JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

YVON VILLARCEAU

Sur le développement, en séries, des racines réelles des équations

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 4 (1878), p. 119-124.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1878_3_4__119_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Sur le développement, en séries, des racines réelles des équations;

PAR M. YVON VILLARCEAU.

Depuis les travaux d'Euler sur cette question, bien des solutions de formes diverses ont été obtenues par les géomètres. La plupart se sont proposé, notamment, de développer la racine x de l'équation à résoudre

$$fx = 0, \tag{1}$$

suivant les puissances de fa, a désignant une quantité quelconque, comprise entre des limites hors desquelles le développement ne serait pas convergent.

Le problème consiste à former les valeurs des coefficients de la série proposée. Lagrange, en dernier lieu, a donné plusieurs démonstrations de ses formules. Aucune des démonstrations qui sont parvenues à ma connaissance ne me paraît aussi simple que celle à laquelle je suis arrivé de mon côté. En la proposant aux géomètres, je suis prêt à reconnaître la priorité en faveur de ceux qui l'auraient déjà publiée : dans l'incertitude à cet égard, je crois utile de présenter ici une démonstration très-simple et qui certainement n'est pas connue du plus grand nombre des analystes ; car autrement on ne comprendrait pas que son degré de simplicité ne lui eût pas fait trouver place dans les *Traités de Calcul différentiel,* où l'on fait suivre l'exposition des théories de quelques-unes de leurs applications les plus importantes.

Supposons, comme d'habitude, l'équation (1) privée de racines égales; supposons en outre que, dans le cas des racines presque égales, on ait substitué à l'inconnue primitive une nouvelle inconnue divisée par un nombre k assez grand pour opérer la séparation des racines; il en résultera que la première dérivée $f'x$ ne deviendra ni nulle ni très-petite, dans le voisinage de la racine considérée.

Hors le cas de $f'x = 0$, ou très-petit, la méthode suivante convient aussi bien aux équations transcendantes qu'aux équations algébriques.

Désignant par a la valeur approchée de l'une des racines, valeur que fournira l'un quelconque des procédés en usage, nous aurons recours à la méthode des coefficients indéterminés, et nous poserons

$$(2)\quad x = a - A_1\frac{fa}{1} + A_2\frac{(fa)^2}{1.2} - A_3\frac{(fa)^3}{1.2.3} + A_4\frac{(fa)^4}{1.2.3.4} - \ldots$$

La forme donnée à ce développement satisfait à la condition que, si a est racine de l'équation (1), on ait effectivement $x = a$.

Ceci posé, puisque, par hypothèse, le développement (2) doit fournir une même valeur de x, lorsqu'on y introduit une valeur quelconque a prise entre les limites pour lesquelles la série est convergente, on doit avoir

$$(3)\qquad \frac{dx}{da} = 0.$$

Cette relation va nous permettre de déterminer les coefficients A_1, A_2, ... Observant que ces coefficients sont nécessairement des fonctions de a, nous aurons, en appliquant la condition (3) au développement (2),

$$0 = 1 - A_1\frac{df}{da} + \left(A_2\frac{df}{da} - \frac{dA_1}{da}\right)\frac{fa}{1} - \left(A_3\frac{df}{da} - \frac{dA_2}{da}\right)\frac{(fa)^2}{1.2} + \left(A_4\frac{df}{da} - \frac{dA_3}{da}\right)\frac{(fa)^3}{1.2.3} - \ldots$$

Or, cette relation devant avoir lieu, quels que soient a et, par suite, fa, on en déduit les équations de condition suivantes, dont la première détermine le coefficient A_1 :

$$(4)\quad A_1\frac{df}{da} = 1,\quad A_2\frac{df}{da} = \frac{dA_1}{da},\quad A_3\frac{df}{da} = \frac{dA_2}{da},\quad A_4\frac{df}{da} = \frac{dA_3}{da},\quad \ldots$$

Il reste à exprimer les coefficients A_2, A_3, ..., au moyen des dérivées de la fonction f. Différentiant la première de ces équations, nous aurons, en transposant ensuite le terme en A_1,

$$\frac{dA_1}{da}\frac{df}{da} = -A_1\frac{d^2f}{da^2};$$

d'où, en vertu de l'une des relations (4),

$$A_2 \frac{df^2}{da^2} = - A_1 \frac{d^2 f}{da^2}.$$

Cette équation nous fournit la valeur de A_2 en fonction de A_1 ; en la différentiant de même, on aura

$$\frac{dA_2}{da}\frac{df^2}{da^2} = - A_1 \frac{d^3 f}{da^3} - \frac{dA_1}{da}\frac{d^2 f}{da^2} - 2 A_2 \frac{df}{da}\frac{d^2 f}{da^2};$$

en ayant égard aux valeurs (4) de $\frac{dA_1}{da}$ et $\frac{dA_2}{da}$, on en déduit

$$A_3 \frac{df^3}{da^3} = - A_1 \frac{d^3 f}{da^3} - 3 A_2 \frac{d^2 f}{da^2}\frac{df}{da}.$$

Ceci suffit pour montrer comment s'obtiendront, de proche en proche, les résultats que l'on a réunis dans le tableau suivant :

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
&A_1 \frac{df}{da} = 1,\\
&A_2 \frac{df^2}{da^2} = - A_1 \frac{d^2 f}{da^2},\\
&A_3 \frac{df^3}{da^3} = - A_1 \frac{d^3 f}{da^3} - A_2 \left[3 \frac{d^2 f}{da^2}\frac{df}{da}\right],\\
&A_4 \frac{df^4}{da^4} = - A_1 \frac{d^4 f}{da^4} - A_2 \left[4 \frac{d^3 f}{da^3}\frac{df}{da} + \tfrac{1}{2} 6 \left(\frac{d^2 f}{da^2}\right)^2\right] - A_3 \left[6 \frac{d^2 f}{da^2}\frac{df^2}{da^2}\right],\\
&A_5 \frac{df^5}{da^5} = - A_1 \frac{d^5 f}{da^5} - A_2 \left[5 \frac{d^4 f}{da^4}\frac{df}{da} + 10 \frac{d^3 f}{da^3}\frac{d^2 f}{da^2}\right],\\
&\qquad\qquad - A_3 \left[10 \frac{d^3 f}{da^3}\frac{df^2}{da^2} + 15 \left(\frac{d^2 f}{da^2}\right)^2 \frac{df}{da}\right] - A_4 \left[10 \frac{d^2 f}{da^2}\frac{df^3}{da^3}\right],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Ainsi qu'on l'a annoncé, les coefficients A_1, A_2, ... se trouvent exprimés directement, au moyen des seules dérivées de la fonction f. La loi des coefficients est facile à reconnaître jusqu'aux termes en A_2 ; mais, au delà, il est difficile de l'apercevoir.

Il sera utile, dans les applications, d'obtenir les valeurs explicites des coefficients : pour en simplifier l'écriture, il nous paraît convenable de remplacer les dérivées par certaines fonctions de ces dérivées, en posant

$$(6)\quad \alpha_1 = 1 : \frac{df}{da}, \quad \alpha_2 = \frac{d^2f}{da^2} : \frac{df^2}{da^2}, \quad \alpha_3 = \frac{d^3f}{da^3} : \frac{df^3}{da^3}, \quad \alpha_4 = \frac{d^4f}{da^4} : \frac{df^4}{da^4}, \quad \ldots$$

Nous nous dispenserons d'écrire ici le résultat de la transformation des formules (5).

Par un transport successif des valeurs des coefficients obtenus, dans les expressions de ceux qui viennent ensuite, on forme les valeurs explicites des divers coefficients, et l'on peut écrire immédiatement la valeur de x, en portant ces coefficients dans le développement (2); il vient ainsi finalement

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} x = a &- \alpha_1 \frac{fa}{1} - \alpha_1\alpha_2 \frac{(fa)^2}{1.2} + \alpha_1(\alpha_3 - 3\alpha_2^2)\frac{(fa)^3}{1.2.3} \\ &- \alpha_1(\alpha_4 - 10\alpha_3\alpha_2 + 15\alpha_2^3)\frac{(fa)^4}{1.2.3.4} \\ &+ \alpha_1(\alpha_5 - 15\alpha_4\alpha_2 + 105\alpha_3\alpha_2^2 - 105\alpha_2^4 - 10\alpha_3^2)\frac{(fa)^5}{1.2.3.4.5} \\ &- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

développement qui, réduit à ses deux premiers termes, s'identifie avec le résultat de l'application de la méthode de Newton.

Sous cette forme, il est visible que l'on pourra calculer assez rapidement les trois ou quatre premiers termes qui viennent à la suite de a.

La série sera d'autant plus convergente, que l'arbitraire a sera plus voisine d'une des racines : il est évident que cette arbitraire a ne pourra servir à déterminer une racine, qu'autant qu'elle restera comprise dans les limites hors desquelles le développement cesserait d'être convergent, et qu'entre ces limites la formule fournira une valeur unique de x; car autrement, on ne concevrait pas qu'elle donnât la valeur de l'une des racines réelles de l'équation proposée, plutôt que celle des autres, si l'équation en a plusieurs. On comprend dès lors comment on obtiendra les autres racines réelles, au moyen de valeurs assez approchées pour que le développement reste convergent.

Ces considérations nous semblent établir une liaison intime entre le problème de la séparation des racines et celui de la convergence de la série (7).

On pourra remarquer que la précédente méthode s'appliquerait à la détermination des racines d'un système d'équations à plusieurs inconnues; mais les résultats seraient notablement plus compliqués que ceux relatifs à une seule.

Présentons quelques applications numériques de nos formules.

PREMIER EXEMPLE — Nous choisirons celui que l'on trouve dans le *Dictionnaire des Sciences mathématiques* de M. de Montferrier, t. II, p. 458.

Soit l'équation à résoudre

$$fx = x^3 - 2x - 20 = 0;$$

on en déduit

$$\frac{df}{dx} = 3x^2 - 2, \quad \frac{d^2f}{dx^2} = +6x, \quad \frac{d^3f}{dx^3} = +6.$$

Observant que l'une des racines est comprise entre 2 et 3, mais plus voisine de ce dernier nombre, on fera

$$a = 3; \quad \text{d'où} \quad fa = +1, \quad \frac{df}{da} = +25, \quad \frac{d^2f}{da^2} = +18, \quad \frac{d^3f}{da^3} = +6,$$

et les formules (6) donneront

$$\alpha_1 = \frac{1}{25}, \quad \alpha_2 = \frac{18}{(25)^2}, \quad \alpha_3 = \frac{6}{(25)^3}, \quad \text{d'où} \quad \alpha_3 - 3\alpha_2^2 = -6\frac{137}{(25)^4};$$

mettant ces valeurs dans la formule (7), il vient

$$x = 3 - \frac{1}{25} - \frac{9}{(25)^3} - \frac{137}{(25)^5} - \ldots = 3 - 0,04 - 0,000576 - 0,000014 \ldots$$

ou

$$x = 2,959410.$$

Vérification :

$$\begin{array}{rl} x^3 = & +25,91884 \\ -2x - 20 = & -25,91882 \\ \hline \text{Somme}\ldots = & +\ 0,00002 \quad (^*). \end{array}$$

DEUXIÈME EXEMPLE. — Résolution de l'*Équation* dite *des Comètes*.

$$fx = \sin^4 x - \frac{1}{h}\sin(x - g) = 0;$$

pour faciliter les différentiations, on mettra l'expression de fx sous la forme

$$fx = +\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{h}\sin(x - g) + \frac{3}{8},$$

(*) Au moyen du même nombre de termes, l'auteur du *Dictionnaire* trouve $x = 2,9594047$ et l'erreur de l'équation est $-0,00011$; la cause de cette erreur est dans une faute de signe, qu'il a commise en faisant la *somme combinatoire* à laquelle il a eu recours.

et l'on en déduira

$$\frac{df}{dx} = -\frac{1}{2}\sin 4x + \sin 2x - \frac{1}{h}\cos(x-g),$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = -2\cos 4x + 2\cos 2x + \frac{1}{h}\sin(x-g),$$

$$\frac{d^3f}{dx^3} = +8\sin 4x - 4\sin 2x + \frac{1}{h}\cos(x-g).$$

Soient donnés

$$l.h = 0,1761986, \quad g = -25°37'47'',04.$$

On suppose (voir *Annales de l'Observatoire*, Mémoires, t. III, p. 154), que l'angle $x-g$ ou $C-g$ du Mémoire est voisin de 90 degrés : nous poserons

$$a - g = 90°;$$

d'où

$$\begin{array}{lll} a = 64°22'12'',96, & fa = -0,0056995, & l.fa = 7,75584-\\ 2a = 128\ 44\ 25,92, & \sin 2a = +0,77999, & \cos 2a = -0,62579,\\ 4a = 257\ 28\ 51,84, & \sin 4a = -0,97622, & \cos 4a = -0,21676, \end{array}$$

$$\frac{1}{h}\cos(a-g) = 0, \qquad \frac{1}{h}\sin(a-g) = +0,66650:$$

il s'ensuit

$$l.\frac{df}{da} = 0,103154+, \quad l.\frac{d^2f}{da^2} = 9,18058-, \quad l.\frac{d^3f}{da^3} = 1,03861-,$$

$$l.\alpha_1 = 9,896846+, \quad l.\alpha_2 = 8,97427-, \quad l.\alpha_3 = 0,72915-,$$

$$l.(\alpha_3 - 3\alpha_2^2) = 0,73130-,$$

$$l.-\alpha_1\alpha_2 = 8,8711+, \qquad l.\alpha_1(\alpha_3 - 3\alpha_2^2) = 0,6281\ -,$$

$$\begin{array}{rll} -\alpha_1\dfrac{fa}{1} = & +0,0044946 & l. = 7,65269+\\ -\alpha_1\alpha_2\dfrac{(fa)^2}{1.2} = & +0,0000012 & l. = 4,0817+\\ \alpha_1(\alpha_3 - 3\alpha_2^2)\dfrac{(fa)^3}{1.2.3} = & +0,0000001 & l. = 3,1175+ \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} \text{Somme....} & +0,0044959 = & 0°15'27'',36\\ & a = & 64\ 22\ 12,96\\ & x = & 64\ 37\ 40,32\\ & x-g = & 90\ 15\ 27,36. \end{array}$$

Vérification :

$$\begin{array}{rl} l.\sin^4 x = & 9,8237969\\ l.\dfrac{1}{h}\sin(x-g) = & 9,8237970\\ \text{Erreur} = & 0,0000001 \end{array}$$