\frac{\sin x}{x^{2n+1}}\Big];$$

on aura donc

$$\begin{aligned}
\theta(x,\mu) &= 2\frac{\sin x}{x}\left[1-\frac{\mu-1}{2}+\frac{\frac{\mu-1}{2}\left(\frac{\mu-1}{2}-1\right)}{1.2}-\frac{\frac{\mu-1}{2}\left(\frac{\mu-1}{2}-1\right)\left(\frac{\mu-1}{2}-2\right)}{1.2.3}\cdots\right]\\
&+2\frac{\cos x}{x^2}\left[-\frac{\mu-1}{2}2+\frac{\frac{\mu-1}{2}\left(\frac{\mu-1}{2}-1\right)}{1.2}4-\frac{\frac{\mu-1}{2}\left(\frac{\mu-1}{2}-1\right)\left(\frac{\mu-1}{2}-2\right)}{1.2.3}6\ldots\right]\\
&+2\frac{\sin x}{x^3}\left[\frac{\mu-1}{2}2.1-\frac{\frac{\mu-1}{2}\left(\frac{\mu-1}{2}-1\right)}{1.2}4.3+\frac{\frac{\mu-1}{2}\left(\frac{\mu-1}{2}-1\right)\left(\frac{\mu-1}{2}-2\right)}{1.2.3}6.5\ldots\right]\\
&+2\frac{\cos x}{x^4}\left[-\frac{\frac{\mu-1}{2}\left(\frac{\mu-1}{2}-1\right)}{1.2}4.3.2+\frac{\frac{\mu-1}{2}\left(\frac{\mu-1}{2}-1\right)\left(\frac{\mu-1}{2}-2\right)}{1.2.3}6.5.4\ldots\right]\\
&+2\frac{\sin x}{x^5}\left[+\frac{\frac{\mu-1}{2}\left(\frac{\mu-1}{2}-1\right)}{1.2}4.3.2.1-\frac{\frac{\mu-1}{2}\left(\frac{\mu-1}{2}-1\right)\left(\frac{\mu-1}{2}-2\right)}{1.2.3}6.5.4.3\ldots\right]\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$\theta(x,\mu)$ sera donc toujours de la forme

$$\varphi(x)\sin x+\psi(x)\cos x,$$

comme cela résulte évidemment des formes des équations (10) et (11). En outre, nous savons que cette valeur de V

$$(12)\qquad V_1=k_1[\varphi(x)\sin x+\psi(x)\cos x]$$

satisfait à l'équation différentielle donnée; nous allons démontrer que

$$(13)\qquad V_2=k_2[\psi(x)\sin x-\varphi(x)\cos x]$$

satisfera aussi à la même équation, et par suite que l'intégrale complète sera

$$V=\sin x[k_1\varphi(x)+k_2\psi(x)]+\cos x[k_1\psi(x)-k_2\varphi(x)].$$

En effet, substituons à V la valeur (12) dans l'équation (6), on aura, en désignant les dérivées par rapport à x par des accents,

$$\begin{aligned}
&k_1(\varphi''\sin x+\psi''\cos x+2\varphi'\cos x-2\psi'\sin x-\varphi\sin x-\psi\cos x)\\
&\quad+k_1\frac{\mu+1}{x}(\varphi'\sin x+\psi'\cos x+\varphi\cos x-\psi\sin x)\\
&\qquad\qquad+k_1(\varphi\sin x+\psi\cos x)=0.
\end{aligned}$$

Pour que le premier membre soit identiquement nul, quel que soit x, il faut que les facteurs de $\sin x$ et $\cos x$ soient nuls séparément; d'où

$$\varphi'' - 2\psi' - \varphi + \frac{\mu+1}{x}(\varphi' - \psi) + \varphi = 0,$$

$$\psi'' + 2\varphi' - \psi + \frac{\mu+1}{x}(\psi' - \varphi) + \psi = 0.$$

Or la substitution de V_2 à V dans (6) donnera

$$\begin{aligned} k_2(\psi''\sin x - \varphi''\cos x + 2\psi'\cos x + 2\varphi'\sin x - \psi\sin x + \varphi\cos x) \\ + k_2\frac{\mu+1}{x}(\psi'\sin x - \varphi'\cos x + \psi\cos x + \varphi\sin x) \\ + k_2(\psi\sin x - \varphi\cos x) = 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} k_2\sin x\left[\psi'' + 2\varphi' - \psi + \frac{\mu+1}{x}(\psi' + \varphi) + \psi\right] \\ + k_2\cos x\left[-\varphi'' + 2\psi' + \varphi + \frac{\mu+1}{x}(-\varphi' + \psi) - \varphi\right] = 0. \end{aligned}$$

Les facteurs de $\sin x$ et $\cos x$ étant les mêmes que plus haut, où ils étaient nuls, puisque V_1 est l'intégrale de l'équation différentielle (6), la même chose a encore lieu, et l'intégrale générale de

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{\mu+1}{x}\frac{dV}{dx} + V = 0,$$

lorsque μ est impair, sera

$$V = \sin x[k_1\varphi(x) + k_2\psi(x)] + \cos x[k_1\psi(x) - k_2\varphi(x)],$$

où φ et ψ sont déterminés par la relation

$$\theta(x,\mu) = \varphi(x)\sin x + \psi(x)\cos x,$$

et sont faciles à déterminer par les formules (10), (11) et (3).

Lorsque μ est pair, nous n'avons qu'une intégrale particulière $k\theta(x,\mu)$ et la fonction est sous forme de série.