

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. COLLET

**Sur le raccordement de deux alignements droits d'une
ligne de chemin de fer horizontale**

Journal de mathématiques pures et appliquées 3^e série, tome 3 (1877), p. 61-78.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1877_3_3_61_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Sur le raccordement de deux alignements droits d'une ligne
de chemin de fer horizontale ;*

PAR M. J. COLLET,

Professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble.

Lorsqu'un train de chemin de fer circule sur une voie courbe, la force centrifuge tend à produire le renversement des voitures en même temps que leur déplacement suivant le prolongement du rayon de courbure de la voie. La pesanteur s'oppose, jusqu'à un certain point, au premier de ces mouvements ; et, pour qu'elle soit efficace aussi contre le second, on donne au rail extérieur un *surhaussement* ou *dévers* en rapport avec la courbure de la ligne et les limites de vitesse des trains.

Quant à la façon dont s'opère le passage de l'alignement droit à la courbe, quant à la loi de distribution des dévers dans le raccordement, la méthode suivie varie avec les Compagnies.

Nous nous proposons ici de chercher *comment doit être établi le raccordement de deux alignements droits horizontaux d'une ligne de chemin de fer pour que la stabilité des wagons soit assurée* ; et, dans ce but, nous calculerons d'abord les réactions exercées sur les roues d'un wagon par les rails d'une voie horizontale de forme quelconque.

I.

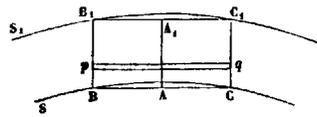
Considérons une voiture à quatre roues.

Nous ferons abstraction, dans le calcul, d'abord des changements de position relative que l'inégale flexion des ressorts peut faire éprou-

ver au centre de gravité du wagon ; puis, des petits déplacements perpendiculaires à la voie résultant de la forme conique des jantes des roues et de la petite différence qui existe entre la largeur de la voie entre rails et la distance extérieure des rebords ou boudins des roues accouplées, déplacements qui n'ont d'ailleurs pour effet que de modifier le dévers d'une quantité très-petite par rapport à lui-même. Par suite on supposera constantes et égales les circonférences de contact des roues sur les rails.

Les dimensions du wagon étant toujours très-petites par rapport au rayon de courbure de la voie, on peut supposer que le quadrilatère BCC_1B_1 (*fig. 1*), ayant pour sommets les points de contact des roues et

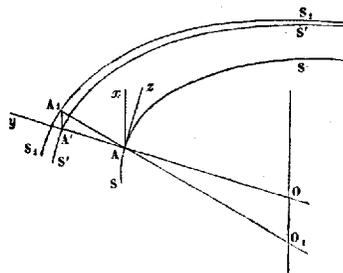
Fig. 1.



des rails, est un rectangle dont les côtés opposés BC, B_1C_1 sont horizontaux et se confondent sensiblement avec les arcs qu'ils soutiennent, la très-faible inclinaison de B, C_1 étant composée, pour le wagon, par l'inégale flexion des ressorts. Alors, à un instant quelconque, le système peut être considéré comme animé d'un mouvement de rotation autour de la verticale qui passe par le centre de courbure de l'arc intérieur BC , en même temps qu'il tourne d'une manière continue autour de la tangente à ce rail, soit autour de la corde BC , et que les roues effectuent leurs révolutions relatives autour de leurs centres respectifs ; donc tous les points situés dans un prisme infiniment mince pq , parallèle à BC , seront dans un état identique, et, en supposant que tout soit symétrique par rapport au plan perpendiculaire au milieu de BC et dont la trace est AA_1 , on pourra supposer toute la masse du prisme pq réunie à son centre de gravité situé dans le plan AA_1 , qu'il suffira de considérer seul en lui attribuant ainsi une masse égale à celle de la partie invariable de la voiture. On fera une réduction analogue pour les systèmes de roues et d'essieux, en les remplaçant par un système unique semblable aux précédents, mais de masse double en chaque point, et ayant son axe dans le plan AA_1 .

Soient (*fig. 2*) S le rail plan, O son centre de courbure pour un point A , S_1 le rail en dévers, extérieur au premier, et S' la projection de S_1 sur le plan du rail S . Si l'on mène en A le plan vertical normal à la courbe S , il coupera S_1 et S' respectivement en A_1 et A' , ce dernier point, projection du précédent, étant d'ailleurs sur le prolongement $A\gamma$ du rayon de courbure OA au point A de la courbe S . Si l'on imagine le système d'axes rectangulaires formé par la verticale Ax , la normale $A\gamma$ et la tangente Az à la courbe S , on pourra à chaque instant considérer ces trois axes comme animés d'un mouvement de rotation autour de l'axe instantané vertical OO_1 , mené par le centre de courbure de la courbe S , en même temps que le wagon, où le plan AA_1 , avec son

Fig. 2.



système unique de roues, entraîné dans le mouvement du système $Axyz$, possède un mouvement de rotation autour de Az et que les roues et l'essieu tournent en outre autour d'un axe parallèle à AA_1 , ou, par approximation, parallèle à $A\gamma$, l'angle $A, A\gamma$ étant très-petit.

Nous sommes ainsi ramenés à une étude de mouvement relatif.

Le mouvement relatif par rapport aux axes $Axyz$ est identique à un mouvement absolu rapporté aux mêmes axes supposés fixes, et qui serait produit par les forces réellement appliquées et par des forces fictives qui sont, pour chaque point, respectivement égales et contraires à la force d'entraînement et à la force centrifuge composée. Ces forces sont dirigées suivant les accélérations de même nom, et ont chacune pour mesure le produit de l'accélération correspondante par la masse du point considéré. On sait que l'accélération centrifuge composée a pour valeur $2\Omega v, \sin \delta$, Ω étant la vitesse instantanée de rotation du système

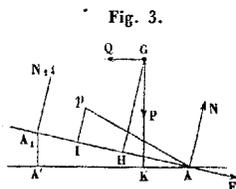
par rapport auquel le mouvement relatif est considéré, v , la vitesse relative du point par rapport à ce système, et δ l'angle de la vitesse relative et de l'axe instantané. Quant à sa direction, si l'on mène par le point des droites parallèles à l'axe instantané et à la vitesse relative, dans le même sens respectivement, l'accélération centrifuge composée est perpendiculaire au plan de ces deux droites dans la direction suivant laquelle devrait être placé un observateur qui aurait les pieds dans le plan, et qui, regardant l'angle des deux directions ci-dessus définies, aurait à sa gauche la parallèle à l'axe instantané, et à sa droite la vitesse relative.

Si l'on introduit les réactions des rails, on pourra considérer le système comme libre, et, appliquant le principe de d'Alembert à son mouvement relatif, on exprimera qu'il ne fait que tourner autour du point A relativement fixe, en écrivant que toutes les forces appliquées, réelles, fictives et d'inertie, transportées parallèlement à elles-mêmes en A, ont une résultante nulle, l'équation du mouvement autour de Az étant d'ailleurs obtenue en égalant à zéro la somme algébrique des moments des couples que fait naître la translation précédente des forces en A.

Passons au développement du calcul, et soient

- V la vitesse du wagon supposée constante;
- M la masse totale du wagon, des roues et des essieux;
- M_1 la masse des roues et des essieux;
- r le rayon des roues;
- ρ le rayon de courbure de la courbe S en A (*fig. 2*);
- I le rayon de gyration du wagon autour de Az;
- I_0 le rayon de gyration autour d'une parallèle à Az menée par le centre de gravité du wagon;
- G (*fig. 3*) le centre de gravité de tout le wagon;
- h la hauteur de ce centre au-dessus de AA₁;
- $2l$ la largeur AA₁ de la voie;
- ω l'angle variable A, AA';
- F la somme des composantes suivant A, A des réactions des rails;
- N et N₁ les composantes des mêmes réactions perpendiculairement à AA₁ dans le plan AA₁A'.

Pour chacune des forces, nous calculerons ses composantes suivant AA_1 et AN , ainsi que son moment par rapport au point A , moment qu'on prendra avec le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que la force tendra à augmenter ou à diminuer l'angle ω .



La pesanteur $P = Mg$, appliquée au centre de gravité G , donne ainsi, pour ses composantes et son moment,

$$- Mg \sin \omega, \quad - Mg \cos \omega, \quad - Mg(l \cos \omega - h \sin \omega).$$

La pression N ne donne pas de couple, tandis que la pression N_1 donne le couple $+ 2lN_1$.

L'accélération d'entraînement peut être pour tous les points supposée égale à $\frac{V^2}{\rho}$ et dirigée parallèlement à $A'A$; la résultante des forces égales et contraires aux forces d'entraînement sera une force $Q = M \frac{V^2}{\rho}$, appliquée en G , dirigée dans le sens AA' , et dont les composantes et le moment auront pour valeurs respectivement

$$+ M \frac{V^2}{\rho} \cos \omega, \quad - M \frac{V^2}{\rho} \sin \omega, \quad - M \frac{V^2}{\rho} (h \cos \omega + l \sin \omega).$$

La force centrifuge composée provenant de la rotation autour de Az étant perpendiculaire au plan vertical $A'A A_1$, il n'y a pas à en tenir compte.

Il reste à considérer les forces d'inertie du mouvement relatif considéré comme absolu.

Ce mouvement consistant dans la rotation du wagon autour de Az , en même temps que les roues et les essieux tournent autour de leurs axes respectifs, il y aura deux parties distinctes dans les forces d'inertie, celles qui proviennent de la rotation du wagon autour de Az , abs-

traction faite du mouvement partiel des roues, et celles qui se rapportent à ce dernier mouvement.

Dans la rotation autour de Az , la force d'inertie pour un point p de masse m se décompose en deux, l'une dirigée suivant Ap , l'autre perpendiculaire à cette ligne. La première est égale à $m \cdot pA \cdot \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2$, son moment est nul, et ses composantes

$$+ m \cdot AI \cdot \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2, \quad + m \cdot pI \cdot \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2$$

donnent, en les ajoutant aux composantes semblables relatives aux autres points,

$$+ Ml \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2, \quad + Mh \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2.$$

La seconde, égale à $m \cdot pA \cdot \frac{d^2\omega}{dt^2}$, donne de même les composantes

$$+ Mh \frac{d^2\omega}{dt^2}, \quad - Ml \frac{d^2\omega}{dt^2},$$

et le moment

$$- MI^2 \frac{d^2\omega}{dt^2}.$$

Nous n'avons plus à tenir compte que des forces d'inertie provenant des mouvements des roues, forces très-faibles il est vrai, mais dont la considération présente un certain intérêt.

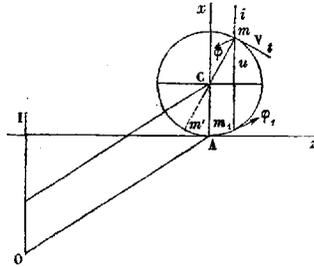
Nous négligerons l'influence de la rotation des essieux et des moyeux des roues, en ne considérant que les jantes dont la masse sera supposée concentrée à la circonférence.

Soit d'abord la roue tangente en A au rail S (*fig. 4*); elle tourne autour d'un axe qu'on peut supposer horizontal. On n'a à calculer que la force d'inertie provenant du mouvement de la roue relativement à son centre; car l'accélération relative d'un point de la roue se compose de celle qui provient de la rotation autour de Az et dont il a été tenu compte, et de celle qui résulte de la rotation de la roue.

L'accélération relative au centre, pour les différents points de la roue, ne donne rien, puisque deux points m, m' diamétralement opposés donneront des accélérations relatives égales et contraires.

Pour l'accélération centrifuge composée, comme la vitesse relative est tangente au cercle, on voit que, pour deux points m, m_1 situés sur une même verticale, les accélérations considérées seront perpendiculaires au plan de la roue, la première φ dirigée du côté de la conca-

Fig. 4.



vitité de la courbe, la seconde φ_1 , en sens contraire. Leurs valeurs sont égales, et, si l'on remarque que $\sin \delta = \sin imt = \frac{u}{r}$, en appelant $2u$ la longueur de la corde verticale mm_1 , et que, très-sensiblement, $\Omega = \frac{V}{\rho}$, $v_r = V$, on aura

$$\varphi = \varphi_1 = 2 \frac{V^2}{\rho} \frac{u}{r}.$$

Les forces d'inertie, opposées aux accélérations précédentes, ont pour valeur commune $2m \frac{V^2}{\rho} \frac{u}{r}$ et constituent un couple dont le moment est $-4m \frac{V^2}{\rho} \frac{u^2}{r}$. La somme des couples semblables pour les quatre roues sera $-16m \frac{V^2}{r\rho} \Sigma mu^2$, et, comme le rayon de gyration d'une circonférence de rayon r autour d'un diamètre est $\frac{r}{\sqrt{2}}$, on aura, pour la somme précédente,

$$-8M, r \frac{V^2}{\rho}.$$

Nous négligeons, dans le calcul de la force d'inertie provenant du mouvement propre des roues, l'influence de la rotation autour de Az , que l'on pourrait calculer d'ailleurs facilement.

D'après tout ce qui précède, les équations cherchées seront, en supposant la force F positive dans le sens A, A ,

$$\begin{aligned} Mh \frac{d^2\omega}{dt^2} + Ml \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + M \frac{V^2}{\rho} \cos \omega - Mg \sin \omega - F &= 0, \\ - Ml \frac{d^2\omega}{dt^2} + Mh \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 - M \frac{V^2}{\rho} \sin \omega - Mg \cos \omega + N + N_1 &= 0, \\ - MI^2 \frac{d^2\omega}{dt^2} - M \frac{V^2}{\rho} (h \cos \omega + l \sin \omega) \\ - Mg(l \cos \omega - h \sin \omega) + 2lN_1 - 8Mr \frac{V^2}{\rho} &= 0; \end{aligned}$$

ou bien, en posant

$$n = \frac{N}{M}, \quad n_1 = \frac{N_1}{M}, \quad f = \frac{F}{M}, \quad \mu = \frac{Mr}{M},$$

on déduira des équations qui précèdent les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} f &= h \frac{d^2\omega}{dt^2} + l \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \frac{V^2}{\rho} \cos \omega - g \sin \omega, \\ 2ln &= (2l^2 - I^2) \frac{d^2\omega}{dt^2} - 2lh \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 - \frac{V^2}{\rho} (h \cos \omega - l \sin \omega) \\ &\quad + g(l \cos \omega + h \sin \omega) - 8\mu r \frac{V^2}{\rho}, \\ 2ln_1 &= I^2 \frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{V^2}{\rho} (h \cos \omega + l \sin \omega) + g(l \cos \omega - h \sin \omega) + 8\mu r \frac{V^2}{\rho}. \end{aligned}$$

Si l'on appelle s l'arc compté depuis une origine quelconque, de façon que s croisse avec le temps, on aura

$$ds = V dt,$$

et, faisant disparaître le temps des équations qui précèdent, elles deviennent

$$\begin{aligned} (1) \quad f &= hV^2 \frac{d^2\omega}{ds^2} + lV^2 \left(\frac{d\omega}{ds}\right)^2 + \frac{V^2}{\rho} \cos \omega - g \sin \omega, \\ (2) \quad \left\{ \begin{aligned} 2ln &= (2l^2 - I^2) V^2 \frac{d^2\omega}{ds^2} - 2lhV^2 \left(\frac{d\omega}{ds}\right)^2 - \frac{V^2}{\rho} (h \cos \omega - l \sin \omega) \\ &\quad + g(l \cos \omega + h \sin \omega) - 8\mu r \frac{V^2}{\rho}, \end{aligned} \right. \\ (3) \quad 2ln_1 &= I^2 V^2 \frac{d^2\omega}{ds^2} + \frac{V^2}{\rho} (h \cos \omega + l \sin \omega) + g(l \cos \omega - h \sin \omega) + 8\mu r \frac{V^2}{\rho}. \end{aligned}$$

Telles sont les formules qui feront connaître les quantités f , n , n_1 , et par suite les réactions F , N , N_1 , quand la vitesse, la forme de la courbe et la loi du dévers seront données.

La stabilité du wagon sera assurée si ces données sont telles que l'on ait

$$f = 0, \quad n > 0, \quad n_1 > 0.$$

L'équation (1), en y faisant $f = 0$, établit une relation entre ρ et ω , c'est-à-dire entre la forme de la courbe et la loi du dévers; en d'autres termes, si l'on se donne la forme de la courbe, l'équation fournira la loi correspondante pour le dévers, et réciproquement; mais une courbe déterminée et la loi correspondante pour ω ne constituent une solution admissible du problème posé qu'autant que les valeurs de n et de n_1 , fournies par les formules (2) et (3) sont positives.

II.

Occupons-nous maintenant de la réalisation des conditions de stabilité.

Le raccordement par un *arc de cercle* tangent aux deux alignements droits étant le plus facile à tracer, nous le considérerons en premier lieu. Le dévers, nul d'abord, croîtra d'une manière continue jusqu'à une valeur maxima ω , déterminée par la vitesse du train et le rayon de courbure de la voie, de telle façon qu'avec ce dévers constant les conditions de stabilité soient remplies sur l'arc de cercle, après quoi le dévers décroîtra jusqu'à s'annuler.

La valeur de ω , se tirera de la formule (1) qui donne, pour le cas actuel,

$$\text{tang } \omega = \frac{V^2}{g\rho},$$

valeur qui est telle que la résultante des forces P , Q (*fig. 3*) soit normale à AA_1 .

Les formules (2) et (3) donnent alors

$$\begin{aligned} 2ln &= g(l \cos \omega_1 + h \sin \omega_1) - \frac{V^2}{\rho} (h \cos \omega_1 - l \sin \omega_1) - 8\mu r \frac{V^2}{\rho}, \\ 2ln_1 &= g(l \cos \omega_1 - h \sin \omega_1) + \frac{V^2}{\rho} (h \cos \omega_1 + l \sin \omega_1) + 8\mu r \frac{V^2}{\rho}; \end{aligned}$$

et, comme ω_1 , et par suite $\frac{V^2}{\rho}$, est une quantité qu'on suppose petite, les valeurs de n et n_1 sont positives, et, si l'on néglige les quantités de l'ordre de ω_1^2 , on aura

$$\omega_1 = \frac{V^2}{g\rho}, \quad n = \frac{g}{2} - 4\mu \frac{r}{l} \frac{V^2}{\rho}, \quad n_1 = \frac{g}{2} + 4\mu \frac{r}{l} \frac{V^2}{\rho},$$

d'où l'on voit que la différence des pressions est $8M_1 \frac{r}{l} \frac{V^2}{\rho}$, quantité de l'ordre de ω_1 .

Cherchons actuellement comment le dévers variable doit être établi sur l'arc de cercle.

On a pour cela à intégrer l'équation

$$(4) \quad \frac{d^2\omega}{ds^2} + \frac{l}{h} \left(\frac{d\omega}{ds}\right)^2 + \frac{1}{\rho h} \cos\omega - \frac{g}{hV^2} \sin\omega = 0,$$

dans laquelle ρ est supposé constant.

Par une première intégration, on trouve, a étant une constante arbitraire,

$$(5) \quad \left(\frac{d\omega}{ds}\right)^2 = ae^{-\frac{2\omega}{h}} + \frac{2}{h^2 + 4l^2} \left[\left(\frac{2gl}{V^2} - \frac{h}{\rho}\right) \sin\omega - \left(\frac{gh}{V^2} + \frac{2l}{\rho}\right) \cos\omega \right].$$

La valeur initiale ω_0 de ω sur l'arc de cercle ne doit pas être nulle, car $\frac{d^2\omega}{ds^2}$ serait initialement négatif d'après (4), et, par suite, l'angle formé avec l'horizon par la tangente au rail en dévers irait d'abord en décroissant pour croître ensuite, c'est-à-dire que, si l'on développait sur un plan le cylindre vertical ayant le rail en dévers pour directrice, la transformée de cette ligne présenterait une inflexion, ce qu'il est convenable d'éviter. Par suite, on ne doit pas passer sur l'arc de cercle sans un dévers initial, et il faut alors que le dévers soit distribué partie sur l'alignement, partie sur le cercle.

On aura, d'après cela, pour la constante a , en appelant α la valeur initiale de $\frac{d\omega}{ds}$,

$$a = \left\{ \alpha^2 + \frac{2}{h^2 + 4l^2} \left[\left(\frac{gh}{V^2} + \frac{2l}{\rho}\right) \cos\omega_0 - \left(\frac{2gl}{V^2} - \frac{h}{\rho}\right) \sin\omega_0 \right] \right\} e^{\frac{2l\omega_0}{h}}.$$

L'intégration de l'équation (5) dépend d'une quadrature que l'on ne peut effectuer que par approximation.

Nous considérerons à cet effet les quantités ω , $\frac{d\omega}{ds}$, $\frac{d^2\omega}{ds^2}$ et leurs valeurs initiales comme des infiniment petits du premier ordre, ainsi que le maximum $\frac{V^2}{g\rho}$ de ω , et *a fortiori* $\frac{1}{\rho}$. Les résultats obtenus de la sorte seront d'autant plus approchés que la vitesse V, qu'on peut modifier dans le voisinage du raccordement, sera plus petite, et que le rayon ρ sera plus grand.

Si alors, dans l'équation (5), on néglige les termes d'ordre supérieur au second, on aura une équation de la forme

$$(6) \quad \left(\frac{d\omega}{ds}\right)^2 = A\omega^2 + 2B\omega + C,$$

et, dans le calcul du coefficient A, on pourra négliger tout ce qui est infiniment petit, dans celui de B, tout ce qui est d'ordre supérieur au premier, et, dans celui de C, tout ce qui est d'ordre supérieur au second.

On a d'abord

$$\begin{aligned} A &= 2 \frac{l^2}{h^2} a_0 + \frac{1}{h^2 + 4l^2} \frac{gh}{V^2}, \\ B &= -\frac{l}{h} a_1 + \frac{1}{h^2 + 4l^2} \left(\frac{2gl}{V^2} - \frac{h}{\rho} \right), \\ C &= a - \frac{2}{h^2 + 4l^2} \left(\frac{gh}{V^2} + \frac{2l}{\rho} \right), \end{aligned}$$

en représentant par a_0 et a_1 , ce que devient a quand on ne conserve dans son expression que les termes finis, ou ces termes avec ceux du premier ordre seulement. On trouve

$$a_1 = \frac{2}{h^2 + 4l^2} \left(\frac{gh}{V^2} + \frac{2l}{\rho} \right), \quad a_0 = \frac{2gh}{V^2(h^2 + 4l^2)},$$

et les valeurs des coefficients deviennent

$$A = \frac{g}{hV^2}, \quad B = -\frac{l}{\rho h}, \quad C = a - \frac{2}{h^2 + 4l^2} \left(\frac{gh}{V^2} + \frac{2l}{\rho} \right).$$

On voit que B est du premier ordre, et il est facile de vérifier que tous les termes finis ou du premier ordre disparaissent de l'expression de C, qui se trouve être alors du second ordre; et, par suite, tous les termes de l'équation (6) sont du même ordre infinitésimal.

Si l'on convient de compter s , pour chaque arc de raccordement, du point de contact le plus voisin avec l'alignement droit, on aura, pour ω croissant ou décroissant, Log étant la caractéristique des logarithmes népériens,

$$(7) \quad s\sqrt{A} = \text{Log} \frac{A\omega + B + \sqrt{A(A\omega^2 + 2B\omega + C)}}{A\omega_0 + B + \sqrt{A(A\omega_0^2 + 2B\omega_0 + C)}}$$

la constante d'intégration ayant été déterminée par la condition que pour $s = 0$ on ait $\omega = \omega_0$.

En posant

$$R = A\omega_0 + B + \sqrt{A(A\omega_0^2 + 2B\omega_0 + C)},$$

on tirera de l'équation (7), pour la loi du dévers variable sur un arc de cercle, la formule

$$(8) \quad \omega = \frac{R}{2A} e^{s\sqrt{A}} + \frac{B^2 - AC}{2AR} e^{-s\sqrt{A}} - \frac{B}{A},$$

dans laquelle tous les termes sont bien du premier ordre.

Enfin la longueur de l'arc de cercle qui reçoit le dévers variable de ω_0 à ω , sera donnée par la formule (7), dans laquelle on remplacera ω par ω_1 .

Si l'on compare la solution approchée (8) à l'équation (4), on vérifie facilement qu'elle est l'intégrale exacte de cette équation quand on n'y conserve que les termes du premier ordre.

Pour compléter la solution précédente, il reste à *considérer la distribution du dévers sur l'alignement droit entre les limites zéro et ω_0* .

L'équation (4), en y faisant $\rho = \infty$, devient

$$(9) \quad \frac{d^2\omega}{ds^2} + \frac{l}{h} \left(\frac{d\omega}{ds} \right)^2 - \frac{g}{hV^2} \sin\omega = 0,$$

et donne, par une première intégration,

$$(10) \quad \left(\frac{d\omega}{ds}\right)^2 = a'e^{-\frac{2l\omega}{h}} + \frac{2g}{V^2(h^2 + 4l^2)}(2l \sin \omega - h \cos \omega),$$

la constante a' ayant pour valeur

$$a' = \alpha'^2 + \frac{2gh}{V^2(h^2 + 4l^2)},$$

α' étant la valeur initiale de $\frac{d\omega}{ds}$ sur l'alignement droit.

En intégrant, comme pour le cercle, l'équation (10) par approximation, on trouvera

$$(11) \quad s = V\sqrt{\frac{h}{g}} \text{Log} \frac{\frac{\omega}{V}\sqrt{\frac{g}{h}} + \sqrt{\frac{g}{h}\frac{\omega^2}{V^2} + \alpha'^2}}{\alpha'};$$

d'où l'on tire, pour la loi du dévers,

$$(12) \quad \omega = \frac{V\alpha'}{2}\sqrt{\frac{h}{g}} \left[e^{\frac{s}{V}\sqrt{\frac{g}{h}}} - e^{-\frac{s}{V}\sqrt{\frac{g}{h}}} \right],$$

solution qui vérifie l'équation (9) réduite à ses termes du premier ordre. On voit que α' ne peut être nul, et, par suite, que la courbe formée par le rail en dévers sur l'alignement droit n'est pas tangente à la portion rectiligne de cet alignement, et qu'il y a comme un point anguleux à son origine.

La longueur de l'alignement droit en dévers s'obtiendra de la formule (11), en y faisant $\omega = \omega_0$, et elle ne dépendra que de α' après que ω_0 aura été fixé. Si l'on veut que l'arc de cercle soit tangent à l'origine au rail en dévers de l'alignement droit, il faut que $\frac{d\omega}{ds}$ ait à ce point la même valeur pour les deux lignes, ce qui conduit à la condition

$$\alpha^2 - \alpha'^2 = \frac{g\omega_0^2}{hV^2},$$

qui relie les trois quantités α , α' , ω_0 , dont deux restent indéterminées.

Enfin, pour le calcul des pressions dans le raccordement circulaire, en ne conservant, dans les formules (2) et (3), que les termes d'ordre inférieur au second, on aura

$$\begin{aligned} \alpha ln &= (\alpha l^2 - l^2) V^2 \frac{d^2 \omega}{ds^2} + gl + gh\omega - h \frac{V^2}{\rho} - 8\mu r \frac{V^2}{\rho}, \\ \alpha ln_1 &= l^2 V^2 \frac{d^2 \omega}{ds^2} + gl - gh\omega + h \frac{V^2}{\rho} + 8\mu r \frac{V^2}{\rho}; \end{aligned}$$

et, avec la même approximation, (4) donne

$$\frac{d^2 \omega}{ds^2} = \frac{g\omega}{hV^2} - \frac{1}{\rho h}.$$

Substituant cette valeur dans les équations précédentes, et se rappelant que

$$l^2 = l_0^2 + h^2 + l^2,$$

on aura

$$\begin{aligned} \alpha ln &= gl + \left(\frac{V^2}{\rho} - g\omega \right) \frac{l_0^2 - l^2}{h} - 8\mu r \frac{V^2}{\rho}, \\ \alpha ln_1 &= gl - \left(\frac{V^2}{\rho} - g\omega \right) \frac{l_0^2 + l^2}{h} + 8\mu r \frac{V^2}{\rho}, \end{aligned}$$

valeurs qui seront positives, comme leur partie principale gl .

En faisant $\rho = \infty$, dans les formules précédentes, on aura, pour l'alignement droit en dévers,

$$\alpha ln = gl - g \frac{l_0^2 - l^2}{h} \omega, \quad \alpha ln_1 = gl + g \frac{l_0^2 + l^2}{h} \omega.$$

Le problème du raccordement, au moyen d'un arc de cercle, serait donc théoriquement résolu par les formules qui précèdent, mais la complication de la loi correspondante du dévers se refuse à toute application. Posons donc la question en sens inverse, en nous donnant la loi la plus simple pour le dévers, qui est la répartition uniformément croissante ou décroissante, et proposons donc de *chercher quelle doit être la courbe pour que le dévers varie uniformément.*

En comptant l'arc du point de contact avec l'alignement droit, on aura

$$\omega = \alpha s, \quad \frac{d\omega}{ds} = \alpha, \quad \frac{d^2\omega}{ds^2} = 0,$$

et l'équation (4) deviendra

$$(13) \quad l\alpha^2 - \frac{g}{V^2} \sin \alpha s + \frac{1}{\rho} \cos \alpha s = 0.$$

Rapportons la courbe au prolongement de l'alignement pour axe des x , et à sa perpendiculaire dirigée horizontalement du côté de la concavité pour axe des y , l'origine des coordonnées étant l'origine de l'arc. En posant $\frac{dx}{ds} = p$, d'où

$$\rho = - \frac{\sqrt{1-p^2}}{\frac{dp}{ds}},$$

l'équation (13) devient

$$- \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} \frac{dp}{ds} = \frac{g}{V^2} \operatorname{tang} \alpha s - \frac{l\alpha^2}{\cos \alpha s},$$

et donne, en intégrant,

$$(14) \quad \arccos p = \frac{g}{\alpha V^2} \operatorname{Log} \frac{1}{\cos \alpha s} - l\alpha \operatorname{Log} \frac{1 + \operatorname{tang} \frac{\alpha s}{2}}{1 - \operatorname{tang} \frac{\alpha s}{2}},$$

la constante d'intégration étant nulle, puisque, pour $s = 0$, on doit avoir $p = 1$.

Par cette équation, x pourrait s'exprimer au moyen d'une quadrature en fonction de s , et il en serait de même de y , le premier membre de cette équation n'étant autre que $\arcsin \sqrt{1-p^2}$ ou $\arcsin \frac{dy}{ds}$; mais, si l'on considère ω et, par suite, α comme infiniment petits, le second membre de l'équation (14) pourra se développer en série convergente et deviendra

$$\frac{gs^2}{2V^2} \alpha + \left(\frac{gs^2}{4V^2} - l \right) s \alpha^2 + \left(\frac{gs^2}{12V^2} - l \right) \frac{s^2}{4} \alpha^3 - \left(\frac{gs^2}{4V^2} + l \right) \frac{s^3}{24} \alpha^4 + \dots,$$

10..

ce qui montre que le premier membre et, par suite, $\frac{dy}{ds}$ sont infiniment petits de l'ordre de ω ou de α . En développant alors ce premier membre, il deviendra

$$\frac{dy}{ds} + \frac{1}{2} \frac{1}{3} \left(\frac{dy}{ds} \right)^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{1}{5} \left(\frac{dy}{ds} \right)^5 + \dots,$$

et, ne conservant que les termes du premier ordre dans les deux membres de l'équation, on aura, en intégrant,

$$(15) \quad y = \frac{g\alpha}{6v^2} s^3,$$

où l'on pourra même remplacer s par x , ce qui donnera, pour l'équation de la courbe cherchée,

$$(16) \quad y = \frac{g\alpha}{6v^2} x^3.$$

On vérifie facilement que cette solution satisfait à l'équation (13) quand on n'y conserve que les termes du premier ordre. Cette équation devient alors

$$\rho s = \frac{v^2}{\alpha g} \quad \text{ou} \quad \rho \omega = \frac{v^2}{g};$$

d'où l'on voit que la courbe approchée jouit de cette propriété que *le rayon de courbure varie en raison inverse de la longueur de l'arc*; et, par suite, que *le dévers varie en raison inverse du rayon de courbure*.

Pour les pressions, si, dans les formules (2) et (3), on fait $\omega = \alpha s$, $\frac{1}{\rho} = \frac{g\alpha s}{v^2}$, on aura, en négligeant les termes d'ordre supérieur au premier,

$$\begin{aligned} 2ln &= gl - 8\mu gras, \\ 2ln_1 &= gl + 8\mu gras, \end{aligned}$$

quantités qui sont positives.

La courbe (16) est facile à construire, et le raccordement se composera d'un arc de cercle de rayon ρ_1 avec dévers constant $\omega_1 = \frac{v^2}{g\rho_1}$ et de deux courbes suivant lesquelles le dévers variera uniformément.

Or le rayon de courbure de chacune de ces courbes, au point de contact avec le cercle, est précisément ρ_1 , et, par suite, *l'arc de cercle sera osculateur aux deux courbes, qui ont d'ailleurs chacune un contact du second ordre avec l'alignement droit correspondant.*

On aurait pu, partant de l'équation (15), calculer rigoureusement x et y en fonction d'une variable auxiliaire.

En posant $\frac{6V^2}{gz} = 27b^3$ et $y = z^3$, on tire de (15)

$$dx = 3dz \sqrt{b^3 - z^3},$$

et, posant $z = b \cos \varphi$, on trouve

$$\begin{aligned} x &= b^3 \cos \varphi \sqrt{1 - \cos^3 \varphi} + \frac{b^3 \sqrt{2}}{3} \left[F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - F\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right], \\ y &= b^3 \cos^3 \varphi, \end{aligned}$$

F étant la caractéristique de la fonction elliptique de première espèce. Mais ces résultats n'ont pas d'utilité pratique.

Nous venons de trouver une méthode de raccordement qui satisfait sensiblement à toutes les conditions de stabilité, sans présenter de grandes difficultés d'exécution. Nous dirons cependant, en terminant cette étude, quelques mots de la disposition la plus avantageuse à donner au raccordement quand on tient à n'employer que l'arc de cercle comme courbe et une distribution uniforme du dévers, ce qu'on peut faire quand le rayon du cercle est très-grand, et cela d'autant mieux qu'il ne peut y avoir de solution exacte commune pour des trains de vitesses différentes.

Si l'on suppose que le dévers soit distribué uniformément sur l'alignement droit entre les limites zéro et ω_0 , suivant la formule $\omega = \alpha s$, et, sur l'arc de cercle, de ω_0 à ω_1 , suivant la formule $\omega = \omega_0 + \beta s$, en comptant s , sur l'alignement droit, du point où commence le dévers, et, sur le cercle, du point où commence la courbe, on aura sur la droite

$$f = lV^2 \alpha^2 - g \sin \alpha s,$$

et sur le cercle

$$f_1 = lV^2 \beta^2 + \frac{V^2}{\rho} \cos(\omega_0 + \beta s) - g \sin(\omega_0 + \beta s),$$

ou, en négligeant les quantités d'ordre supérieur au premier,

$$f = -g\alpha s, \quad f_1 = \frac{V^2}{\rho} - g\omega_0 - g\beta s.$$

On voit que la pression, pour la droite, est dirigée du côté de la convexité de la courbe, qu'elle augmente avec s et atteint son maximum $g\omega_0$ au point de contact avec le cercle. L'inverse a lieu pour la pression sur le cercle : elle est initialement dirigée vers la convexité et égale à $\frac{V^2}{\rho} - g\omega_0$, quantité positive, puisqu'on a $\omega_0 < \omega_1 = \frac{V^2}{g\rho}$; elle décroît ensuite et s'annule quand le dévers prend la valeur constante ω_1 , qui convient à la vitesse supposée et au rayon du cercle considéré; donc, en passant de la droite sur le cercle, la pression change brusquement de sens, et cela pouvait d'ailleurs se voir *a priori*.

Si l'on entrait en courbe sans dévers, la pression initiale serait $\frac{V^2}{\rho}$, plus grande que celle qu'on avait précédemment, et l'on voit que, si la répartition du dévers se fait par parties égales sur la droite et sur le cercle, la pression maxima ne sera que la moitié de ce qu'elle serait dans le cas où l'arc de cercle serait seul en dévers. On a alors, en effet, $\omega_0 = \frac{\omega_1}{2} = \frac{V^2}{2g\rho}$, et la pression maxima, au point de contact de la droite et du cercle, a sur ces deux lignes la même valeur $\frac{V^2}{2\rho}$ et change brusquement de sens en ce point, circonstance favorable à la stabilité du wagon.

Telle est donc la construction qui sera la plus avantageuse si l'on s'astreint à n'employer que des cercles pour courbes et des dévers uniformément croissants.

Quant aux pressions, on les calculera facilement au moyen des formules (2) et (3), en y remplaçant ρ et ω par les valeurs relatives au cas actuel.