JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

L. FUCHS

Sur les équations différentielles linéaires qui admettent des intégrales dont les différentielles logarithmiques sont des fonctions doublement périodiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 4 (1878), p. 125-140.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1878_3_4__125_0>

Sur les équations différentielles linéaires qui admettent des intégrales dont les différentielles logarithmiques sont des fonctions doublement périodiques;

PAR M. L. FUCHS,

à Heidelberg.

Extrait d'une Lettre adressée à M. HERMITE.

1. Je me propose le problème de déterminer les coefficients de l'équation différentielle

$$\frac{d^m y}{dx^m} + p_{m-1}\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + p_0 y = 0, \tag{1}$$

de manière qu'elle soit satisfaite par un système fondamental d'intégrales uniformes $y_1, y_2, \ldots, y_m$, ayant la propriété qu'en posant

$$y_i = f_i(x), \tag{2}$$

$$\left.\begin{matrix} f_i(x+2\mathrm{K}) = \mu_i f_i(x) \\ f_i(x+2\mathrm{K}'i) = \mu'_i f_i(x) \end{matrix}\right\} i = 1, 2, 3, \ldots, m; \tag{3}$$

et que les points singuliers de l'équation différentielle soient des pôles de ses intégrales.

On voit d'abord que les quantités $\frac{1}{y_i}\frac{d^k y_i}{dx^k}$ sont des fonctions uniformes doublement périodiques aux périodes $2\mathrm{K}$ et $2\mathrm{K}i'$. En posant dans l'équation différentielle y_i au lieu de y et en exprimant $p_{m-1}, p_{m-2}, \ldots, p$, au moyen des équations au nombre m, ainsi obtenues, on obtient (*voir* mon Mémoire, t. LXVI du *Journal de M. Borchardt*, n° 4) ces coefficients comme fonctions des quantités $\frac{1}{y_i}\frac{d^k y_i}{dx^k}$.

Donc ces coefficients sont des fonctions uniformes, doublement périodiques aux périodes 2K *et* 2K′*i qui ne deviennent infinies que de manière que leurs valeurs réciproques restent continues.*

Comme les intégrales ne deviennent discontinues pour un point singulier a, que de manière qu'elles se transforment en fonctions holomorphes dans le voisinage de a, en les multipliant par une puissance déterminée de $(x-a)$, il s'ensuit (*voir* mon Mémoire, t. LXVI, n° 4, et t. LXVIII, n° 3, du *Journal de M. Borchardt*) qu'on a dans le voisinage de a

$$p_i = \frac{P_i}{(x-a)^i}, \tag{4}$$

où P_i est holomorphe dans le même voisinage.

2. Considérons en particulier l'équation différentielle du deuxième ordre

$$\frac{d^2u}{dx^2} + p_1\frac{du}{dx} + p_0 u = 0; \tag{A}$$

on a, dans le voisinage d'un point singulier a,

$$\left\{\begin{aligned} p_1 &= \frac{\alpha}{x-a} + q_1,\\ p_2 &= \frac{\beta}{(x-a)^2} + \frac{\beta'}{x-a} + q_2,\end{aligned}\right. \tag{1}$$

où α, β, β' sont des constantes et q_1, q_2 des fonctions holomorphes dans le voisinage de a; donc les fonctions doublement périodiques p_1, p_2 ne deviennent infinies pour $x=a$ que respectivement de premier et de second ordre.

Par suite, si l'on représente p_1 selon votre méthode (*Note sur la théorie des fonctions elliptiques*, ajoutée à la 6ᵉ édition du *Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral* de Lacroix), on obtient

$$p_1 = \gamma + \sum_k A_k D_x \log H(x-a), \tag{2}$$

où le signe Σ se rapporte à tous les points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$ contenus dans un parallélogramme de périodes et où γ signifie une constante, et où, de plus,

$$(3) \qquad \sum\nolimits_k A_k = 0.$$

Il s'ensuit

$$(4) \qquad v = e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dx} = e^{-\frac{1}{2}\gamma x} \prod\nolimits_k [H(x-a)]^{-\frac{1}{2}A_k}.$$

En posant

$$(5) \qquad u = vy,$$

on a

$$(B) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = Py,$$

où

$$(6) \qquad P = \frac{1}{4}p_1^2 + \frac{1}{2}\frac{dp_1}{dx} - p_0;$$

donc P est aussi une fonction uniforme doublement périodique qui devient infinie dans les points singuliers au plus de l'ordre 2, et si l'équation différentielle (A) possède un système fondamental d'intégrales

$$y_1 = f_1(x), \quad y_1 = f_2(x),$$

avec la propriété indiquée par l'équation (3), n° **1**, l'équation différentielle (B) a aussi un tel système fondamental, puisque la fonction v satisfait aux équations (3), n° **1**, en ayant égard aux équations (3) de ce numéro. Donc nous pouvons nous restreindre à la recherche concernant l'équation différentielle (B).

3. Soit $F(x)$ une fonction uniforme satisfaisant aux équations

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} F(x+2K) &= \mu F(x), \\ F(x+2K'i) &= \mu' F(x), \end{aligned} \right.$$

et qui ne devient infinie que d'ordre fini, $D_x \log F(x)$ est uniforme doublement périodique et ne devient infini que du premier ordre.

Par suite on a, d'après votre mode de représentation,

$$(2) \qquad D_x \log F(x) = \delta + \sum_i r_i D_x \log H(x - a_i),$$

où le signe Σ s'étend à tous les zéros et les infinis de la fonction $F(x)$ contenus dans le parallélogramme des périodes, δ désignant une constante et

$$(3) \qquad \sum_i r_i = 0.$$

De l'équation (2) il suit

$$(4) \qquad F(x) = e^{\delta x + \delta'} \prod_i [H(x - a_i)]^{r_i},$$

où le signe Π s'étend aussi aux mêmes zéros et infinis, δ' désignant une constante. La fonction $F(x)$ étant uniforme, les exposants r sont des nombres entiers, positifs ou négatifs, selon que a correspond à un zéro ou un infini.

On a, dans le voisinage de a_k,

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\delta + \sum_i r_i D_x \log H(x - a_i) \\ &\quad = \frac{r_k}{x - a_k} + \sum_i{}' r_i D_x \log H(a_k - a_i) + \delta + \varphi(x), \end{aligned} \right.$$

où le signe $\sum_i{}'$ s'étend à tous les a_i, excepté a_k, $\varphi(x)$ étant une fonction holomorphe dans le voisinage de a_k et $\varphi(a_k) = 0$; donc, en posant

$$(6) \qquad R_k = \sum_i{}' r_i D_x \log H(a_k - a_i) + \delta,$$

il s'ensuit de l'équation (2) que, dans le voisinage de a_k,

$$(7) \qquad [D_x \log F(x)]^2 = \frac{r_k^2}{(x - a)^2} + 2 \frac{r_k R_k}{x - a_k} + \psi,$$

où ψ est holomorphe dans le voisinage de a_k.

On a donc, d'après votre mode de représentation des fonctions doublement périodiques,

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned}[][D_x \log F(x)]^2 = \varepsilon + \sum\nolimits_i [&2 r_i R_i D_x \log H(x-a_i) \\ &- r_i^2 D_x^2 \log H(x-a_i)],\end{aligned}\right.$$

ε étant constant. Il s'ensuit

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{1}{F(x)} D_x^2 F(x) - D_x^2 \log F(x) + [D_x \log F(x)]^2 \\ = \varepsilon + \sum\nolimits_i [(2 r_i R_i D_x \log H(x-a_i) \\ + (r_i - r_i^2) D_x^2 \log H(x-a_i)],\end{aligned}\right.$$

d'où ce théorème :

Pour que l'équation différentielle

$$(B)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = Py$$

soit satisfaite par une intégrale uniforme ayant les propriétés indiquées, il faut et il suffit que P *ait la forme*

$$(10)\qquad P = \varepsilon + \sum\nolimits_i [A_i D_x \log H(x-a_i) + B_i D_x^2 \log H(x-a_i)],$$

et

$$A_i = 2 r_i R_i, \quad B_i = r_i - r_i^2,$$

r_i étant un nombre entier. On a alors

$$(11)\qquad F(x) = e^{\delta x + \delta'} \prod\nolimits_i [H(x-a_i)]^{r_i} \prod\nolimits_k H(x-a'_k),$$

où le signe $\prod_k$ s'étend à toutes les valeurs a'_k pour lesquelles la fonction $F(x)$ s'annule, et pour lesquelles $r_k = 1$, $R_k = 0$: donc $A_k = 0$, $B_k = 0$. Pour ces valeurs a'_k la fonction P ne devient pas infinie; en désignant leur nombre par k, on a, d'après l'équation (3),

$$(12)\qquad k + r_1 + r_2 + \ldots = 0,$$

où $r_1, r_2, \ldots$ appartiennent à ceux des points a pour lesquels la fonction P devient infinie.

4. Supposant maintenant que l'équation différentielle (B) ait une intégrale y_1 de la forme (11) du numéro précédent,

$$(1)\qquad y_2 = \int \frac{dx}{y_1^2}$$

est aussi une intégrale de la même équation. D'après le mode de représentation que vous venez de publier dans les *Comptes rendus*, t. LXXXVI, p. 693, on a

$$(2)\quad \frac{1}{y_1^2} = \sum [A f(x-a) + A_1 D f(x-a) + \ldots + A_r D^r f(x-a)],$$

où le signe Σ s'étend à tous les zéros a de la fonction y_1 de manière que, d'accord avec la signification indiquée ci-dessus, y_1 devient zéro de l'ordre r.

La quantité A est le coefficient de $(x-a)^{2r-1}$ dans le développement de $\frac{(x-a)^{2r}}{y_1^2}$ suivant les puissances de $(x-a)$.

L'intégrale y_2 se comporte dans le voisinage de a comme un logarithme, sinon $A = 0$.

Si l'on veut donc que y_2 soit aussi uniforme, on doit avoir, pour tous les zéros de y_1, $A = 0$; par suite on a

$$(3)\qquad \frac{1}{y_1^2} = \sum [A_1 D f(x-a) + \ldots + A_r D^r f(x-a)];$$

donc y_2 a la forme

$$(4)\quad y_2 = y_1 [A_1 f(x-a) + A_2 D f(x-a) + \ldots + A_r D^{r-1} f(x-a)],$$

et elle satisfait aux équations (1), n° 3, et de plus y_1, y_2 font un système fondamental.

5. Application au cas de l'équation différentielle de Lamé.

En supposant que dans l'équation différentielle (B) la fonction P ne devient infinie dans le parallélogramme de période que pour la valeur $x = 2K'i$ et en posant

$$(1) \qquad \varepsilon = h + n(n+1)\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)},$$

$$(2) \qquad A = 2rR = 0,$$

$$(3) \qquad B = r - r^2 = -n(n+1),$$

l'équation différentielle devient, d'après une formule connue,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = [n(n+1)k^2 \sin^2 \operatorname{am} x + h]y:$$

c'est l'équation de Lamé sous la forme que vous lui avez donnée, p. 690 des *Comptes rendus*.

On a, dans ce cas,

$$(4) \qquad y_1 = F(x) = \frac{e^{\delta x + \delta'} H(x - a'_1) H(x - a'_2) \ldots H(x - a'_n)}{\Theta(x)},$$

les quantités a'_1, a'_2 dépendant essentiellement de la valeur de h.

Pour le cas spécial

$$(5) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = (2k^2 \sin^2 \operatorname{am} x + k^2 \sin^2 \operatorname{am} a - 1 - k^2)y,$$

dont vous parlez dans votre lettre du 27 octobre 1877, on a $n = 1$, et

$$(6) \qquad y_1 = F(x) = e^{\delta x}\frac{H(x - a')}{\Theta(x)}.$$

En posant cette valeur dans l'équation différentielle (5), on déduit $a' = a$, $\delta = \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}$, et l'on parvient ainsi à l'intégrale que vous avez trouvée,

$$(7) \qquad y_1 = F(x) = \frac{H(x - a)}{\Theta(x)} e^{x \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}}.$$

Une autre intégrale y_2, faisant un système fondamental avec y_1, se trouve par l'équation

$$(8) \qquad y_2 = y_1 \int \frac{dx}{y_1^2}.$$

Pour l'évaluer on peut suivre le chemin que j'ai indiqué dans ma Lettre du 30 octobre, mais on peut aussi exprimer $\frac{1}{y_1^2}$ par votre formule, p. 693 des *Comptes rendus*.

6. En représentant $\frac{1}{y_1^2}$ par votre formule, je vous demande de me permettre de faire auparavant une remarque à l'égard de votre fonction $f(x)$. Pour qu'on puisse représenter une fonction $F(x)$ devenant infinie pour *un nombre infini de points du plan*, par $f(x)$ et les dérivées de cette fonction, il faut que $f(x)$ jouisse de la même propriété.

Par là il est défendu que la quantité ω soit telle que

$$H(x+\omega) = e^{\alpha x+\beta} H(x),$$

où α, β sont des constantes. Cette équation n'est remplie que si

$$\omega = m 2K + n 2K'i,$$

où m et n sont des nombres entiers. Posons donc

$$(1) \qquad \psi(x) = \frac{1}{y_1^2},$$

on a

$$(2) \qquad \begin{cases} \psi(x+2K\ ) = \mu\, \psi(x), \\ \psi(x+2K'i) = \mu'\, \psi(x), \end{cases}$$

où

$$(3) \qquad \begin{cases} \mu = e^{-4K\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}}, \\ \mu' = e^{-2\frac{i\pi}{K}a-4iK'\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}}. \end{cases}$$

Pour exprimer $\psi(x)$ par votre formule, on doit poser, p. 692 des *Comptes rendus*,

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} \lambda &= -2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)},\\ \omega &= 2a.\end{aligned}\right.$$

Votre formule est donc applicable pour notre cas, *excepté* pour les valeurs de a que voici

$$(5) \qquad a = m\mathrm{K} + n\mathrm{K}'i \ (m,\ n \text{ nombres entiers}),$$

c'est-à-dire, comme $\Theta(a)$ ne doit pas être zéro, afin que $\sin\operatorname{am} a$ entrant dans l'équation différentielle reste fini pour ces valeurs de a, pour lesquelles on a $\mathrm{H}(a)\mathrm{H}_1(a)\Theta_1(a) = 0$, où

$$(5a) \qquad \sin\operatorname{am} a \cos\operatorname{am} a \,\Delta\operatorname{am} a = 0.$$

Mais si a n'appartient pas aux valeurs (5), la fonction $\psi(x)$ est représentable par votre formule, et nous choisissons

$$(6) \qquad f(x) = \frac{\mathrm{H}'(0)}{\mathrm{H}(2a)}\,\frac{\mathrm{H}(x+2a)}{\mathrm{H}(x)}\,e^{-2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}x}.$$

La fonction $\psi(x)$ ne devient infinie dans un parallélogramme de période que pour le point $x = a$, et là elle devient infinie de second ordre. Le coefficient de $x - a$ dans le développement de $\psi(x)(x-a)^2$, selon les puissances de $x - a$, s'annule; par suite on a, d'après votre formule, p. 693 des *Comptes rendus*,

$$(7) \qquad \psi(x) = \mathrm{A}_1\,\mathrm{D}f(x-a);$$

donc, à un facteur constant près,

$$(8) \qquad y_2 = y_1\int\frac{dx}{y_1^2} = y_1 f(x-a) = \frac{\mathrm{H}(x+a)}{\Theta(x)}\,e^{-\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}x},$$

comme vous avez trouvé aussi.

Il suit du développement précédent qu'il y a une exception, si a appartient à la valeur (5), mais aussi qu'il n'y a pas d'autre exception. Cela est d'accord avec ce que j'ai indiqué dans ma Lettre précédente. Dans ce cas d'exception on doit, ou procéder comme je l'ai déjà fait dans ma Lettre, ou choisir une fonction $f(x)$ par laquelle soit représentable une fonction $F(x)$ jouissant de la propriété

$$\begin{aligned} F(x+2K) &= \mu F(x), \\ F(x+2K'i) &= \mu' F(x). \end{aligned}$$

Voici maintenant avec plus de détails les calculs relatifs à ma Lettre du 30 octobre, pour l'évaluation de l'intégrale $y_2 = y_1 \int \frac{dx}{y_1^2}$.

Je pars de l'équation connue

$$(1) \qquad \int_0^x \frac{\sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a \, \Delta \operatorname{am} u}{\sin^2 \operatorname{am} a - \sin^2 \operatorname{am} x} dx = -x \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2} \log \frac{H(a+x)}{H(a-x)},$$

qui vaut pour toutes les valeurs de a, excepté les valeurs

$$(2) \qquad a = mK + nK'i \quad (m, n \text{ nombres entiers}).$$

Par la différentiation de l'équation (1) on obtient

$$(3) \qquad D_x \log \frac{H(x-a)}{H(x+a)} = -2 \left[\frac{\sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} u \, \Delta \operatorname{am} u}{\sin^2 \operatorname{am} a - \sin^2 \operatorname{am} x} + \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} \right],$$

de là

$$(4) \qquad D_x \log \frac{H(x-a)}{H(x+a)} + 2 \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} x = -2 \frac{\sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a \, \Delta \operatorname{am} a}{\sin^2 \operatorname{am} a - \sin^2 \operatorname{am} x}.$$

D'autre part on sait que

$$\sin^2 \operatorname{am} a - \sin^2 \operatorname{am} x = -\frac{\Theta^2(0) H(x+a) H(x-a)}{K \Theta^2(x) \Theta^2(a)};$$

donc l'équation (4) devient

$$\mathrm{D}_x \log\left[\frac{\mathrm{H}(x-a)}{\mathrm{H}(x+a)} e^{2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}x}\right] = -k_1 \frac{\mathrm{H}(a)\mathrm{H}_1(a)\Theta_1(a)}{\Theta(a)\Theta^2(0)} \frac{\Theta^2(x)}{\mathrm{H}(x+a)\mathrm{H}(x-a)}.$$

Multipliant les deux membres par

$$\frac{\mathrm{H}(x-a)}{\mathrm{H}(x+a)} e^{2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}x},$$

il suit

$$(5) \qquad \mathrm{D}\left[\frac{\mathrm{H}(x-a)}{\mathrm{H}(x+a)} e^{2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}x}\right] = \text{const.}\, \frac{\Theta^2(x) e^{2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}x}}{\mathrm{H}^2(x+a)} = \frac{\text{const}}{y_1^2}.$$

De cette équation on déduit

$$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{dx}{y_1^2} = \text{const.}\, \frac{\mathrm{H}(x-a)}{\mathrm{H}(x+a)} e^{2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}x},$$

par suite, à un facteur constant près,

$$(6) \qquad y_2 = \frac{\mathrm{H}(x-a)}{\Theta(x)} e^{\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}x}$$

L'équation (1) est en défaut, si l'on attribue à la quantité a une des valeurs (2).

Prenons $a = 0$, $a = \mathrm{K}$, $a = \mathrm{K} + i\mathrm{K}'$: alors on a, à des facteurs constants près, respectivement

$$y_1 = \sin \operatorname{am} x, \quad y_1 = \cos \operatorname{am} x, \quad y_1 = \Delta \operatorname{am} x;$$

mais

$$\int \frac{dx}{\sin^2 \operatorname{am} x} = \mathfrak{H} x - \mathrm{D} \log \mathrm{H}(x),$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 \operatorname{am} x} = \mathfrak{H}_1 x - \mathrm{D} \log \mathrm{H}_1(x),$$

$$\int \frac{dx}{\Delta^2 \operatorname{am} x} = \mathfrak{H}_2 x - \mathrm{D} \log \Theta_1(x),$$

$\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ étant des constantes connues; donc, on a respectivement

$$y_2 = \mathfrak{H}\, x \frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)} - \frac{\mathrm{H}'(x)}{\Theta(x)},$$

$$y_2 = \mathfrak{H}_1 x \frac{\mathrm{H}_1(x)}{\Theta(x)} - \frac{\mathrm{H}'_1(x)}{\Theta(x)},$$

$$y_2 = \mathfrak{H}_2 x \frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)} - \frac{\Theta'_1(x)}{\Theta(x)}.$$

Heidelberg, 16 novembre 1877.

A votre demande j'ajoute ici aujourd'hui un résumé bref des recherches que j'ai faites depuis que je vous adressai la lettre mentionnée dans cette Note et que j'ai publiées dans les *Nouvelles de la Société royale de Göttingue* (d. d. 15 décembre 1877).

L'équation différentielle de Lamé et de même ces équations différentielles qui font base à la théorie des fonctions de Lamé d'ordre supérieur, introduites par M. Heine, ne sont que des cas particuliers d'une classe d'équations différentielles linéaires du second ordre, que j'ai traitées dans mon travail (*Journal de M. Borchardt*, t. LXXXI, p. 116-118, n° 13), et que j'y ai intégrée au moyen d'intégrales elliptiques et hyperelliptiques.

Dans la Note mentionnée insérée dans les *Nouvelles de la Société royale de Göttingue,* après avoir résumé dans le n° 1 le résultat principal du n° 13 de mon travail du t. LXXXI du *Journal de M. Borchardt*, je fais voir dans le n° 2, au moyen de ce résultat, que, pour que l'équation spéciale

$$\text{(A)} \qquad \mathrm{R}(z)\frac{d^2u}{dz^2} + \tfrac{1}{2}\mathrm{R}'(z)\frac{du}{dz} + \mathrm{H}(z)u = 0,$$

où $\mathrm{R}(z)$, $\mathrm{H}(z)$ sont des fonctions rationnelles et entières respectivement du degré m et $m-2$, et $\mathrm{R}'(z) = \frac{d\mathrm{R}(z)}{dz}$, ait une intégrale de la forme

$$u = \mathrm{G}^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\int\frac{dz}{\mathrm{G}\sqrt{\mathrm{R}}}},$$

où G est une fonction rationnelle et entière et λ une constante, il faut et il suffit que, pour tout zéro b de la fonction $G(z)$,

$$\text{(B)}\qquad G'(b)^2 R(b) = -\lambda$$

et

$$\text{(C)}\quad H(z) = \left[-\frac{1}{4}\left(\frac{d\log G}{dz}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{d^2\log G}{dz^2} - \frac{1}{4}\frac{d\log G}{dz}\frac{d\log R}{dz} + \frac{\lambda}{4G^2R}\right]R.$$

Si λ s'annule, $G(z)$ s'annule pour $z = b$ de premier ou de second ordre, selon que $R(b)$ est égal à zéro ou différent de zéro. Dans ce cas, si $R(b)$ est différent de zéro, on a

$$\text{(B}')\qquad \frac{G'''(b)}{G''(b)} = -\frac{3}{2}\frac{R'(b)}{R(b)}.$$

Dans le n° **3** j'applique les résultats du n° **21** de mon Mémoire cité contenu dans le *Journal de M. Borchardt*, t. LXXXI, p. 129, desquels il suit que $G(z)$ satisfait toujours à l'équation différentielle

$$\text{(D)}\qquad R\frac{d^3\omega}{dz^3} + \frac{3}{2}R'\frac{d^2\omega}{dz^2} + \left[\frac{1}{2}R'' + 4H\right]\frac{d\omega}{dz} + 2H'\omega = 0,$$

au moyen de laquelle je détermine les coefficients de la fonction $G(z)$, et j'établis les conditions pour que l'équation (A) ait une intégrale de la forme $G_1(z)\sqrt{R_1(z)}$, $G_1(z)$, $R_1(z)$ étant des fonctions rationnelles et entières dont la dernière ne s'annule que du premier ordre et seulement pour les racines de l'équation $R(z) = 0$.

Ayant ainsi trouvé $G(z)$, si $G(z)$ n'a aucun facteur quadratique, l'équation (A) a un système fondamental d'intégrales

$$\text{(E)}\qquad u_1 = G^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\int\frac{dz}{G\sqrt{R}}},\quad u_2 = G^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\int\frac{dz}{G\sqrt{R}}},$$

Je démontre dans le n° **4** que l'intégrale $\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\int\frac{dz}{G\sqrt{R}}$ est une intégrale abélienne de troisième espèce devenant infinie pour $z = b_i$ comme la fonction $\pm\frac{1}{2}\log(z - b_i)$. En me réservant l'évaluation de ces intégrales au moyen des fonctions Θ abéliennes, ainsi que la considération plus approfondie du cas $\lambda = 0$ à une autre occasion, je me restreins dans les numéros suivants au cas

$$(\mathrm{A}') \qquad \mathrm{R}(z)\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{2}\mathrm{R}'(z)\frac{du}{dz} - [n(n+1)k^2z^2 + h]\,u = 0,$$

où

$$\mathrm{R}(z) = (1 - z^2)(1 - k^2z^2),$$

que l'on obtient en faisant dans l'équation de Lamé

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{\mathrm{R}(z)}.$$

En évaluant alors les intégrales (E), je trouve, dans le n° 5, le système fondamental d'intégrales de l'équation de Lamé

$$(\mathrm{F}) \qquad \begin{cases} y_1 = \displaystyle\prod_1^n {}_l\, e^{-\varepsilon_l x \frac{\Theta'(\beta_l)}{\Theta(\beta_l)}} \frac{\mathrm{H}(x+\beta_l)^{\frac{1}{2}(1+\varepsilon_l)}\mathrm{H}(x-\beta_l)^{\frac{1}{2}(1-\varepsilon_l)}}{\Theta(x)^n}, \\ y_2 = \displaystyle\prod_1^n {}_l\, e^{+\varepsilon_l x \frac{\Theta'(\beta_l)}{\Theta(\beta_l)}} \frac{\mathrm{H}(x+\beta_l)^{\frac{1}{2}(1-\varepsilon_l)}\mathrm{H}(x-\beta_l)^{\frac{1}{2}(1+\varepsilon_l)}}{\Theta(x)^n}, \end{cases}$$

en désignant par $b_l = \sin\operatorname{am}\beta_l$ l'une des racines de l'équation $\mathrm{G}(z) = 0$ et en déterminant le signe de $\varepsilon_l = \pm 1$ par l'équation

$$\mathrm{G}'(b_l)\sqrt{\mathrm{R}(b_l)} = \varepsilon_l\sqrt{-\lambda}.$$

Il est remarquable que les cas d'exceptions s'offrent par la même méthode sans aucune difficulté. En effet, je démontre dans le n° 6 qu'il n'y a d'exception que quand l'équation (A′) est satisfaite elle-même par une intégrale algébrique, c'est-à-dire pour les valeurs de h pour lesquelles on peut satisfaire au système d'équations linéaires suivantes :

$$(\mathrm{G}) \qquad \begin{cases} (l+2)(l+1)c_{l+2} - [(l+\alpha)^2 + (l+\beta)^2k^2 + h]c_l \\ \qquad + k^2(l+\alpha+\beta+n-1)(l+\alpha+\beta-n-2)c_{l-2} = 0, \end{cases}$$

pour

$$l = 0, 1, 2, \ldots, n - \alpha - \beta + 2,$$

ou α, β désignent l'un ou l'autre des nombres o, 1. Selon que $n-\alpha-\beta$ est pair ou impair, on peut poser les coefficients d'indices impairs ou pairs égaux à zéro, et l'élimination des quantités c restantes conduit à une équation algébrique

$$\text{(H)} \qquad \psi(h) = 0,$$

pour déterminer la quantité h. Les intégrales de l'équation de Lamé se trouvent dans ce cas comme voici :

En posant $n-\alpha-\beta=\mu$, on a

$$\text{(I)} \quad \left\{ \begin{aligned} y_1 &= (\cos \operatorname{am} x)^\alpha (\Delta \operatorname{am} x)^\beta (\sin \operatorname{am} x)^\varepsilon \prod_{1}^{\frac{\mu-\varepsilon}{2}}{}_l \frac{\mathrm{H}(x+\beta_l)\mathrm{H}(x-\beta_l)}{\Theta(x)^{\mu-\varepsilon}}, \\ y_2 &= y_1 \left[\begin{aligned} &\left(\sigma - \tau\frac{1}{\mathrm{K}}\right)x + \sum_{1}^{\frac{\mu-\varepsilon}{2}}{}_l\, \omega_l \mathrm{D}_x \log \mathrm{H}(x+\beta_l)\mathrm{H}(x-\beta_l) \\ &- \varepsilon \mathrm{D}_x \log \mathrm{H}(x) + \alpha\gamma \mathrm{D}_x \log \mathrm{H}_1(x) + \beta\delta \mathrm{D}_x \log \Theta_1(x) \end{aligned} \right], \end{aligned} \right.$$

$b_i = \sin\beta_i$ étant racine de l'équation $\mathrm{F}_{\alpha\beta}(z)=0$, où $\mathrm{F}_{\alpha\beta}(z)$ est une fonction rationnelle et entière du degré μ, dont les coefficients se déterminent par l'équation (G).

Dans les formules (I) on a $\varepsilon = 0$ ou $\varepsilon = 1$, selon que μ est pair ou impair, et

$$\gamma = \frac{2}{\mathrm{R}'(1)\mathrm{F}^2_{\alpha\beta}(1)}, \quad \delta = \frac{2}{k\mathrm{R}'\left(\frac{1}{k}\right)\mathrm{F}^2_{\alpha\beta}\left(\frac{1}{k}\right)},$$

$$\sigma = -k^2 \sum^{\frac{\mu-\varepsilon}{2}}{}_l \frac{b_l^2}{f^1_{\alpha\beta}(b_l)^2 \mathrm{R}(b_l)} + \alpha\gamma k^2 + \beta\delta,$$

$$\omega_l = -\frac{1}{\mathrm{R}(b_l) f'_{\alpha\beta}(b_l)^2}\, \tau = 2\sum_{1}^{\frac{\mu-\varepsilon}{2}}{}_l\, \omega_l - \varepsilon + \alpha\gamma + \beta\delta,$$

$$f_{\alpha\beta} = \mathrm{F}_{\alpha\beta}\left(\sqrt{1-z^2}\right)^\alpha \left(\sqrt{1-k^2z^2}\right)^\beta.$$

Enfin j'explique, dans le n° **7**, aussi par une autre méthode, en m'appuyant seulement sur les principes de la théorie des équations différentielles linéaires, sans recourir à l'évaluation des intégrales, pourquoi l'exception doit se présenter dans le cas indiqué.

Heidelberg, 31 janvier 1878

L. FUCHS.