JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

W. FIEDLER

Géométrie et géomécanique. Aperçu des faits qui montrent la connexion de ces sciences, dans l'état présent de leur développement

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 4 (1878), p. 141-176.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1878_3_4__141_0>

Géométrie et Géomécanique. Aperçu des faits qui montrent la connexion de ces sciences, dans l'état présent de leur développement (*) ;

PAR M. W. FIEDLER.

A l'article 170 de mon Ouvrage : « Die darstellende Geometrie in organischer verbindung mit der Geometrie der Lage », 2e édition 1875, j'ai, en traitant de la réciprocité involutoire du système focal (*Null-system*), fait tout particulièrement ressortir que ce système est l'expression purement géométrique des deux problèmes de la composition des forces dans l'espace et du mouvement d'une figure de forme invariable et, par conséquent, l'un des fondements essentiels de la Statique graphique et de la Cinématique. J'ai eu soin, bien entendu, de citer, en même temps, les passages des ouvrages de MÖBIUS et de STAUDT qui se rapportent à la connexion ainsi signalée.

J'ai insisté, alors, sur cette remarque, dans la conviction qu'elle portait sur une corrélation, non pas seulement apparente, mais véritablement essentielle, et par ce motif que, dans ma pratique de l'enseignement, j'avais éprouvé que, poussée plus loin, l'étude de ces rapports fournissait un exemple singulièrement fécond de l'usage de la Géométrie de position, exemple d'ailleurs particulièrement important pour les études mathématico-techniques. Si je reviens aujourd'hui sur le même sujet, c'est que j'ai à rendre compte de certains développements obtenus récemment et bien dignes de l'attention du monde savant : je veux parler des ouvrages du savant anglais M. R.-ST. BALL, l'astronome le Dublin.

(*) Cette Notice a paru, en allemand, dans la *Vierteljahrsschrift der Zürcher Naturforsch. Gesellschaft*, vol. XXI, p. 186 et suivantes; elle avait été le texte d'une leçon semestrale faite, en 1876, aux élèves de la 6e section de l'École Polytechnique fédérale.

Je vais énumérer ici ces ouvrages, une fois pour toutes.

Après un exemple préliminaire, traité dans un Mémoire intitulé : « On the small oscillations of a rigid body about a fixed point under the action of any forces, etc. » *Transact. of the R. Ir. Acad.*, vol. XXIV, 1870, p. 598 ; M. R.-St. Ball publia : « The theory of screws », *ibid.*, vol. XXV, nov. 1871, p. 137-217, où sont établis les principes fondamentaux de la nouvelle doctrine; puis il donna, dans le même recueil, un travail intitulé : « Screw coordinates and their applications to problems in the dynamics of a rigid body », vol. XXV, janv. 1874, p. 259-327.

Vinrent ensuite les Mémoires suivants:

« Researches on the dynamics of a rigid body by the aid of theory of screws », *Philosoph. Transactions*, vol. CLXIV, p. 15-40, 1874.

A sketch in the theory of screws; Problems in the mechanics of a rigid body which has three degrees of freedom », Hermathena : « A series of papers of litterature, Science and Philosophy, by Members of Trinity College, Dublin », n° II, 1874, p. 506-519.

Et enfin, en un volume in-8° de 13 feuilles: « The theory of screws. A study in the dynamics of a rigid body », Dublin, 1876, qui constitue le résumé final de toute cette théorie et dont l'auteur lui-même a rendu compte dans le volume IX des *Matematische Annalen*, p. 541-553.

I. Il ne saurait échapper à aucun lecteur attentif aux récentes productions sur cette matière que la manière de traiter scientifiquement la Mécanique ne se soit modifiée, en ces derniers temps, dans le sens d'une recherche plus curieuse de la *représentation géométrique* en général, comme aussi, en particulier, dans celui d'une étude plus approfondie des parties à proprement parler géométriques de cette science. Il n'est guère de nouvel ouvrage d'enseignement, tant soit peu remarquable, qui ne témoigne, à nouveau, de cette tendance (*voir* spécialement l'Ouvrage si substantiel de M. W. Schell, intitulé : « Theorie der Bewegung und der Kräfte », Leipzig, 1870). Ce sont les innovations glorieuses de MM. Chasles, Poinsot et Möbius qui s'imposent, de haute lutte, à l'acceptation universelle.

Ce mouvement pourtant ne put que par sa liaison avec la nouvelle Géométrie de la ligne droite, telle que l'a instituée Plucker depuis 1865, aboutir à une conclusion systématique. On sait que Plucker lui-même a fait suivre son grand Traité : « On a new Geometry of space », publié dans les *Philos. Trans.* de 1865, p. 725-791, d'un plus petit intitulé : « Fondamental views regarding mechanics », *Philos. Trans.*, p. 361-380, 1866; et en effet, c'est en développant ce qu'il n'avait fait qu'indiquer là, vaguement et en rattachant systématiquement, entre elles, les conséquences qu'il y avait énoncées, que l'on est parvenu aujourd'hui à un résultat véritablement satisfaisant. Le livre cité plus haut, de M. R.-S. Ball, peut, à bon droit, passer pour le nouveau Traité de Mécanique auquel Plucker faisait allusion, à la fin de son dernier Ouvrage.

Ce développement a pris naissance au siècle dernier, dans les recherches géométriques de d'Alembert et d'Euler sur le mouvement d'un système de forme invariable à trois dimensions (recherches qui, d'abord en 1749 et 1750, portèrent sur un déplacement *infiniment petit* et conduisirent à la découverte de l'axe instantané de rotation; puis, en 1775 et 1780, s'appliquèrent à un déplacement *fini* autour d'un point fixe et firent reconnaître qu'un tel déplacement équivaut à une rotation autour d'un axe passant par ce point fixe), ou encore dans un Traité publié en 1763 par Giulio Mozzi sous le titre de : « Discorso matematico sopra il rotamento momentanei dei corpi ». Là, en effet, pour la première fois, on s'était appliqué à étendre, au cas de l'espace à trois dimensions, la notion du centre instantané de rotation d'un système de forme invariable situé dans un plan, déjà utilisée par Descartes et démontrée en toute généralité par Jean Bernoulli en 1742. Reprenant à son tour ces recherches, M. Chasles établit le premier, en 1830, dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XIV, p. 322, que *le mouvement hélicoïdal est la forme canonique du mouvement d'un système de forme invariable*, et revint encore plus tard sur ce théorème, pour en donner la démonstration géométrique rigoureuse dans son « Aperçu historique », Note XXXIV, p. 408 et suiv., et mieux encore dans les *Comptes rendus* de 1843, t. XVI, p. 1420, et dans ceux de 1860 et 1861, t. LI, p. 855 et suiv., et t. LII, p. 77 et suiv.

Ces travaux ont donné naissance, jusqu'en ces derniers temps, à une série de commentaires démonstratifs de MM. de Jonquières, Laguerre, Mannheim, Brisse, etc., mais ils trouvent leur expression la plus complète et la plus simple : à un point de vue dans le *système focal* ou le *complexe linéaire* et, à un autre, dans une *forme spéciale de la collinéation des espaces.*

Le *premier cas* se présente lorsqu'il s'agit d'amener le système de forme invariable d'une première position dans une seconde. Ce passage peut s'effectuer d'une infinité de manières par des rotations successives autour de deux axes rectilignes conjugués. De tels axes de rotation conjugués sont des droites qui se correspondent dans la réciprocité involutoire du système focal. Les droites qui sont, à elles-mêmes, leurs correspondantes (et toutes les transversales de ces couples conjugués le sont) constituent le complexe linéaire correspondant, dans lequel par chaque point passent une infinité de rayons contenus dans un plan, et dans chaque plan se trouvent une infinité de rayons passant par un même point (*plan focal* ou *nullebene* du point et *foyer* ou *nullpunkt* du plan). Aux droites d'une certaine direction correspondent des droites à l'infini, appartenant aux combinaisons de rotation et de translation au moyen desquelles s'accomplit le passage de l'une à l'autre position ; à l'*une* de ces droites, celle qui se nomme, soit l'*axe central du mouvement*, soit l'*axe du système focal ou du complexe,* correspond enfin la position de ses plans normaux, c'est-à-dire que l'on a à combiner une rotation autour de cette droite avec un glissement de celle-ci sur elle-même, combinaison d'où résulte précisément le *mouvement hélicoïdal* capable d'amener le système de son ancienne position à sa nouvelle et qui est la *forme canonique du mouvement.* Que l'on parte de la considération, soit du système focal, soit du complexe linéaire, on est conduit, avec une égale simplicité, à reconnaître les dépendances métriques des foyers des plans et des plans focaux des divers points de l'espace, ainsi que des couples de droites conjuguées de l'axe central ; comme aussi la signification de ces éléments, pour les différentes phases du mouvement : du plan focal du point comme du plan normal de sa trajectoire, des droites conjuguées à elles-mêmes, ou droites du complexe, comme des droites de l'espace dont les points se meuvent suivant leurs propres normales.

Le paramètre du complexe linéaire, la seule constante qui figure dans l'équation de ce complexe rapporté à son axe (*voir* mon ouvrage « Darstell. Geom. », art. 170) apparaîtra, plus loin, avec une double signification mécanique.

Le *second cas*, celui où il convient de considérer les *espaces collinéaires sous la forme particulière de la congruence*, se manifeste quand il s'agit des deux positions du système de forme invariable envisagées en elles-mêmes et dans leur connexion purement géométrique. Le tétraèdre des quatre points et plans qui sont à eux-mêmes leurs correspondants dégénère de telle sorte que, de six arêtes, une seule, comme *axe central*, reste réelle et à distance finie, à savoir celle qui porte deux ponctuelles et faisceaux de plans de même sens et dont, par suite, les points qui se correspondent à eux-mêmes se trouvent réunis en leur point à l'infini, tandis que les plans qui se correspondent à eux-mêmes sont imaginaires et tangents au cercle sphérique imaginaire infiniment éloigné. Ce dernier se correspond à lui-même, parce qu'*une sphère demeure* encore *une sphère après le mouvement;* tandis que ses points peuvent être considérés comme disposés par couples se correspondant projectivement, en sorte que deux d'entre eux, dont les tangentes se coupent à l'infini sur l'axe central, se correspondent à eux-mêmes et représentent ainsi des arêtes doubles du tétraèdre considéré; alors la ligne qui joint ces deux points devient la sixième arête de ce tétraèdre, et, en conséquence, le plan à l'infini lui fournit son seul couple de plans réels. Les lignes qui joignent les couples de points conjugués et les intersections des couples de plans conjugués forment un seul et même complexe tétraédral.

Soient trois couples de points des deux espaces, AA′, BB′ et CC′, les points milieux M_a, M_b et M_c des droites AA′, BB′ et CC′ et les droites M_bM_c ou m_a, respectivement m_b et m_c; puis encore les plans N_a, N_b N_c, normaux, respectivement, aux droites AA′, BB′ et CC′, en leurs points milieux, et les intersections N_bN_c ou n_a, respectivement n_b et n_c de ces plans. On obtient l'axe central, soit par trois de ses normales, à savoir les normales communes des couples $m_a\, n_a$, $m_b\, n_b$ et $m_c\, n_c$ (et cette construction demeure applicable dans le cas d'un mouvement infiniment petit comme dans celui où les déplacements de A, B et C ne sont connus qu'en *direction*), soit en formant, avec un point O comme sommet commun, les parallélogrammes OAA′A*, OBB′B* et OCC′C*, projetant orthogonalement les triangles ABC, A′B′C′ sur le plan A*B*C* puis élevant au point central de leurs projections, c'est-à-dire à l'intersection des perpendiculaires menées, en leurs milieux, aux cordes qui en joignent les sommets correspondants, la normale à ce plan $A^*B^*C^*$.

II. Continuant à nous occuper du mouvement *infiniment petit* d'un système de forme invariable, nous dirons qu'il peut être défini comme un *mouvement hélicoïdal* ou une *torsion* et se trouve déterminé, savoir :

Par son *axe*, une certaine droite de l'espace;

Par un *paramètre linéaire p*, adjoint à cet axe et indiquant la grandeur de la translation, suivant cette droite, qui répond à la rotation de l'angle unité, quand cet angle est exprimé en fraction de l'arc; ce paramètre peut être désigné sous le nom de *flèche* de la torsion ou de l'hélice;

Enfin, par l'angle de rotation a' ou l'*amplitude*, laquelle, précisément, peut être imaginée infiniment petite.

On le voit, le mouvement d'un système de forme invariable exige, pour sa détermination, *six grandeurs algébriques*, dont quatre servent à fixer la position de l'axe; pendant que la cinquième définit l'hélice, et la sixième, la torsion ou mouvement hélicoïdal. La cinquième de ces grandeurs, la flèche, est nulle dans le cas d'une rotation simple, et infinie dans celui d'une translation simple.

D'autres considérations peuvent encore conduire aux mêmes résultats à l'égard des conditions nécessaires à la détermination d'un système de forme invariable. Ainsi, par exemple, des déductions purement géométriques ont amené M. Mannheim, au cours de ses études sur cette théorie, à énoncer :

Que *six* conditions, telles que la position d'un point sur une surface donnée, *fixent* un pareil système;

Que *cinq* lui permettent un mouvement *déterminé*, dans lequel chaque point, en général, décrit une trajectoire ou un élément de courbe;

Que *quatre* comportent une *infinité simple* de mouvements, tels qu'à chaque point, en général, répond, comme lieu du faisceau de ses trajectoires possibles, une surface trajectoire;

Et que *trois*, enfin, sont compatibles avec une *infinité double* de mouvements, tels qu'à chaque point, en général, correspond un pinceau de trajectoires.

En outre, dans son « Étude sur le déplacement d'une figure de forme invariable », *Recueil des Mémoires des Savants étrangers*, t. XX et

Journal de l'École Polytechnique, Cah. XLIII, 1868-1870, M. MANNHEIM a donné les deux importantes propositions ci-après énoncées.

1. Dans le cas du mouvement d'indétermination *simplement* infinie, il existe *deux lignes droites* aux points desquelles répondent, non pas des surfaces trajectoires, mais bien de simples trajectoires, à savoir : aux points de l'une de ces droites, des rotations simples autour de l'autre. Ces droites jouissent, par suite, de la propriété d'être rencontrées par les normales aux surfaces trajectoires de tous les points du système (propriété déjà annoncée en 1866, dans le tome XI du *Journal de Mathématiques*), et se trouvent ainsi déterminées par les normales aux surfaces trajectoires de quatre points donnés, comme étant leurs transversales communes. L'analogie est évidente avec le cas du mouvement dans un plan, où les normales aux trajectoires de tous les points passent par le centre instantané, et avec celui du mouvement déterminé dans l'espace, où les plans normaux aux trajectoires des points d'un plan se rencontrent au point focal de ce dernier.

2. Dans le cas du mouvement d'indétermination *doublement* infinie, il existe un *hyperboloïde à une nappe*, lieu des points qui, quel que soit le mouvement du système, ne peuvent se mouvoir que suivant les rayons d'un faisceau et non suivant ceux d'un pinceau.

Ces résultats ont été retrouvés par M. BALL, comme des cas particuliers de théorèmes généraux, dans ses recherches relatives aux mouvements doués du *second* ou du *troisième degré de liberté* ; et, en particulier, l'hyperboloïde de la deuxième proposition précitée avait déjà, avant M. MANNHEIM, fait son apparition dans les travaux de PLÜCKER sur le groupe à trois membres de complexes linéaires.

Géométriquement, M. MANNHEIM a fait un usage excellent de la première de ces propositions dans son « Mémoire sur les pinceaux de droites et les normalies, contenant une nouvelle exposition de la théorie de la courbure des surfaces », *Journal de Mathématiques*, t. XVII, 1872. Il y donne, très-complète, la théorie géométrique du *pinceau de droites infiniment mince*, c'est-à-dire de la congruence de rayons engendrée par une droite dans le mouvement d'indétermination simplement infini, et se sert pour cela, essentiellement, d'un procédé d'étude graphique de l'élément de surface gauche, que j'ai coutume de développer, dans la théorie des surfaces réglées, comme une simple application des propriétés des plans H′ (*D. Geom.*, art. 46, 3, 4; art. 49, 5), et qui, par suite, est indiqué à l'endroit cité (p. 753, dans une Note se rapportant à la page 415, 6). M. Mannheim conclut ensuite, de l'hypothèse que les rayons de la congruence sont des normales de la même surface courbe, à la réalité nécessaire des deux droites qu'il a signalées et déduit, de cette même hypothèse, la *théorie de la courbure des surfaces*. (*Voir* aussi, dans le *Journal de Mathématiques*, t. XVII, p. 406, l'ingénieux travail du même auteur : « Sur la surface gauche, lieu des normales principales de deux courbes » et, dans les *Comptes rendus*, t. LXXIV, p. 372, 852, 928, ses Notes sur le théorème de Meusnier et sur le contact de troisième ordre de deux surfaces.)

Le même éminent géomètre a aussi fait des recherches sur les *trajectoires* que suivent les points séparés d'une droite, pendant le mouvement déterminé de celle-ci (*Comptes rendus*, mars 1873), et sur les *surfaces trajectoires* des points d'un système de forme invariable animé d'un mouvement d'indétermination simplement infinie, sous quatre conditions (*Recueil des Savants étrangers*, t. XXII), et a donné, à ce sujet, d'intéressants résultats, qu'il est aisé d'établir et, çà et là, de compléter. Ils constituent l'extension des théorèmes sur le mouvement des droites dans un plan, d'après lesquels les tangentes des trajectoires des points de ces droites enveloppent une parabole, pendant que leurs centres de courbure décrivent une section conique; en sorte que les points d'intersection de cette dernière avec la droite considérée seraient des points pour les trajectoires desquels le cercle de courbure serait de rayon nul, c'est-à-dire des points aux repos, comme il ne s'en peut rencontrer que sur les droites imaginaires dirigées, du centre instantané du plan, vers les points circulaires imaginaires à l'infini. Il convient de faire remarquer, à ce propos, que le théorème sur la distribution des centres de courbure dans les sections coniques a été donné comme dû à M. Rivals, et péniblement établi au moyen de l'analyse, par M. Bresse, dans le XXXV^e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, mais qu'il peut être, d'une manière très-directe, démontré par la Géométrie. Les tangentes des *trajectoires* des points d'une droite engendrent, dans l'espace, un paraboloïde hyperbolique, dont l'un des plans directeurs est normal à sa droite conjuguée; en conséquence, les plans osculateurs de ces trajectoires engendrent la développable d'une parabole cubique;

leurs axes de courbure, un hyperboloïde; leurs centres de courbure, une courbe à double courbure du cinquième ordre; les centres de leurs sphères osculatrices, une courbe à double courbure de troisième ordre, etc. Enfin, ceux d'entre les points de l'espace qui forment, sur leurs trajectoires, des points d'inflexion, sont situés sur une surface imaginaire du quatrième ordre ayant pour courbe double réelle la parabole, qui, d'après M. Resal, *Journal de l'École Polytechnique*, XXXVII^e Cahier, p. 344, contient les points d'accélération normale nulle. Les autres points, auxquels correspondent des plans osculateurs stationnaires des trajectoires, c'est-à-dire, selon la terminologie de Cinématique française, les points à suraccélération binormale nulle, figurent une surface du troisième ordre; en sorte qu'il existe, en général, trois droites dont tous les points jouissent de cette propriété et que cette propriété appartient à tous les points d'une droite, dès que quatre d'entre eux la possèdent, etc. Par contre, les normales des *surfaces trajectoires* des points d'une droite forment un hyperboloïde et cet hyperboloïde admettant, en général, deux génératrices perpendiculaires à la droite considérée, il existe sur cette dernière deux points dont les surfaces trajectoires la touchent elle-même, etc. Ici entrent en scène, outre les paraboloïdes et les hyperboloïdes, des courbes à double courbure du troisième, du sixième ordre, des surfaces réglées du quatrième et du sixième degré, des surfaces gauches du troisième, du huitième ordre : tout un attirail, en un mot, d'outils précieux pour l'exploration géométrique approfondie du champ de la Cinématique. Un exemple : les points de l'espace qui, au cours d'un mouvement assujetti à quatre conditions, décrivent des trajectoires tangentes à une ligne asymptotique de la surface trajectoire correspondante, sont situés sur une surface du troisième ordre qui contient les deux axes des rotations simples; il y a donc, dans l'espace, au moins *une* droite réelle dont *tous* les points se meuvent suivant des éléments des lignes asymptotiques de leurs surfaces trajectoires. On cherche, d'une manière analogue, les points de l'espace se mouvant suivant des lignes de courbure, comme aussi ceux dont les surfaces trajectoires présentent des conditions de courbure particulières.

Lorsque la *mobilité d'un point, en tous sens*, est douée du troisième degré de liberté, sa mobilité *sur une surface* douée du second et, *sur* *une courbe*, du premier, il se trouve, suivant une remarque déjà faite, que le *système de forme invariable* ou le corps solide jouit tout au plus d'une *liberté du mouvement du sixième degré;* cette propriété est accusée aussi bien par la décomposition connue du mouvement général en trois translations simultanées suivant trois axes rectangulaires et trois rotations, également simultanées, autour de ces mêmes axes, que par ce théorème de Möbius, aux termes duquel un corps qui peut tourner autour de six axes, indépendants entre eux, peut prendre tous les mouvements imaginables (« Ueber die Zusammensetzung unendlich kleiner Drehungen », dans le *Journal de Crelle*, vol. XVIII, 1838, p. 189); il y a *liberté pour une sextuple infinité de torsions ou pour des torsions suivant un système hélicoïdal à six dimensions*. Dans le premier cas de la décomposition élémentaire, trois des torsions composantes ont la flèche nulle et les trois autres l'ont infinie. Et l'on voit facilement qu'en astreignant un ou plusieurs points à décrire une surface ou une courbe convenable, on peut, mais seulement sous des formes spéciales, restreindre la liberté du mouvement dans les limites de l'un quelconque des degrés inférieurs au sixième : par exemple, dans celles du premier degré, sous la forme particulière de la rotation, en immobilisant deux points ou en en assujettissant cinq à se mouvoir sur des surfaces fixes, etc.; dans celles du troisième, de même particulièrement, en fixant un point ou en en assujettissant trois à parcourir des surfaces déterminées, etc. Mais il importe de faire spécialement remarquer que *la liberté de mouvement du cinquième degré ou suivant un système hélicoïdal à cinq dimensions, dans sa forme la plus générale,* peut être obtenue par l'emploi de ce mécanisme si simple que l'on connaît sous le nom de *joint universel* ou *clef de Hoocke*. Que l'on suppose l'un des cylindres d'un tel appareil taillé en forme de vis et l'écrou de cette vis invariablement lié à un système rigide, puis son autre cylindre rattaché, par un deuxième joint universel, à un axe fixe : le système rigide considéré jouira d'une liberté de mouvement du cinquième degré absolument générale.

III. Le moment est venu de parler des *forces considérées comme les causes du mouvement* et de rappeler que Poinsot, dans son Traité de 1804 « Sur la composition des moments et la composition des aires », que l'on trouve dans le tome VI, XIII^{e} Cahier du *Journal de l'École*

Polytechnique, 1806, a démontré que tout *système de forces*, dans l'espace à trois dimensions, peut être, *d'une seule manière*, mis sous une *forme canonique*, c'est-à-dire réduit à une force unique et à un couple agissant dans un plan normal à cette force; puis aussi, que cet *axe central du système de forces* se distingue par cette propriété que le couple résultant qui lui correspond a pour moment axial le plus petit de ceux qui lui appartiennent (p. 193 du même Mémoire). Il convient d'ajouter encore que, dans le substantiel chapitre VI du I^{er} volume de son « Lehrbuch der Statik », 1837, et dans le X^{e} volume du *Journal de Crelle*, Möbius a traité de la même théorie et exposé de profondes recherches sur la réciprocité géométrique qu'elle fait apparaître, à savoir le système focal précédemment considéré; et enfin que M. Cremona a fondé la théorie du *polygone des forces* et du *polygone funiculaire*, dans la Statique graphique, sur la projection orthogonale de figures réciproques dans le système focal, suivant l'axe de ce système ou l'axe central.

La forme canonique du système de forces et celle du mouvement des corps solides sont, on l'a pu remarquer, *absolument identiques;* et cela non-seulement en ce sens que force unique et translation, couple et rotation, se répondent respectivement et que le même nombre de données sont nécessaires à la détermination, soit de celle-là (le *torseur*), soit de celle-ci (la *torsion*), à savoir pour le torseur :

Quatre grandeurs qui déterminent la ligne d'action de la force unique;

Un paramètre linéaire p, la *flèche*, qui exprime le quotient du moment du couple par la force unique (combiné avec celles-là, il détermine une vis, comme précédemment);

Et l'intensité α'' de la force;

Mais encore, au point de vue des relations géométriques qu'ont ces deux formes avec les produits d'autres décompositions, tels que couples de forces uniques obliques entre elles, axes de rotations conjugués, etc. : toutes propriétés qu'exprime également, pour les deux, le système focal ou le complexe linéaire.

Or, à cette identité répond, et on l'a vite aperçu, une nouvelle manière de traiter, non-seulement la Cinématique et la Statique, mais aussi la Dynamique des systèmes invariables.

M. Battaglini a entrepris une exposition de ce genre avec le secours des coordonnées tétraédrales et de la Géométrie linéaire, dans une série de traités relatifs au mouvement des systèmes invariables, à la composition des forces, aux moments simples et moments d'inertie et aux dynames en involution (1869-71, *Giornale di Matematiche*, vol. X et XI, p. 133, 175, 181, 207, 295; 62, 359 ou années 1872, 1873). Les travaux sur la Géométrie linéaire de M. F. Klein, publiés dans les *Math. Annalen*, vol. II, p. 198 et 366, 1869, et vol. IV, p. 403, 1871, ont ensuite apporté d'importants perfectionnements à la théorie basée sur ces nouvelles considérations. D'un autre côté, M. Everett (*Messenger of Mathematics*, new series, n° 39, 45, 53; 1874-1875) a employé à ces recherches la méthode des *quaternions* et son travail, qu'une étroite affinité, tant des idées fondamentales que des résultats, rattache à ceux de M. Ball, desquels je rendrai compte plus en détail, forme à ces derniers comme une adjonction naturelle. M. Clifford aussi, dans son Mémoire « On biquaternions », s'est placé au même point de vue, ainsi que je l'ai déjà expressément signalé dans les citations de la dernière édition allemande de la *Analyt. Geom. des Raumes* d'après M. G. Salmon, vol. II, p. 682. M. Lindemann, enfin (*Mathem. Annalen*, vol. VII, p. 56), a étudié les mouvements infiniment petits des corps solides, dans le cas d'une détermination de mesure projective générale, et les modifications correspondantes des lois de M. Chasles et de Möbius; puis aussi, développé des extensions de la théorie que M. Ball également avait, pour le cas de la détermination de mesure ordinaire, découvertes indépendamment des résultats entièrement connus. Toutefois, pour ne pas m'éloigner, dans ce qui va suivre, de la Mécanique proprement dite, je laisserai de côté l'extension à la détermination de *mesure* générale, ainsi qu'aux variétés à n dimensions.

IV. M'en tenant à cette Mécanique, je supposerai d'abord que, pendant la recherche, le système solide ne s'écarte qu'infiniment peu de sa position initiale, et ne soit soumis qu'à des forces qui, pour une même position, soient de même grandeur; et ensuite, que toute production continue de travail ou d'énergie y soit impossible.

La première de ces hypothèses exclut la considération de forces telles que celles d'un milieu résistant et du frottement; la seconde restreint l'étude au cas de forces existant dans la nature. Cette dernière s'accorde, en l'état présent de nos connaissances, avec l'hypothèse de la détermination de mesure ordinaire. Toutes deux font du système considéré un système *dynamique conservateur,* suivant l'expression technique actuellement consacrée.

La *composition* des mouvements, c'est-à-dire des *torsions,* et des systèmes de forces, c'est-à-dire des *torseurs,* en torsions ou torseurs résultants, est, naturellement, le *premier* des problèmes à résoudre, et le premier résultat capital de cette étude est l'*accord* des règles de la composition pour les deux cas. Il résulte de la détermination de la quantité de travail développée pendant le déplacement du système, ou pendant une torsion déterminée par rapport à un système de forces donné ou à un torseur, que ce travail est la somme de ceux des forces composantes dans les mouvements composants et qu'il s'exprime par le produit d'une certaine fonction symétrique, le *coefficient virtuel* ω_{12}, des grandeurs géométriques qui déterminent les deux vis, par l'intensité α'' du torseur et par l'amplitude α' de la torsion, soit par

$$\alpha'_1 \alpha''_2 \omega_{12} \quad \text{ou} \quad \alpha'_1 \alpha''_2 [(p_1 + p_2)\cos\lambda - d\sin\lambda],$$

expression où d désigne la plus courte distance et λ l'angle des axes des deux vis, et p_1, p_2 les flèches correspondantes.

Ce travail est donc nul, c'est-à-dire que le système qui n'est capable que de la torsion autour de la vis 1 demeure en repos sous l'action d'un torseur suivant la vis 2, ou que les deux vis considérées sont *réciproques,* quand ω_{12} s'annule, c'est-à-dire quand

$$p_1 + p_2 = d \operatorname{tang} \lambda,$$

et en particulier lorsque $d = 0$ ou $\lambda = 0$ pour $p_1 + p_2 = 0$ et lorsque $\lambda = 90°$ pour $d = 0$.

Deux vis à flèche infinie sont encore réciproques, parce qu'un couple de forces ne saurait mouvoir un corps qui n'est capable que d'un déplacement par translation, et les vis à flèche infinie ou nulle sont réciproques à elles-mêmes. La première de ces proportions résulte de ce qui précède, la seconde de ce que, les deux vis étant identiques, le travail est égal à $2p\alpha'_1 \alpha''_2$. La condition générale de la réciprocité est une *relation de position des deux vis* ou *des complexes linéaires qu'elles représentent;* M. F. Klein l'a désignée sous le nom d'*involution* (*Math. Annalen*, vol. II, p. 366. Le coefficient virtuel est l'invariant simultané des deux complexes linéaires considérés dans ce Mémoire) et exprimée géométriquement par cette propriété que les couples des foyers des plans d'un faisceau qui a pour arête un rayon commun aux deux complexes forment sur ce rayon une involution ayant pour points doubles ses intersections avec les directrices de la congruence de tous les rayons communs. Cette condition consistant en *une seule* relation, et *cinq* données étant nécessaires pour déterminer une vis, il existe, de vis réciproques :

Pour *cinq* vis données, un nombre déterminé, par le fait une seule ;

Pour *quatre*, un système d'infinité simple, c'est-à-dire une surface réglée ;

Pour *trois*, une congruence ;

Pour *deux*, un complexe ;

Et pour *une*, un système d'infinité quadruple ou à quatre dimensions, à savoir : sur chaque droite de l'espace, une vis réciproque à la vis donnée et dont la flèche se détermine par l'évanouissement du coefficient virtuel. Les vis réciproques de flèche donnée forment un faisceau passant par un point ou situé dans un plan ; celles de flèche nulle forment le plan focal (*nullebene*) ou le foyer (*nullpunkt*) de la théorie de Möbius.

Il est clair que, pour chaque degré de liberté du système, la *réaction des conditions* ou *résistances* qui restreignent sa mobilité fait naître ou représente un *torseur suivant l'une des vis réciproques à ce système*, et, en outre, que la *condition de l'équilibre* consiste simplement en ceci, que les forces agissantes constituent un torseur suivant l'une de ces vis.

Comme maintenant, pour les *torsions* autour des vis 1, 2 et 3, avec des amplitudes α'_1, α'_2, α_3, qui se *neutralisent entre elles*, c'est-à-dire dont chacune est égale et directement opposée à la résultante des deux autres, la somme de leurs travaux contre un torseur quelconque, je veux dire suivant la vis i et avec l'intensité α''_1, doit être nulle, on a, pour la condition de cette neutralisation et identiquement pour tous les i l'égalité

$$\alpha'_1 \omega_{1i} + \alpha'_2 \omega_{2i} + \alpha''_3 \omega_{3i} = 0,$$

et de même, pour *trois torseurs qui se font équilibre*, on a identiquement pour tous les i

$$\alpha''_1 \omega_{1i} + \alpha''_2 \omega_{2i} + \alpha''_3 \omega_{3i} = 0.$$

Au moyen de trois vis déterminées i, on élimine *dans le premier cas* les amplitudes, *dans le second* les intensités et, obtenant *dans les deux* cas la même relation entre les déterminations géométriques des vis 1, 2, 3, on en conclut que *les mêmes lois régissent la composition des torsions et celle des torseurs*. Mais le problème même de la *composition de deux torsions* ou de *deux torseurs* se résout par une *surface réglée gauche du troisième degré* que l'on trouve, pour la première fois, dans Plucker, *Philos. Transact.*, vol. CLV, p. 756, formule (88), 1865, et *Neue Geometrie des Raumes*, p. 97, formule (143), et que Cayley a nommée *cylindroïde*. Si, en effet, il s'effectue respectivement autour de deux vis 1, 2, se coupant à angle droit, situées en x, y et de flèches p_1, p_2, des torsions d'amplitude $\theta' \cos\lambda$ et $\theta' \sin\lambda$, l'axe de rotation résultant θ, auquel correspond l'amplitude θ', est défini par les équations

$$z = \sin\lambda \cos\lambda (p_1 - p_2),$$

où z représente la distance de cet axe au plan xy, et

$$y = x \tan\lambda.$$

La composante, suivant cet axe de rotation résultant, de la translation a pour expression

$$\theta'(p_1 \cos^2\lambda + p_2 \sin^2\lambda).$$

La torsion résultante a la direction déterminée par λ et pour flèche

$$p = p_1 \cos^2\lambda + p_2 \sin^2\lambda,$$

quantité proportionnelle, ainsi, à l'inverse du carré du rayon de même direction d'une conique $p_1 x^2 + p_2 y^2 = \rho$.

L'axe de cette torsion est situé sur la surface conoïde cubique

$$z(x^2+y^2)=(p_1-p_2)xy,$$

qui contient les axes x et y simplement et l'axe z doublement, et que les plans bissecteurs $x=\pm z$ (*Darstell. Geom.*, art. 46, 3; 49, 5) coupent suivant des ellipses congruentes dont le rapport des axes est $\sqrt{2}$, dont les projections sur xy sont les cercles égaux

$$[x\mp\tfrac{1}{2}(p_1-p_2)]^2+y^2=\tfrac{1}{4}(p_1-p_2)^2,$$

se touchant en O, ayant leurs centres aux points $\pm\frac{1}{2}(p_1-p_2)$ de l'axe des x et, respectivement, symétriques ou, par superposition, congruentes aux projections des mêmes ellipses sur xz.

En conséquence, les projections sur xy des génératrices forment un faisceau de droites rayonnant autour du point O; parmi ces droites, celles qui ont même projection sur xz répondent aux couples d'une involution ayant son pôle dans la direction des x et, par suite, ses rayons doubles sur les lignes à 45 degrés (voir *Darstell. Geom.*, art. 114) qui appartiennent aux *génératrices singulières* de la surface, lesquelles affectent entre elles, dans le sens des z, l'écartement maximum (p_1-p_2).

Que je mentionne maintenant que Plucker a obtenu à l'endroit cité cette surface comme le lieu des axes de tous les complexes linéaires d'un système linéaire d'infinité simple, c'est-à-dire de premier degré, ou d'un faisceau de complexes, et l'on verra, en se reportant aussi à ce qui précède, que cela correspond exactement au résultat trouvé pour la composition des torsions et torseurs; on en conclura que deux vis déterminent le cylindroïde, ce qui, par le fait, se vérifie aisément, et l'on reconnaîtra que la résultante de deux torsions ou torseurs suivant ces vis doit appartenir à cette surface et être déterminée par sa seule direction. En effet, soient i, k, l trois vis du même cylindroïde, qui aient pour angles de direction $\lambda_{i'}$, $\lambda_{k'}$, $\lambda_{l'}$, et autour desquelles des torsions d'amplitudes α'_i, α'_k, α'_l se neutralisent; il faudra que les angles de rotation résultants, aussi bien que les translations, soient nuls, c'est-à-dire que, pour cette double raison, les équations

$$\alpha'_i \cos\lambda_i + \alpha'_k \cos\lambda_k + \alpha'_l \cos\lambda_l = 0,$$
$$\alpha'_i \sin\lambda_i + \alpha'_k \sin\lambda_k + \alpha'_l \sin\lambda_l = 0$$

se vérifient, ou que l'on ait

$$\alpha'_i : \alpha'_k : \alpha'_l = \sin(\lambda_k - \lambda_l) : \sin(\lambda_l - \lambda_i) : \sin(\lambda_i - \lambda_k).$$

Or cela n'est autre chose que la *règle de la composition des torsions et torseurs au moyen du cylindroïde,* laquelle correspond au parallélogramme des forces et des vitesses, etc., de la Mécanique élémentaire et comprend, en vérité, tout cela comme cas particulier. Elle fournit l'axe et l'amplitude, et la section conique précitée donne la flèche correspondante. Lorsque cette section conique est une hyperbole, les deux vis du système parallèles à ses asymptotes ont une flèche nulle, c'est-à-dire qu'à leurs axes correspondent, comme l'a découvert M. Mannheim, des *rotations simples* comme torsions ou des *forces uniques* comme torseurs. En général, à chaque point P répond un plan trajectoire, qui est normal à l'intersection des deux plans que détermine P avec les vis de flèche nulle. Il est évident que les lois du polygone fermé des torseurs qui se font équilibre et des torsions qui se neutralisent subsistent complétement. Cela prouve que le torseur et la torsion correspondent au système de points, tout comme la force unique et la trajectoire au point unique.

V. Le cylindroïde résout aussi les *questions relatives à la réciprocité,* telle qu'elle a été définie plus haut. Il faut remarquer tout d'abord, à cet effet, qu'une vis réciproque à *deux* autres α_i, α_k l'est nécessairement aussi à toutes les vis du cylindroïde que déterminent, ensemble, ces deux-là; cela résulte de ce que chaque vis de ce cylindroïde peut être considérée comme la résultante de composantes dirigées suivant α_i, α_k. Comme, d'autre part, une droite quelconque de l'espace coupe le cylindroïde en trois points et rencontre en chacun de ces points une vis du système de vis de seconde espèce, qui représente cette surface, il faut, pour que cette droite soit l'axe d'une vis réciproque au cylindroïde, que, pour elle et ces trois vis, l'une ou l'autre forme particulière de la condition de réciprocité pour $d = 0$ soit satisfaite. Il faut donc que la vis réciproque soit normale à l'une des trois vis et que la somme de sa flèche et de la flèche de chacune des deux autres fasse zéro. Aucune autre solution n'est possible, parce que, d'une part, la normale commune à deux vis du cylindroïde ne peut être que la droite double de cette surface et que, d'autre part, en raison de la symétrie des axes des coniques, la même flèche $p_1 \cos^2\lambda + p_2 \sin_2\lambda$ répond aux directions λ et $(\pi - \lambda)$. On obtient donc les *axes des vis passant par un point donné et réciproques à un cylindroïde,* c'est-à-dire à deux vis données, en abaissant, de ce point, des perpendiculaires sur les génératrices de ce cylindroïde. En vertu des propriétés métriques spéciales de cette surface, chacune de ces perpendiculaires rencontre encore deux vis, symétriques par rapport aux axes x et y, et dès lors dotées de flèches égales; et c'est la flèche de ces dernières, prise avec un signe contraire, qu'il faut attribuer à la normale considérée, pour la rendre réciproque au cylindroïde. Mais les droites, ainsi déterminées par un point P, forment un cône du second degré, parce que :

D'abord, la projection xy de la courbe de leurs pieds sur les génératrices de la surface est évidemment un cercle,

Et ensuite, un cylindre circulaire contenant la droite double du cylindroïde ne peut couper celui-ci en dehors de cette ligne double et des génératrices allant du point à l'infini de cette dernière aux points circulaires du plan xy, que suivant une ellipse qui est précisément le lieu des pieds de ces normales.

Ce cône, si le point P est pris sur le cylindroïde, se décompose en deux plans : le plan normal à la génératrice du point et celui qui passe par la génératrice de même flèche du cylindroïde. Il est enfin évident que l'on peut, en général, trouver directement le plan de sa base elliptique sur la surface; car elle contient, d'une part, le pied Q, sur le cylindroïde, de la parallèle menée par P à la droite double et, d'autre part, une génératrice rectiligne de cette surface, à savoir celle qui a même flèche que celle passant par Q. Cette génératrice coupe l'ellipse en deux points, dont l'un est situé sur la droite double, et dont l'autre est à la fois le pied de la perpendiculaire abaissée de P sur elle et le point de contact de son plan avec le cylindroïde. On trouve non moins aisément que les réciproques d'un cylindroïde situées dans un plan quelconque sont tangentes à une conique qui, en réalité, est une parabole. *Les vis réciproques à un cylindroïde forment donc un complexe* *du deuxième degré* et toutes les flèches afférentes au cylindroïde reviennent, dans leur ordre, aux vis de chaque cône complexe et de chaque conique complexe de ce cylindroïde.

Ces résultats conduisent facilement à ceux-ci, que *les vis d'un cylindroïde sont réciproques à quatre vis prises à volonté*, et qu'*à cinq vis arbitrairement choisies il n'existe qu'une seule réciproque.*

Dans le premier cas, en effet, il faut que les réciproques soient en nombre simplement infini, c'est-à-dire constituent une *surface.* Or, si l'on désigne par 1, 2, 3 et 4 les quatre vis, ordonnées suivant les grandeurs décroissantes de leurs flèches, puis que l'on choisisse une flèche entre les deux moyennes, il existera sur chacun des cylindroïdes (1, 3) et (2, 4) deux vis ayant cette flèche, et les deux transversales communes à ces quatre vis, prises elles-mêmes comme vis avec une flèche égale et de signe contraire, détermineront un cylindroïde dont toutes les vis seront réciproques à 1, 2, 3 et 4, parce que ces transversales le sont aux cylindroïdes donnés et, par suite, à ces quatre vis.

Dans le second cas, il ne peut exister qu'un *groupe* de vis, et, comme déjà deux fourniraient tout un cylindroïde ou un système d'infinité simple, il ne peut exister qu'une *seule* vis réciproque à cinq autres données. Cela prouve, en même temps, que dans tout cylindroïde il existe toujours *une* et *une seule* vis réciproque à une autre arbitrairement choisie.

VI. L'étude des réciproques donne le moyen d'*instituer le système de coordonnées* le mieux approprié à ces recherches. En Mécanique élémentaire, on décompose, par analogie avec la décomposition du mouvement général, un système de forces en trois forces uniques, dirigées suivant trois droites concourantes rectangulaires, et en trois couples situés dans les plans normaux à ces droites; puis, on utilise comme coordonnées de ce système de forces les produits de sa décomposition. De même ici, pour répondre à cette conception plus générale, on devra procéder à une décomposition du torseur ou de la torsion suivant six vis données et considérer, comme les coordonnées de celle-ci ou de celui-là, les intensités ou les amplitudes afférentes à ces six vis (*voir* le Traité de Plucker de 1866, p. 362).

Si la vis ρ d'intensité ρ'' représente un torseur à décomposer suivant les vis fondamentales $w_1, \ldots, w_6$, les intensités correspondantes $\rho''_1, \ldots, \rho''_6$

se déterminent d'après cette remarque qu'une torsion suivant une vis quelconque σ doit produire le même travail suivant ρ que suivant toutes les composantes ensemble ; d'où l'équation

$$\rho''\omega_{\rho\sigma} = \rho''_1\omega_{1\sigma} + \rho''_2\omega_{2\sigma} + \ldots + \rho''_6\omega_{6\sigma},$$

dans laquelle $\omega_{\rho\sigma}$ représente le coefficient virtuel de σ par rapport à ρ et $\omega_{1\sigma}, \ldots$ celui de σ par rapport à $w_1, \ldots$.

Six vis arbitrairement choisies fournissent ainsi six équations linéaires au moyen desquelles se déterminent les *coordonnées* ρ''_i. Dans le cas où σ est réciproque aux vis fondamentales $w_2, \ldots, w_6$, l'équation correspondante donne directement ρ''_1, parce que, tous les autres termes du second membre s'évanouissant, elle se réduit à

$$\rho''\omega_{\rho\sigma} = \rho''_1\omega_{1\sigma}.$$

Si p désigne la flèche de la vis ρ et p_i les flèches respectives des vis fondamentales w_i, on obtient, en faisant coïncider σ successivement avec chacune de ces dernières et se souvenant que le coefficient virtuel d'une vis par rapport à elle-même est le double de sa flèche, les équations

$$\begin{aligned}
\rho''\omega_{\rho_1} &= \rho''_1 p_1 \quad + \rho''_2\omega_{2,1} + \ldots + \rho''_6\omega_{6,1},\\
\rho''\omega_{\rho_2} &= \rho''_1\omega_{1,2} + \rho''_2 p_2 \quad + \ldots + \rho''_6\omega_{6,2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\rho''\omega_{\rho_6} &= \rho''_1\omega_{1,6} + \rho''_2\omega_{2,6} + \ldots + \rho''_6 p_6,
\end{aligned}$$

et en faisant coïncider σ avec ρ, l'équation

$$\rho'' p_\rho = \rho''_1\omega_{1\rho} + \rho''_2\omega_{2,5} + \ldots + \rho''_6\omega_{6,5}.$$

Multipliant cette dernière par ρ'', puis y substituant les précédentes, on arrive à l'équation

$$\rho''^2 p_\rho = p_1\rho''^2_1 + \ldots + p_6\rho''^2_6 + 2(\rho''_1\rho''_2\omega_{1,2} + \ldots + \rho''_5\rho''_6\omega_{5,6}),$$

qui détermine l'*intensité de la résultante en fonction de celles des composantes*.

Maintenant il est possible, par un choix convenable des vis fondamentales, de faire disparaître de cette équation les quinze doubles produits. Soient, en effet, w_1 pris à volonté; w_2 dans le système d'infinité quadruple de ses réciproques; w_3 dans le complexe des réciproques à w_1, w_2; w_4 dans le système d'infinité double ou la congruence des réciproques à w_1, w_2, w_3; w_5 dans le cylindroïde des réciproques à w_1, w_2, w_3, w_4 et enfin w_6 comme la réciproque à $w_1, \ldots, w_5$. Les vis fondamentales sont alors, deux à deux, réciproques entre elles, c'est-à-dire forment un *système de coréciprocales,* et quinze des trente conditions nécessaires à la détermination de six vis sont fixées. Cela étant, les coefficients virtuels des vis fondamentales, ajoutés deux à deux, s'évanouissent; d'où l'équation

$$\rho''^2 p_\rho = p_1 \rho_1''^2 + \ldots + p_6 \rho_6''^2.$$

Et si le travail produit, par rapport à un torseur β d'intensité β'', par une torsion d'intensité α'' effectuée autour de α, est en général la somme des trente-six quantités de travail composantes, trente de celles-ci s'évanouissent en vertu des suppositions qui précèdent, et l'expression du *travail* en question est simplement

$$2(p_1 \alpha_1' \beta_1'' + \ldots + p_6 \alpha_6' \beta_6'').$$

Mais

$$\alpha_i' = \alpha' \alpha_i, \quad \beta_i'' = \beta'' \beta_i;$$

donc l'expression précédente équivaut à

$$2\alpha' \beta'' (p_1 \alpha_1 \beta_1 + \ldots + p_6 \alpha_6 \beta_6)$$

et, par suite, le coefficient virtuel de α et β est donné par la formule

$$\omega_{\alpha\beta} = p_1 \alpha_1 \beta_1 + \ldots + p_6 \alpha_6 \beta_6.$$

De même que pour le cas particulier de l'identité des vis α et β, la flèche est donnée par la suivante :

$$p_\alpha = p_1 \alpha_1^2 + \ldots + p_6 \alpha_6^2.$$

Le travail produit, par rapport à un torseur α d'intensité *un*, par une torsion d'amplitude w'_1 effectuée autour de w_1, est $2w'_1\,\omega_{\alpha_1}$ et, comme il doit égaler le travail fourni par la même torsion par rapport à un torseur w_1 d'intensité α_1, on a

$$2p_1\,\alpha_1\,w'_1 = 2w'_1\,\omega_{\alpha_1} \quad \text{ou} \quad \alpha_1 = \frac{\omega_{\alpha_1}}{p_1}.$$

La coordonnée se trouve ainsi *exprimée au moyen du coefficient virtuel.*

On peut appeler *coordonnées de* α les intensités de la composante α_i du torseur d'intensité *un* agissant en α, et l'on obtient alors la *relation métrique qui existe entre ces coordonnées,* relation qui est nécessaire à la détermination des *grandeurs absolues,* en menant par l'origine des coordonnées x, y, z des parallèles définies par les cosinus de direction a_i, b_i, c_i, aux vis fondamentales $w_1, \ldots, w_6$. Alors, en effet, il faut que

$$(a_1\alpha_1 + \ldots + a_6\alpha_6)^2 + (b_1\alpha_1 + \ldots + b_6\alpha_6)^2 + (c_1\alpha_1 + \ldots + c_6\alpha_6)^2 = 1,$$

ou que

$$\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_6^2 + 2[\alpha_1\alpha_2\cos(w_1, w_2) + \ldots] = 1.$$

Au moyen de cette relation se détermine, par exemple, la vis ρ réciproque à cinq autres α, β, γ, δ, ε, car les équations de condition

$$\Sigma p_i\rho_i\alpha_i = 0, \quad \Sigma p_i\rho_i\beta_i = 0, \quad \ldots, \quad \Sigma p_i\rho_i\varepsilon_i = 0$$

fournissent les rapports de leurs coordonnées.

VII. Tels sont les *fondements* de la Mécanique des corps solides, sous sa nouvelle forme. Il convient de rappeler que ce mode d'expression si simple, tiré de la considération du système coréciprocal des six vis fondamentales, avait déjà été indiqué également, dans des recherches de Géométrie linéaire, notamment par M. F. Klein dans son Traité « Zur Theorie der Liniencomplexe des ersten und zweiten Grades », dans les *Mathem. Annalen*, vol. II, p. 203 f. (*voir* aussi *ibid.*, p. 370)

L'*achèvement de l'édifice* nécessite l'*introduction des masses* dans les *mouvements* et les *systèmes de forces* qui les produisent; aussi ne crois-je pas pouvoir clore cette exposition sans donner encore une idée de ce nouveau sujet. Je serai toutefois sur ce point aussi bref que possible, afin de pouvoir ensuite exposer, dans ce qu'elle offre de plus essentiel, la solution d'un cas déterminé.

On sait que, des deux conceptions fondamentales de la *Géométrie des masses*, appellation que l'on peut, à bon droit, attribuer à cette partie de la Mécanique, l'une répond à la translation, l'autre à la rotation. La première, le *centre de la masse*, nommé souvent à tort son *centre de gravité*, est le point dont la distance à un plan quelconque est la moyenne de celles de tous les points de la masse à ce plan ; ses coordonnées sont définies par les équations

$$x\Sigma m_i = \Sigma m_i x_i, \;\ldots.$$

La seconde, le *rayon d'inertie* R, mesure la distance de l'axe de rotation à laquelle il faudrait concentrer, en un point, la masse du système, pour qu'elle eût autour de cet axe la même *énergie cinétique de rotation* que ce système lui-même ; il résulte de l'équation

$$R^2\Sigma m_i = \Sigma m_i r_i^2.$$

On connaît la représentation géométrique de cette dernière grandeur, c'est-à-dire du partage des masses au point de vue de la rotation autour d'axes concourants, par l'*ellipsoïde d'inertie* de Poinsot, lequel, pour le point central des masses O, est nommé *ellipsoïde central* et dont alors les trois axes a, b, c sont dits les *axes principaux* du point ou du système.

On connaît encore le théorème de Binet, d'après lequel les axes principaux et rayons d'inertie principaux pour un point quelconque du système se déduisent de ceux relatifs au centre des masses. Enfin il est connu que les axes principaux sont des *axes permanents de rotation* pour un système tournant autour d'un point, et que ceux qui correspondent au point central des masses O sont des axes *naturels* de rotation d'un système libre ; cette dernière proposition est vraie, soit qu'aucune force n'agisse sur le système, soit que les forces agissantes se réduisent à un couple situé dans un plan normal à l'axe.

Cela posé, il est aisé, en s'en référant aux considérations précédemment développées, de prouver que les axes principaux du système OA, OB, OC, considérés comme des vis $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6$, dotées, respectivement, des flèches $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$, constituent un système coréciprocal et sont, dès lors, propres à être utilisés comme vis fondamentales, pour la détermination des coordonnées, et de montrer aussi, à titre de généralisation de ce qui vient d'être rappelé en dernier lieu, que, pour un système libre, tout torseur impulsif agissant suivant l'une de ces vis détermine une torsion autour de cette même vis, en sorte qu'elles peuvent être appelées les *six vis d'inertie principales du système*.

En général, un torseur suivant la vis β fait naître une torsion du système autour d'une autre vis α, selon la relation

$$\beta_i = \frac{\alpha'}{\beta''}\,\frac{\mathrm{M}}{\iota}\,p_i\alpha_i,$$

entre leurs coordonnées respectives et les flèches des vis fondamentales.

Si, maintenant, les torseurs β, β^* déterminent, de cette façon, des torsions α, α^* et que α soit réciproque à β^*, α^* l'est aussi, nécessairement, à β et cela aussi bien pour le système libre que pour un système réduit, par certaines conditions, à un moindre degré de liberté. La condition y relative, en effet, s'exprime ainsi

$$p_1^2\alpha_1\alpha_1^* + \ldots + p_6^2\alpha_6\alpha_6^* = 0.$$

J'appellerai vis *matériellement conjuguées* les vis de cette sorte, que M. Ball, dans son Mémoire de Londres de 1874, nommait : « conjugate screws of inertia » et au sujet desquelles, partant de cette remarque que, pour tout système gêné dans sa liberté par certaines conditions, il correspond, à chaque vis de la torsion momentanée, non pas une vis unique et déterminée, mais tout un système de vis suivant *chacune* desquelles peut agir le torseur impulsif déterminant, il démontrait que, dans le système de vis du degré k qui définit la mobilité du système rigide, il y a toujours et seulement k vis (*les k vis d'inertie principales du système*) qui sont, deux à deux, matériellement conjuguées.

Dans le cas de la liberté du second degré, par exemple, celui où le système peut se tordre suivant deux vis et suivant toutes celles qui résultent de ces deux-là, c'est-à-dire toutes celles de leur cylindroïde, trois vis du cylindroïde, suivant lesquelles agissent des torseurs, et les vis correspondantes, suivant lesquelles le système est tordu, déterminent, par leurs directions, deux séries projectives dont les points doubles ne sont autre chose que les directions des deux vis principales d'inertie.

VIII. Que, maintenant, le système rigide se tordé autour d'une vis α avec la vitesse α' ; ce mouvement se décomposera, suivant les vis fondamentales w_i, avec des vitesses de torsion $\alpha'\alpha_i$, et des vitesses de translation $\alpha'\alpha_i p_i$ et l'énergie cinétique du système se composera des deux termes

$$\tfrac{1}{2}\alpha'^2\alpha_i^2 \int r^2 dM \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{2}M\alpha'^2\alpha_i^2 p_i^2,$$

ou, comme p_i est précisément le rayon d'inertie correspondant, des deux suivants :

$$\tfrac{1}{2}M\alpha'^2\alpha_i^2 p_i^2 \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{2}M\alpha'^2\alpha_i^2 p^2{}_i,$$

dont la somme est, en définitive,

$$M\alpha'^2(\alpha_1^2 p_1^2 + \ldots + \alpha_6^2 p_6^2) \quad \text{ou} \quad M\alpha'^2 u_\alpha^2,$$

u_α étant un *paramètre linéaire qui dépend de la distribution de la masse du système, par rapport à l'axe* α.

Le torseur β, d'intensité β'', agissant pendant l'élément de temps τ sur le système de masse M qui ne peut se tordre qu'autour de la vis α, lui imprime une vitesse α' et une énergie cinétique K, déterminées par les équations

$$\alpha' = \frac{\tau\beta''\omega_{\alpha\beta}}{M u_\alpha^2},$$

$$K = \frac{\tau\beta''^2\omega_{\alpha\beta}^2}{M u_\alpha^2}.$$

Comparant ces résultats avec ceux relatifs au système absolument libre, on retrouve ce théorème, connu depuis EULER, que *de toute restriction résulte nécessairement une perte d'énergie.*

Dans un système de vis d'espèce k, il est toujours possible de trouver k vis coréciprocales; $(k-1)$ vis, en effet, du système, étant considérées, il en existe toujours, dans ce même système, une autre qui leur est réciproque, comme l'étant à $(6-k)$ vis du système réciproval, soit, en tout, à cinq vis. On obtient donc, comme *système de coordonnées approprié à la liberté d'espèce* k, une *décomposition* de chaque torseur suivant ces k vis et suivant $(6-k)$ vis quelconques du système réciprocal, et, les composantes dirigées suivant ces dernières se trouvant *détruites* par l'effet des restrictions imposées au système, il advient que les composantes dirigées suivant les k vis du système se composent seules en un torseur résultant, appartenant au système lui-même, et que l'on nomme le *torseur réduit* du torseur donné.

Pour le groupe des k vis principales d'inertie, en particulier, et à la condition que les valeurs du paramètre u_α qui leur correspondent soient u_i $(i=1\ldots k)$, on obtient, entre les coordonnées β_i du torseur réduit et les coordonnées α_i de la vis autour de laquelle s'effectue la torsion produite par ce torseur réduit et par tous les autres torseurs impulsifs auxquels il répond, la relation

$$\frac{\alpha_i' u_i^2}{p_i} = \frac{\tau}{\mathrm{M}} \beta_i''.$$

On exprime aussi la condition pour que deux vis α, $\alpha^{\bullet}$ soient conjuguées, sous la forme

$$u_1^2 \alpha_1 \alpha_1^{\bullet} + \ldots + u_k^2 \alpha_k \alpha_k^{\bullet} = 0,$$

et l'énergie cinétique K du mouvement sous la suivante :

$$\mathrm{K} = \mathrm{M} u_\alpha^2 \quad \text{avec} \quad u_\alpha^2 = u_1^2 \alpha_1'^2 + \ldots + u_k^2 \alpha_k'^2.$$

Dans le cas particulier du cylindroïde ou de la liberté de deuxième espèce, on a

$$u_\alpha^2 = u_1^2 \alpha_1^2 + u_2^2 \alpha_2^2,$$

et la représentation géométrique de u_α est une *ellipse*, dont les diamètres sont inversement proportionnels aux u_α des parallèles α, tandis que ses diamètres conjugués ont les directions de vis matériellement conjuguées et que ses axes fournissent les vis d'énergie cinétique maxima ou minima pour une vitesse de torsion donnée. De plus, les deux vis du cylindroïde parallèles au couple de diamètres conjugués commun à cette ellipse et à la conique flèche sont les vis principales d'inertie du système. Cette *ellipse d'inertie* ou *ellipse d'égale énergie cinétique* est, dans la théorie générale des systèmes doués de la liberté du second degré, l'analogue d'un ellipsoïde, ordinairement nommé l'*ellipsoïde d'inertie*, dont on sait la signification dans la théorie de la rotation autour d'un point, et dont je reparlerai plus loin, à propos de la théorie générale du système doué de la liberté du troisième degré.

IX. J'en reviens au *cas général* du système de vis de degré k.

Je suppose que, sous l'action d'un système de forces, le système rigide passe, au moyen d'une torsion d'amplitude α' effectuée autour d'une de ses vis α, de la position d'équilibre A à la position voisine B et dépense, dans ce mouvement, l'énergie V_α, ou *énergie potentielle du déplacement*, laquelle doit nécessairement dépendre des coordonnées de la torsion de A en B et des constantes du système de forces, comme étant fonction des k coordonnées $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_k$, et fonction homogène du deuxième degré, parce que l'on y peut négliger les puissances plus hautes de ces coordonnées devant leurs secondes puissances, et que les termes linéaires disparaissent dès qu'il s'agit de la sortie d'une *position d'équilibre*. Par l'effet du transport dans la position B, l'équilibre est détruit et un torseur créé autour de la vis β, dont les coordonnées $\beta''_1, \ldots, \beta''_k$ se déduisent de la formule

$$\beta''_i = -\frac{1}{2p_i}\frac{dV_\alpha}{d\alpha_i}.$$

Si, de cette manière, aux torsions autour de α, α^*, correspondent les torseurs réduits β, β^*, la réciprocité de α et β^* sera une conséquence nécessaire de celle de α^* et β; pour ces deux réciprocités, en effet, et dans la seule hypothèse que V_α soit de la forme

$$A_{11}\alpha'^2_1 + \ldots + 2A_{12}\alpha'_1\alpha'_2 + \ldots + 2A_{1k}\alpha'_1\alpha'_k + \ldots,$$

la condition est la même et s'écrit

$$A_{11}\alpha'_1\alpha_1^{*\prime} + \ldots + A_{12}(\alpha'_1\alpha_2^{*\prime} + \alpha_2^{*\prime}\alpha'_2) + \ldots = 0.$$

Les vis α, α^*, pour lesquelles elle est remplie, sont dites *potentiellement conjuguées* et l'on démontre immédiatement qu'il existe, dans un système de vis du degré k, toujours et seulement k vis telles, qu'une torsion effectuée autour de l'une d'elles donne naissance à un torseur réduit dirigé *suivant elle-même*. En effet, cette propriété s'exprime par les équations de condition

$$\alpha''_i = -\frac{1}{2p_i}\frac{dV_\alpha}{d\alpha_i} = -\frac{1}{2p_i}(A_{i1}\alpha'_1 + A_{i2}\alpha'_2 + \ldots + A_{ik}\alpha'_k),$$

ou, en raison de ce que $\alpha''_i = \alpha''\alpha_i$ et $\alpha_i = \alpha'\alpha_i$,

$$\alpha''\alpha_i p_i = -\alpha'(A_{i1}\alpha_1 + \ldots + A_{ik}\alpha_k),$$

qui ne sont compatibles que si le déterminant symétrique

$$\begin{vmatrix} A_{11} + \frac{\alpha''}{\alpha'}p_i & A_{12} & \ldots & A_{1k} \\ A_{12} & A_{22} + \frac{\alpha''}{\alpha'}p_2 & \ldots & A_{2k} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1k} & A_{2k} & \ldots & A_{kk} + \frac{\alpha''}{\alpha'}p_k \end{vmatrix}$$

s'annule. Or, l'équation obtenue en égalant ce déterminant à zéro fournit, pour le rapport $\frac{\alpha''}{\alpha'}$, k valeurs toujours reelles dont chacune, portée dans les équations de condition, détermine les *coordonnées d'une vis* qui jouit de la propriété énoncée.

On trouve ainsi les *k vis potentielles principales* du système. Elles forment un groupe coréciprocal unique par rapport auquel, si on le prend pour fondamental, le travail V_α, produit par une torsion d'amplitude α' autour de α, est donné par la formule

$$V_\alpha = \alpha'^2(A_{11}\alpha_1^2 + \ldots + 2A_{12}\alpha_1\alpha_2 + \ldots),$$

que l'on peut changer en la suivante :

$$V_\alpha = \alpha'^2 F v_\alpha^2,$$

en représentant par F une constante directement proportionnelle à la masse et inversement proportionnelle au carré du temps, et par v_α un *paramètre linéaire appartenant à la vis* α *sous l'influence de la fonction* V, et s'adjoignant, comme troisième, au paramètre purement géométrique p_α et au paramètre u_α, qui dépend de la distribution de la masse du système par rapport à la vis α.

Les vis potentielles principales étant prises pour fondamentales et leurs paramètres v ayant pour valeurs respectives $v_1, \ldots, v_k$, *l'énergie potentielle du déplacement s'exprime par une somme de carrés*

$$F(\alpha_1'^2 v_1^2 + \ldots + \alpha_1'^2 v_k^2),$$

et cette expression lui demeure pour chaque groupe de k vis potentiellement conjuguées.

On obtient, enfin, un dernier groupe important de k vis du système en considérant, à la fois, les deux vis β et β^* de ce système qui, par rapport à une autre de ses vis α se trouvent dans les situations suivantes : β est la vis suivant laquelle un torseur doit agir, sur le système en repos, pour lui imprimer un mouvement de torsion autour de α; β^* est celle suivant laquelle agit, sur ce système, le torseur réduit auquel donne naissance la torsion, autour de α, qui s'effectue à partir d'une position d'équilibre. La première ne dépend que du corps solide et de l'ensemble des mouvements qui lui sont permis; la seconde dépend, de plus, du système de forces agissant.

Or on peut prouver qu'il y a, toujours et seulement, k vis α, dans le système, pour lesquelles les vis β et β^*, qui leur sont liées comme il vient d'être dit, coïncident. En effet, d'après ce qui précède, cette condition exige la coexistence des k équations de condition

$$h\frac{u_i^2}{p_i}\alpha_i'' = -\frac{1}{2p_i}\frac{dV}{d\alpha_i} \quad \text{ou} \quad hu_i^2\alpha''\alpha_i = -(A_{11}\alpha_1 + \ldots)\alpha',$$

c'est-à-dire la nullité du déterminant symétrique

$$\begin{vmatrix} A_{11} + h\frac{\alpha''}{\alpha'}u_1^2 & A_{12} & \dots & A_{1k} \\ A_{12} & A_{22} + h\frac{\alpha''}{\alpha'}u_2^2 & \dots & A_{2k} \\ \dots & \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots \\ A_{1k} & A_{2k} & \dots & A_{kk} + h\frac{\alpha''}{\alpha'}u_k^2 \end{vmatrix}$$

Or l'équation qui exprime cette nullité fournit, pour $h\frac{\alpha''}{\alpha'}$, k valeurs toujours réelles et, par là, au moyen du système des équations de condition, k vis de l'espèce demandée.

Ces vis sont, à la fois, matériellement et potentiellement conjuguées, et M. Ball, sur la proposition de M R. Townsend, les a désignées sous le nom de *vis harmoniques*. Je ferai remarquer que, pour un système hélicoïdal du deuxième degré, le paramètre $v_\alpha = \alpha_1^2 v_1^2 + \alpha_2^2 v_2^2$ conduit à une *ellipse potentielle*, comme à la courbe dont les diamètres conjugués sont parallèles à des vis potentiellement conjuguées, etc. Les couples de diamètres conjugués communs à cette ellipse et à la conique flèche ou à l'ellipse d'inertie du système fournissent les vis potentielles principales et les vis harmoniques de ce système.

X. Muni de tous ces moyens, on arrive, enfin, à l'établissement des *équations différentielles* générales *de la dynamique des systèmes invariables* et à une solution nette du problème cinétique général (*voir*, par exemple, Poisson, *Mécanique*, t. II, Chap. IX, Sect. II, ou Duhamel, t. II, art. 206-218).

Le corps est supposé en mouvement sous l'influence des forces, en sorte qu'au bout du temps t les coordonnées de son mouvement de torsion, rapportées aux k vis d'inertie principales, soient les $\frac{d\alpha_i'}{dt}$. Si, alors, β_i'' désigne les coordonnées d'un torseur qui, en agissant pendant le court espace de temps τ sur le corps en repos, lui aurait imprimé le même mouvement, les coordonnées du torseur impulsif qui, dans le temps τ, déterminerait, en partant de l'état de repos, le mouvement du temps $t+\tau$, seront $\beta_i'' + \tau\frac{d\beta_i''}{dt}$. D'autre part, le mouvement au temps $t+\tau$ peut être regardé comme produit par l'action, d'abord du torseur β_i'' pendant le temps τ, et ensuite du torseur engendré pendant le même temps et dont les coordonnées sont $-\frac{1}{2p_i}\frac{dV}{d\alpha''_i}$; en sorte que l'on a

$$\beta''_i + \tau\frac{d\beta''_i}{dt} = \beta''_i - \frac{1}{2p_i}\frac{dV}{d\alpha_i}.$$

Maintenant de l'équation

$$\tau\beta''_i = \mathrm{M}\frac{u_i^2}{p_i}\frac{d\alpha'_i}{dt}$$

on peut déduire

$$\tau\frac{d\beta''_i}{dt} = \mathrm{M}\frac{u_i^2}{p_i}\frac{d^2\alpha'_i}{dt^2},$$

et l'on obtient les équations générales du problème ($i = 1.2\ldots k$) sous la forme

$$2\mathrm{M}u_i^2\frac{d^2\alpha'_i}{dt^2} + \frac{dV}{d\alpha'_i} = 0$$

(*voir* Thomson et Tait, *Natural Philosophy*, vol. I, art. 329, 330).

Pour les intégrer, on pose

$$\alpha'_i = f_i\Omega,$$

où Ω désigne une fonction inconnue du temps et les f_i des constantes; puis, introduisant V, on obtient le système

$$\mathrm{M}u_1^2 f_1\frac{d^2\Omega}{dt^2} + (\mathrm{A}_{11}f_1 + \mathrm{A}_{12}f_2 + \ldots + \mathrm{A}_{1k}f_k)\Omega = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\mathrm{M}u_k^2 f_k\frac{d^2\Omega}{dt^2} + (\mathrm{A}_{k1}f_1 + \mathrm{A}_{k2}f_2 + \ldots + \mathrm{A}_{kk}f_k)\Omega = 0,$$

lequel se réduit à l'équation unique

$$\frac{d^2\Omega}{dt^2} + \frac{h}{\mathrm{M}}\frac{\alpha''}{\alpha'}\Omega = 0;$$

admettant l'intégrale

$$\Omega = \mathrm{H}\sin(st + c),$$

si l'on tire les quantités $h\frac{\alpha''}{\alpha'}$ et les f_i des k équations suivantes :

$$f_1\left(\mathrm{A}_{11} + h\frac{\alpha''}{\alpha'}u_1^2\right) + f_2\mathrm{A}_{12} + \ldots + f_k\mathrm{A}_{1k} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_1\mathrm{A}_{k1} + f_2\mathrm{A}_{k2} + \ldots + f_k\left(\mathrm{A}_{kk} + h\frac{\alpha''}{\alpha'}u_k^2\right) = 0,$$

c'est-à-dire, d'après ce qui précède, *si les f_i sont proportionnels aux coordonnées d'une vis harmonique.*

Si l'on représente par f_{ij} la valeur de f_j qui résulte de l'emploi de la $i^{ème}$ racine de l'équation de degré k en $h\frac{\alpha''}{\alpha'}$, les solutions générales deviennent

$$\alpha'_i = f_{1i}\mathrm{H}_1 \sin(s_1 t + c_1) + \ldots + f_{ki}\mathrm{H}_k \sin(s_k t + c_k).$$

Elles contiennent $2k$ constantes à déterminer au moyen de l'état initial et admettent, en même temps, d'après les considérations précédentes, l'*interprétation* très-simple que voici :

Que l'on suppose la torsion qui a écarté le corps de sa position d'équilibre stable et le mouvement de torsion qui a été alors imprimé à ce corps, décomposés en leurs k composantes suivant les vis harmoniques; que l'on conçoive k pendules circulaires respectivement isochrones à ces composantes; que l'on imagine, ensuite, tous ces pendules mis en mouvement, en même temps que le corps, avec des amplitudes et des vitesses angulaires respectivement proportionnelles aux amplitudes initiales et vitesses des torsions des vis harmoniques correspondantes; que l'on détermine, enfin, pour le moment donné, les arcs des k pendules, de manière à donner au corps, à partir de sa position d'équilibre, les torsions correspondantes autour des vis harmoniques, et l'on obtiendra la position correspondante du corps.

XI. Je veux, en dernier lieu, examiner de plus près le *cas particulier* où *le corps est libre de subir des torsions autour de toutes les vis d'un système de troisième espèce,* et dans lequel, par suite, le système réciproque est de même nature que le premier, parce que tous deux sont déterminés par 3(6 — 3) ou neuf conditions. La disposition des vis des deux systèmes en une infinité simple de *groupes de même flèche* fournit immédiatement ce théorème, que chacun de ces groupes constitue l'*un des systèmes de génératrices d'un hyperboloïde,* dont l'autre comprend les vis de flèche égale et de signe contraire du système réciproque.

Ces hyperboloïdes forment un *système concentrique, coaxial et concyclique,* et il est aisé de démontrer que l'hyperboloïde des vis de flèche nulle qui, d'après M. Mannheim, est le lieu des points auxquels répondent, dans le *mouvement d'indétermination doublement infinie*, non des gerbes, mais des *faisceaux de trajectoires* et, d'après PLUCKER, *Neue Geom. d. R.*, p. 130, celui des droites communes à trois complexes linéaires ayant leurs axes sur les axes de coordonnées et pour paramètres p_1, p_2, p_3, a pour équation

$$p_1 x^2 + p_2 y^2 + p_3 z^2 + p_1 p_2 p_3 = 0,$$

p_1, p_2 et p_3 étant les flèches qui dans le système appartiennent respectivement à ses axes principaux ; et que les vis de flèche p appartiennent à l'hyperboloïde

$$(p_1 - p)x^2 + (p_2 - p)y^2 + (p_3 - p)z^2 + (p_1 - p)(p_2 - p)(p_3 - p) = 0.$$

L'hyperboloïde de flèche nulle détermine, en même temps, les *flèches de toutes les vis du système*, comme proportionnelles à l'inverse du carré de ceux de ses diamètres qui leur sont parallèles. En effet, des équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$
$$p_1 x^2 + p_2 y^2 + p_3 z^2 + p_1 p_2 p_3 = 0,$$
$$(p_1 - p)x^2 + (p_2 - p)y^2 + (p_3 - p)z^2 + (p_1 - p)(p_2 - p)(p_3 - p) = 0,$$

il suit que

$$pr^2 = - p_1 p_2 p_3,$$

comme PLUCKER (à l'endroit cité, p. 132) l'a également énoncé pour les paramètres des complexes du groupe à trois membres, système hélicoïdal du troisième degré.

Ainsi, dans la détermination de cet hyperboloïde, l'*hyperboloïde flèche*, se trouve comprise celle de tout le système et de son réciproque, comme il est disposé, par là, de ses neuf constantes. On voit que, par chaque point de l'espace fini, il passe *trois* vis du système et *une seule* par chaque point à l'infini ; tandis que chaque plan de l'espace en contient *deux* et qu'en conséquence les vis du système parallèles à un plan forment un cylindroïde et celles parallèles aux sections circulaires réelles en particulier, des faisceaux plans de droites, issues de deux points de l'axe primaire. La construction de tout cela ne présente aucune difficulté spéciale.

La signification de l'hyperboloïde flèche, duquel chaque *triple* de diamètres conjugués fournit spécialement les directions de trois vis coréciprocales du système, peut encore être éclaircie par la remarque suivante:

La condition de l'équilibre sous l'action de la pesanteur tend à ce que la ligne verticale (*schwerlinie*) qui contient le centre de la masse appartienne au groupe des vis réciproques de l'hyperboloïde flèche, ou à ce que les restrictions ou résistances soient compatibles avec la rotation du système autour d'une droite déterminée passant par ce même centre, à savoir l'autre génératrice correspondante de l'hyperboloïde flèche.

Dans le cas de la *rotation autour d'un point fixe,* où le système hélicoïdal des mouvements possibles est une gerbe de flèche nulle, l'hyperboloïde fleche devient illusoire. Alors, en effet, l'expression du paramètre des masses

$$u_\alpha^2 = u_1^2\alpha_1^2 + u_2^2\alpha_2^2 + u_3^2\alpha_3^2$$

est géométriquement représentée par un *ellipsoïde,* dont les inverses des carrés des rayons sont proportionnels aux énergies cinétiques du corps relatives à une torsion de vitesse donnée, autour des vis parallèles du système, ou dont les rayons sont proportionnels aux vitesses de torsion que doit prendre le corps, autour des vis du système respectivement parallèles, pour avoir l'énergie cinétique *un.* Cet *ellipsoïde* est celui d'*égale énergie cinétique;* ses triples de diamètres conjugués sont parallèles à des vis d'inertie conjuguées du système et dans le cas de la rotation du corps autour d'un point, il devient l'*ellipsoïde,* bien connu, des *moments.* Le triple des directions conjuguées, qui lui est commun avec l'hyperboloïde flèche, appartient aux *vis principales d'inertie* du système, lesquelles, dans le cas de la rotation autour d'un point, deviennent les *axes principaux du corps;* un torseur dirigé suivant l'une d'elles et agissant avec une grande intensité, mais pendant un temps très-court, imprime au corps une torsion autour de cette même vis. D'une façon générale, on obtient la vis du mouvement momentané, correspondant à un pareil torseur impulsif, au moyen de cette remarque que les vis du système réciproques à celle du torseur forment comme réciproques à quatre vis, un cylindroïde et sont dès lors parallèles à un plan. La direction qui lui est conjuguée dans l'ellipsoïde d'égale énergie cinétique appartient à la vis momentanée cherchée. Dans le cas spécial de la rotation autour d'un point, cela revient à la construction connue de POINSOT.

XII. De même, d'après l'équation

$$v_\alpha^2 = v_1^2 \alpha_1^2 + v_2^2 \alpha_2^2 + v_3^2 \alpha_3^2,$$

on obtient, comme représentation géométrique du paramètre potentiel v_α, un *ellipsoïde* dit d'*égale énergie potentielle*, qui fournit pour chaque vis du système, au moyen du rayon qui lui est parallèle et en raison de ce que ce rayon est proportionnel à cette amplitude, la petite amplitude de la torsion pendant laquelle est développé, sous l'action des forces extérieures, le travail *un*, dont le triple de directions conjuguées fait partie des vis potentiellement conjuguées du système et qui enfin, associé à l'hyperboloïde flèche, conduit, à peu près comme le précédent ellipsoïde servait à la construction de la vis momentanée, à la détermination de la vis de rétrogradation, c'est-à-dire de la vis du torseur créé par un déplacement donné. Enfin, le seul triple de directions conjuguées qui soit commun aux deux ellipsoïdes d'égale énergie appartient aux *trois vis harmoniques* du système ; les petites oscillations du corps résultent de la composition d'oscillations harmoniques simples effectuées autour de ces vis ; un déplacement initial suivant l'une d'elles détermine de petites oscillations de torsion autour de cette même vis et un déplacement initial sur une vis du cylindroïde défini par deux d'entre elles fait que la vis des moments du mouvement du système oscille sur ce cylindroïde, sans jamais s'en détacher.

Dans le cas très-particulier de la *rotation autour d'un point, sous l'influence de la pesanteur, l'ellipsoïde potentiel* devient un *cylindre de rotation* ayant pour axe la ligne verticale (*schwerlinie*) passant par le centre de la masse ; cette ligne est l'une des trois vis harmoniques, et les deux autres sont les vis focales du couple commun de diamètres conjugués situé dans le plan diamétral, conjugué à la première, de l'ellipsoïde des moments. En conséquence, les plans verticaux menés par les deux axes harmoniques se coupent à angle droit.

Ce qui précède me paraît donner des résultats obtenus sur le terrain où je me suis placé, une idée suffisamment nette pour que je m'abstienne de me livrer ici à de nouveaux développements. J'y trouverais pourtant ample matière, tant au point de vue des *sujets de problèmes* à traiter, tels que l'étude approfondie des cas où le système jouit d'une liberté d'espèce quatre ou cinq, ou encore d'une liberté entière, questions qui n'ont même pas été touchées, dans cette Notice, et de ceux de l'équilibre des forces, sur lesquels on connaît tant de propositions remarquables (*voir* le Mémoire de M. R. STURM, dans les *Annali di Matem.*, 2e série, t. VII), qu'à celui des *moyens de recherche* que j'y emploierais. Il est évident que, particulièrement, les complexes de rayons du second degré doivent jouer souvent un rôle important dans ces recherches; j'en citerai, pour un seul exemple, les deux complexes répondant aux équations

$$\Sigma u_i^2 \alpha_i^2 = 0, \quad \Sigma v_i^2 \alpha_i^2 = 0,$$

et désignés respectivement, par MM. F. KLEIN et BALL, sous les noms de *complexes cinétique* et *potentiel*. On conçoit aisément pourquoi il ne pouvait convenir de les considérer ici.

Je tiens à mentionner, en terminant, que le choix de termes convenables pour la germanisation [1] de la terminologie de M. BALL m'a coûté quelque effort; il importait particulièrement d'en trouver ou d'en former de courts et de précis pour rendre les mots anglais: *twist, wrench, pitch,* etc. Ceux que j'ai choisis me paraissent dignes au moins d'être sérieusement discutés. Quant à traduire, comme je crois me rappeler qu'on l'a déjà fait, *twist* par *drillung* [2], je n'ai pu m'y résoudre.

Je ne doute pas que ces méthodes ne reçoivent encore de nouveaux perfectionnements et ne deviennent toujours plus fécondes. C'est pourquoi j'ai jugé nécessaire de les présenter, à de futurs professeurs de Mécanique, dès leurs premiers pas hors des recherches cinématogéométriques et linéogéométriques. A ce point de vue, la présente Notice sera, j'espère, de quelque utilité.

---

[1] Il est à peine besoin d'ajouter ici que le traducteur français a rencontré, à son tour, les mêmes difficultés

[2] Rotation.