JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE MATHIEU

Mémoire sur les équations du mouvement d'un système de corps

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 3 (1877), p. 5-20.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1877_3_3__5_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Mémoire sur les équations du mouvement d'un système de corps;

Par M. Émile MATHIEU.

Imaginons un système de corps réduits à des points et supposons d'abord que ces points matériels, au nombre de $n+1$, soient libres et s'attirent ou se repoussent suivant une fonction donnée de la distance. D'après une transformation bien connue, on peut remplacer le mouvement de ces $n+1$ points par celui de n points fictifs également libres, sollicités par une même fonction de forces et pour lequel aient lieu le principe des forces vives et les trois intégrales des aires.

Ayant cherché à appliquer à l'étude de ce mouvement un système de coordonnées analogue à celui qui m'a servi dans le problème des trois corps, je suis ainsi parvenu à traiter cette question d'une manière toute semblable, et j'ai ramené le problème à la résolution de $6n-4$ équations différentielles canoniques. On peut remarquer que, le principe des forces vives étant encore une intégrale pour ces dernières équations, et l'élément du temps pouvant s'éliminer immédiatement, le système des équations différentielles n'est réellement que de l'ordre $6n - 6$. Ce résultat a été déjà reconnu par M. Radau dans un Mémoire publié dans ce journal (t. XIV, 2[e] série), et que je n'ai lu qu'après l'entière rédaction du Mémoire actuel.

Ensuite, au lieu d'un système libre, je conçois plus généralement un système de n points sollicités par une même fonction de forces et soumis à de certaines liaisons; mais je suppose que le principe des forces vives et les trois équations des aires soient encore applicables. Je montre qu'on peut encore adopter le même système de coordonnées, et j'obtiens pour le mouvement un système d'équations différentielles de l'ordre $6n - 6 - 2r$, où r désigne le nombre des équations qui expriment les liaisons.

Emploi d'un premier système de variables.

1. Occupons-nous d'abord du mouvement d'un système de n corps libres sollicités par une même fonction de forces, et pour lequel le principe des forces vives et les trois intégrales des aires sont applicables.

A chaque instant on peut se représenter les axes principaux d'inertie de ce système, qui passent par l'origine des coordonnées comme si le système était solide, et désignons, sous le nom d'*équateur*, un des trois plans passant par deux des axes principaux d'inertie. La position du système et son déplacement infiniment petit sont déterminés : 1° par les projections des rayons vecteurs menés de l'origine aux masses m_1, m_2, ..., m_n sur le plan de l'équateur, projections que nous désignerons par $r_1, r_2, \ldots, r_n$; 2° par les dérivées de r_1, r_2, ..., r_n par rapport à t; 3° par les angles β_1, β_2, ..., β_n des rayons r_1, r_2, ... avec l'intersection L du plan de l'équateur et de la position qu'il occupe au bout de l'instant dt; 4° par les dérivées de β_1, β_2, ... par rapport à t; 5° par les distances $z_1, z_2, \ldots, z_n$ de m_1, m_2, ... au plan de l'équateur; 6° par les dérivées de ces distances par rapport à t; 7° par le déplacement infiniment petit $d\gamma$ de l'axe de rotation L du plan de l'équateur dans ce plan; 8° par la rotation infiniment petite ωdt du plan de l'équateur autour de la droite L.

Il est aisé de se représenter le mouvement du plan de l'équateur, que nous représenterons par P. La droite L tourne dans ce plan P autour de l'origine O et vient au bout de l'instant dt en L_1, puis ce plan tourne autour de L_1 d'un angle infiniment petit ωdt et occupe la position P_1. La droite L tournera de même dans le plan P_1 autour du point O et ira de la position L_1 à une autre infiniment voisine L_2, puis le plan P_1 tournera d'un angle infiniment petit autour de L_2, et ainsi de suite. La droite L se meut donc sur un cône, et comme on peut regarder l'élément plan renfermé entre L et L_1 comme appartenant à la fois au cône et au plan mobile P, on voit que le plan P de l'équateur roule sans glisser autour du cône formé par les positions successives de la droite L.

Sur une expression de la force vive.

2. Par l'origine O des coordonnées, menons Oz perpendiculaire au plan P, Ox suivant la droite L et Oy perpendiculaire à Ox dans le plan P. L'axe des z, étant perpendiculaire à l'équateur, est un axe principal d'inertie; et, par suite, en désignant généralement par x, y, z les coordonnées d'une quelconque des masses représentée par m, par rapport à ces axes de coordonnées mobiles, on a les deux équations

$$\Sigma m zx = 0, \quad \Sigma m zy = 0,$$

le signe sommatoire Σ s'étendant à toutes les masses m. Comme on a en général

$$x = r\cos\beta, \quad y = r\sin\beta,$$

on peut remplacer ces deux équations par

$$\Sigma m z r\cos\beta = 0, \quad \Sigma m z r\sin\beta = 0.$$

Si l'on désigne généralement par u, v, w les vitesses relatives d'un point m par rapport à trois axes de coordonnées mobiles Ox, Oy, Oz, et par p, q, r les vitesses de rotation de l'angle trièdre des coordonnées autour de ces trois axes, on a les formules connues et faciles à établir

$$u = qz - ry + \frac{dx}{dt},$$

$$v = rx - pz + \frac{dy}{dt},$$

$$w = py - qx + \frac{dz}{dt}.$$

Or, dans le cas actuel, la rotation du plan P autour de L est égale à $\omega\, dt$, et la rotation autour de Oz est égale à $d\gamma$; on a donc

$$p = \omega, \quad q = 0, \quad r = \frac{d\gamma}{dt},$$

et les trois formules précédentes deviennent

$$u = -\frac{d\gamma}{dt} r \sin\beta + \frac{dr}{dt}\cos\beta - r\sin\beta\frac{d\beta}{dt},$$

$$v = \frac{d\gamma}{dt} r\cos\beta - \omega z + \frac{dr}{dt}\sin\beta + r\cos\beta\frac{d\beta}{dt},$$

$$w = \omega r \sin\beta + \frac{dz}{dt}.$$

Désignons par A la vitesse angulaire de r dans le plan de l'équateur, comptée à partir d'une droite fixe située dans ce plan, en sorte que l'on ait

$$(a) \qquad \mathrm{A} = \frac{d\beta}{dt} + \frac{d\gamma}{dt},$$

en supposant A, β, $d\gamma$ comptés positivement dans le même sens. Nous aurons

$$u = \frac{dr}{dt}\cos\beta - r\mathrm{A}\sin\beta,$$

$$v = \frac{dr}{dt}\sin\beta - \omega z + r\mathrm{A}\cos\beta,$$

$$w = \omega r\sin\beta + \frac{dz}{dt}.$$

On en conclut l'expression du carré de la vitesse

$$u^2 + v^2 + w^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 A^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \omega^2 z^2 + \omega^2 r^2 \sin^2\beta$$
$$+ 2\omega \frac{dz}{dt} r\sin\beta - 2\omega z \frac{dr}{dt}\sin\beta - 2\omega z r\cos\beta\left(\frac{d\beta}{dt} + \frac{d\gamma}{dt}\right),$$

et l'on a, pour l'expression de la force vive du système des masses,

$$2T = \Sigma m\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 A^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] + \omega^2 \Sigma m (z^2 + r^2\sin^2\beta)$$
$$+ 2\omega \Sigma m\left(\frac{dz}{dt} r\sin\beta - z\frac{dr}{dt}\sin\beta - zr\cos\beta\frac{d\beta}{dt}\right)$$
$$- 2\omega\frac{d\gamma}{dt}\Sigma m z r\cos\beta.$$

Or on a

$$(b) \qquad \Sigma m z r \cos\beta = 0, \quad \Sigma m z r\sin\beta = 0,$$

et, en différentiant la dernière équation,

$$\Sigma m\left(z\frac{dr}{dt}\sin\beta + zr\cos\beta\frac{d\beta}{dt}\right) = -\Sigma m\frac{dz}{dt} r\sin\beta.$$

Il en résulte la formule

$$(c) \qquad \begin{cases} 2T = \Sigma m\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 A^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] \\ \qquad + \omega^2 \Sigma m(z^2 + r^2\sin^2\beta) + 4\omega\Sigma m\frac{dz}{dt} r\sin\beta, \end{cases}$$

dans laquelle A a la valeur (a).

Rotation instantanée du plan de l'équateur autour de la droite L.

3. Les projections de l'axe k du plan invariable, sur Ox, Oy, Oz, sont égales à

$$\Sigma m(yw - zv), \quad \Sigma m(zu - xw), \quad \Sigma m(xv - yu),$$

et, en faisant la somme des carrés de ces trois quantités, nous aurons le carré de la constante k. Calculons ces trois quantités; nous aurons

$$\Sigma m(yw - zv) = \omega \Sigma m(z^2 + r^2 \sin^2\beta) + \Sigma m\left(\frac{dz}{dt} r\sin\beta - z\frac{dr}{dt}\sin\beta - zr\cos\beta\frac{d\beta}{dt}\right),$$

ou

$$\Sigma m(yw - zv) = \omega \Sigma m(z^2 + r^2 \sin^2\beta) + 2\Sigma m\frac{dz}{dt} r\sin\beta.$$

En second lieu, nous avons

$$\Sigma m(zu - xw) = -\omega \Sigma mr^2 \sin\beta\cos\beta + \Sigma mz\frac{dr}{dt}\cos\beta - \Sigma mzr\sin\beta\frac{d\beta}{dt} - \Sigma m\frac{dz}{dt} r\cos\beta - \frac{d\gamma}{dt}\Sigma mzr\sin\beta;$$

en différentiant la première équation (b), nous avons

$$\Sigma mz\frac{dr}{dt}\cos\beta - \Sigma mzr\sin\beta\frac{d\beta}{dt} = -\Sigma m\frac{dz}{dt} r\cos\beta,$$

et il en résulte

$$\Sigma m(zu - xw) = -\omega\Sigma mr^2 \sin\beta\cos\beta - 2\Sigma m\frac{dz}{dt} r\cos\beta.$$

Enfin l'on a

$$\Sigma m(xv - yu) = \Sigma mr^2 \mathrm{A} - \omega\Sigma mzr\cos\beta = \Sigma mr^2 \mathrm{A}.$$

En faisant la somme des carrés de ces trois expressions, on obtient

$$(d) \qquad k^2 = \mathrm{G}\omega^2 + 4\mathrm{S}\omega + 4\mathrm{V} + (\Sigma mr^2\mathrm{A})^2,$$

en posant

$$\mathrm{G} = [\Sigma m(z^2 + r^2\sin^2\beta)]^2 + (\Sigma mr^2\sin\beta\cos\beta)^2,$$

$$\mathrm{S} = \Sigma m\frac{dz}{dt} r\cos\beta \times \Sigma mr^2\sin\beta\cos\beta + \Sigma m\frac{dz}{dt} r\sin\beta \times \Sigma mr^2\sin^2\beta + \Sigma m\frac{dz}{dt} r\sin\beta \times \Sigma mz^2,$$

$$\mathrm{V} = \left(\Sigma m\frac{dz}{dt} r\cos\beta\right)^2 + \left(\Sigma m\frac{dz}{dt} r\sin\beta\right)^2.$$

Les deux dernières expressions peuvent encore s'écrire

$$S = \Sigma m z^2 \times \Sigma m \frac{dz}{dt} r \sin\beta + \Sigma m^2 r^3 \frac{dz}{dt} \sin\beta$$
$$+ \Sigma m m_1 \left(r^2 r_1 \frac{dz_1}{dt} \sin\beta + r r_1^2 \frac{dz}{dt} \sin\beta_1 \right) \cos(\beta_1 - \beta),$$
$$V = \Sigma m^2 r^2 \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + 2\Sigma m m_1 r r_1 \frac{dz}{dt}\frac{dz_1}{dt} \cos(\beta_1 - \beta).$$

De l'équation du second degré (d), on pourra tirer ω et le porter dans l'expression (c) de $2T$, qui deviendra ainsi une fonction homogène et du second degré des dérivées $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$, des quantités A et de la quantité k.

Formule qui donne le mouvement de la trace de l'équateur sur le plan invariable.

4. Représentons par σ l'angle que fait la trace de l'équateur P sur le plan invariable avec une droite fixe située dans ce dernier plan; puis désignons, comme au n° **2**, par x, y, z les coordonnées de chaque masse m par rapport aux trois axes rectangulaires considérés dans ce numéro, et par p, q les vitesses de rotation autour de Ox, Oy. Alors la différentielle de σ est fournie par la formule suivante, que j'ai donnée dans mon *Mémoire sur des formules de perturbation* (*voir* ce Recueil, 1875, p. 195) :

$$d\sigma = \frac{Ap^2 + Bq^2 + 2\Sigma m(py - qx)\frac{dz}{dt} - 2pq\Sigma mxy}{k^2 - \mathcal{A}^2} k\,dt,$$

où l'on a

$$A = \Sigma m(z^2 + y^2), \quad B = \Sigma m(x^2 + z^2), \quad \mathcal{A} = \Sigma m(xv - yu).$$

(Dans ce Mémoire, le dernier terme du numérateur de cette formule manque, parce qu'on y a pris pour axes des x et y les deux axes principaux situés dans le plan P, ce qui annule la quantité Σmxy. Mais la démonstration de la formule actuelle se fait absolument comme celle de la formule citée.)

En faisant

$$p = \omega, \quad q = 0, \quad x = r\cos\beta, \quad y = r\sin\beta, \quad \mathcal{A} = \Sigma mr^2 A,$$

on obtient la formule cherchée

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\omega^2 \Sigma m(z^2 + r^2\sin^2\beta) + 2\omega \Sigma mr\sin\beta \frac{dz}{dt}}{k^2 - (\Sigma mr^2 A)^2} k.$$

Comme on a trouvé, au numéro précédent,

$$k^2 - (\Sigma mr^2 A)^2 = G\omega^2 + 4S\omega + 4V,$$

on peut aussi écrire cette formule

$$(e) \qquad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\omega^2 \Sigma m(z^2 + r^2\sin^2\beta) + 2\omega \Sigma mr\sin\beta \frac{dz}{dt}}{G\omega^2 + 4S\omega + 4V} k.$$

Remarques sur l'application des équations différentielles de la Dynamique.

5. Si l'on désigne par $q_1, q_2, \ldots, q_s$ les variables qui déterminent la position d'un système de points matériels, si l'on représente par U la fonction de forces, et si l'on exprime ensuite la force vive $2T$ au moyen de ces s variables et de leurs dérivées par rapport à t représentées par $q'_1, q'_2, \ldots, q'_s$, alors T sera une fonction homogène et du second degré de ces dérivées. Posons ensuite

$$\frac{dT}{dq'_1} = p_1, \quad \frac{dT}{dq'_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{dT}{dq'_s} = p_s,$$

et exprimons $2T$ en fonction des variables q_i, p_i, puis faisons

$$T - U = H,$$

et nous aurons le système des $2s$ équations canoniques

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{dH}{dp_1}, \quad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{dH}{dq_1},$$
$$\frac{dq_2}{dt} = \frac{dH}{dp_2}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{dH}{dq_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Examinons comment on pourra appliquer ce système d'équations à l'expression de $2T$ obtenue à la fin du n° **2**. Si nous posons en général

$$\frac{dr_i}{dt} = r'_i, \quad \frac{d\beta_i}{dt} = \beta'_i, \quad \frac{dz_i}{dt} = z'_i,$$

cette expression de $2T$ est une fonction des quantités

$$\begin{array}{l} r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_n,\ z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n, \\ r'_1,\ r'_2,\ \ldots,\ r'_n,\ \beta'_1,\ \beta'_2,\ \ldots,\ \beta'_n,\ z'_1,\ z'_2,\ \ldots,\ z'_n,\ \frac{d\gamma}{dt},\ \omega, \end{array}$$

et elle est homogène et du second degré par rapport aux quantités de la seconde ligne. On a d'ailleurs les deux équations

$$\Sigma m z r \cos\beta = 0, \quad \Sigma m z r \sin\beta = 0,$$

et l'on en déduit deux autres par la différentiation par rapport à t: au moyen de ces quatre équations et des deux équations (d) et (e) des nos **3** et **4**, on pourra tirer les six quantités z_1, z_2, z'_1, z'_2, ω et k, par suite, éliminer les cinq premières de l'expression de $2T$; mais on y introduira $\frac{d\sigma}{dt}$; $2T$ deviendra ainsi une fonction de

$$\begin{array}{l} r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_n,\ z_3,\ z_4,\ \ldots,\ z_n, \\ r'_1,\ r'_2,\ \ldots,\ r'_n,\ \beta'_1,\ \beta'_2,\ \ldots,\ \beta'_n,\ z'_3,\ z'_4,\ \ldots,\ z'_n,\ \frac{d\gamma}{dt},\ \frac{d\sigma}{dt}, \end{array}$$

et sera homogène et du second degré par rapport aux dérivées de la seconde ligne. Il est cependant impossible d'appliquer le système des équations canoniques en prenant pour les variables q_i les quantités de la première ligne, et de plus σ et γ; car ces quantités, ainsi que σ, peuvent être considérées comme des coordonnées, mais cela n'a pas lieu pour γ.

Au reste, on aurait pour $2T$ une expression plus simple, en partant de l'expression (c) du n° **2**, conservant ω et éliminant z_1, z_2, z'_1, z'_2, comme ci-dessus. En désignant par $d\Omega$ la rotation infiniment petite ωdt du plan P, on obtiendrait, pour $2T$, une fonction homogène et du second degré des r'_i, des β'_i, des z'_i, de $\frac{d\gamma}{dt}$ et de $\frac{d\Omega}{dt}$; mais γ et Ω ne pourraient être assimilés à des coordonnées.

D'après les réflexions que nous venons de faire, nous devons chercher à substituer d'autres variables aux précédentes.

Substitution des angles ξ aux angles β.

6. Désignons par S la trace du plan invariable sur le plan P de l'équateur et par ν l'angle des droites L et S; représentons aussi par $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ les angles de $r_1, r_2, \ldots$ avec S. On aura, en supposant les angles ξ comptés positivement dans le même sens que les angles β,

$$(g) \qquad \beta_1 - \xi_1 = \beta_2 - \xi_2 = \ldots = \beta_n - \xi_n = \nu;$$

posons ensuite

$$\mathrm{X} = \Sigma m(yw - zv), \quad \mathrm{Y} = \Sigma m(zu - xw)$$

en nous rappelant que les expressions de ces deux quantités ont été obtenues au n° **3**.

La projection de l'axe k du plan invariable sur la droite S qui lui est perpendiculaire est nulle; on a donc

$$(h) \qquad \mathrm{X}\cos(\beta - \xi) + \mathrm{Y}\sin(\beta - \xi) = 0,$$

et, par suite,

$$\operatorname{tang}\xi = \frac{\mathrm{X}\cos\beta + \mathrm{Y}\sin\beta}{-\mathrm{X}\sin\beta + \mathrm{Y}\cos\beta}.$$

Cette formule permettra de calculer très-facilement les angles ξ au moyen des variables des numéros précédents. Le problème inverse, qui consiste à calculer les variables β au moyen des variables ξ, est plus compliqué. Pour résoudre cette question, nous avons les équations (g), l'équation (h) ou

$$\mathrm{X}\cos\nu + \mathrm{Y}\sin\nu = 0,$$

et l'équation

$$\mathrm{G}\omega^2 + 4\mathrm{S}\omega + 4\mathrm{V} = k^2 - (\Sigma m r^2 \mathrm{A})^2.$$

Au moyen de ces $n + 2$ équations, nous pourrons déterminer les

$n+2$ quantités $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \omega, \nu$ en fonction de

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, z_1, z_2, \ldots, z_n, z'_1, z'_2, \ldots, z'_n, k.$$

Sur la démonstration géométrique de n équations.

7. Représentons-nous, pendant l'instant dt, le déplacement angulaire, par rapport à la position de la droite L au commencement de cet instant, de la projection m' du point m sur le plan P de l'équateur. Ce déplacement est égal à $A\,dt$ et il peut se décomposer en deux déplacements : 1° le déplacement de m' par rapport à la droite S; 2° le déplacement de S par rapport à L.

Puisque ξ est l'angle de r avec S, le premier de ces deux déplacements a pour valeur $d\xi$; le second est la projection, sur le plan P, de l'angle $d\sigma$ décrit, pendant l'instant dt, par la droite S sur le plan invariable. Donc, en désignant par U l'angle de l'équateur et du plan invariable, on a

$$A\,dt = d\xi + d\sigma \cos U.$$

Projetons l'axe k du plan invariable sur la normale Oz au plan P, nous aurons

$$k \cos U = \Sigma m(xv - yu) = \Sigma m r^2 A,$$

et nous en concluons

$$A\,dt = d\xi + \frac{1}{k}\frac{d\sigma}{dt}\Sigma m r^2 A.$$

En appliquant cette équation à chacun des points matériels m_1, m_2, . ., m_n, nous obtenons les n équations

$$A_1 = \frac{d\xi_1}{dt} + \frac{1}{k}\frac{d\sigma}{dt}\Sigma m r^2 A,$$

$$A_2 = \frac{d\xi_2}{dt} + \frac{1}{k}\frac{d\sigma}{dt}\Sigma m r^2 A,$$

....

Nouvelle expression de T.

8. Nous avons trouvé les équations, au nombre de $n+3$,

$$\beta_1 - \xi_1 = \beta_2 - \xi_2 = \ldots = \beta_n - \xi_n = \nu,$$
$$X\cos\nu + Y\sin\nu = 0,$$
$$G\omega^2 + 4S\omega + 4V = k^2 - (\Sigma mr^2 A)^2,$$
$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\omega^2 \Sigma m(z^2 + r^2\sin^2\beta) + 2\omega\Sigma mr\sin\beta\frac{dz}{dt}}{k^2 - (\Sigma mr^2 A)^2};$$

nous venons d'obtenir les n équations

$$A_1 = \frac{d\xi_1}{dt} + \frac{1}{k}\frac{d\sigma}{dt}\Sigma mr^2 A,$$
$$A_2 = \frac{d\xi_2}{dt} + \frac{1}{k}\frac{d\sigma}{dt}\Sigma mr^2 A,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nous avons aussi les deux équations qui expriment que la droite Oz est un axe principal d'inertie

$$\Sigma mzr\cos\xi = 0, \quad \Sigma mzr\sin\xi = 0;$$

différentions-les et nous aurons

$$\Sigma m\frac{dz}{dt}r\cos\xi + \Sigma mz\frac{dr}{dt}\cos\xi - \Sigma mz\xi' r\sin\xi = 0,$$
$$\Sigma m\frac{dz}{dt}r\sin\xi + \Sigma mz\frac{dr}{dt}\sin\xi + \Sigma mz\xi' r\cos\xi = 0.$$

Nous obtenons de la sorte $2n+7$ équations, au moyen desquelles on peut tirer les $2n+7$ quantités

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_n,\ \omega,\ \nu,\ k,$$
$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n,\ z_1,\ z_2,\ z'_1,\ z'_2$$

en fonction de

$$(i) \qquad \left\{\begin{array}{l} r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n,\ z_3,\ z_4,\ \ldots,\ z_n, \\ r'_1,\ r'_2,\ \ldots,\ r'_n,\ \xi'_1,\ \xi'_2,\ \ldots,\ \xi'_n,\ z'_3,\ z'_4,\ \ldots,\ z'_n,\ \sigma'. \end{array}\right.$$

En substituant ces quantités, dans l'expression (c) de $2T$ du n° **2**, nous aurons $2T$ exprimé en fonction des quantités (i). De plus, $2T$ sera homogène et du second degré par rapport aux dérivées des variables par rapport à t. C'est ce que l'on reconnaît aisément en remarquant que l'expression (c) de $2T$ est homogène par rapport aux quantités r'_i, A_i, z'_i et à ω et que les $2n+7$ équations employées ci-dessus sont homogènes par rapport à

$$r'_1,\ r'_2,\ \ldots,\ r'_n,\ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n,\ z'_1,\ z'_2,\ \ldots,\ z'_n,$$
$$\xi'_1,\ \xi'_2,\ \ldots,\ \xi'_n,\ k,\ \omega,\ \sigma'.$$

9. Désignons par q_s une quelconque des variables de la première ligne (i), en supposant l'indice s susceptible des valeurs $1, 2, 3, \ldots, 3n-2$; faisons

$$\frac{dT}{dq'_s} = p_s, \quad \frac{dT}{d\sigma'} = \varpi;$$

en appliquant les équations canoniques du n° **5**, nous aurons un système de $6n-2$ équations différentielles canoniques qu'on obtiendra en faisant $s = 1, 2, \ldots, 3n-2$ dans les deux formules

$$(j) \qquad \frac{dq_s}{dt} = \frac{dH}{dp_s}, \quad \frac{dp_s}{dt} = -\frac{dH}{dq_s},$$

et ajoutant ces deux autres équations

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{dH}{d\varpi}, \quad \frac{d\varpi}{dt} = -\frac{dH}{d\sigma} = 0$$

Comme ϖ est une constante et que H ne renferme pas σ, en faisant ϖ constant dans les équations (j), nous aurons un système d'équations différentielles de l'ordre $6n-4$ et, après l'intégration de ces équations, σ serait obtenu par une quadrature. Mais, comme l'équation des forces vives

$$H = \text{const.}$$

est une intégrale de ces équations et qu'on en peut éliminer immédiatement le temps qui n'entre que par l'élément dt, le système peut être considéré comme de l'ordre $6n-6$.

Égalité des deux constantes ϖ et k

10. Nous avons trouvé, d'une part, l'équation

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{dH}{d\varpi}, \tag{1}$$

dans laquelle ϖ est constant; et, d'autre part,

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\omega^2 \Sigma m (z^2 + r^2 \sin^2\beta) + 2\omega \Sigma mr \sin\beta \dfrac{dz}{dt}}{k^2 - (\Sigma mr^2 A)^2} k. \tag{2}$$

Les deux équations (1) et (2) doivent revenir à la même; la première ne renferme qu'une constante arbitraire, qui est ϖ; la seconde ne contient que la constante arbitraire k; donc ϖ est fonction de k seulement : il reste à prouver que cette fonction se réduit à k.

L'équation (1) est homogène par rapport à σ'; $p_1, p_2, \ldots, p_{3n-2}$ et ϖ; le second membre de l'équation (2) peut s'exprimer aussi en fonction de $p_1, p_2, \ldots, p_{3n-2}$ et de k, et il deviendra une fonction homogène du premier degré de ces quantités. On a donc

$$\varpi = ek,$$

e étant une constante indépendante de k; car, si l'on avait

$$\varpi = f(k),$$

$f(k)$ n'étant pas homogène et du premier degré en k, il suffirait de remplacer ϖ par $f(k)$, dans l'équation (1), pour obtenir une équation qui ne serait plus homogène par rapport à la dérivée σ', les quantités p, et la quantité k, et cette équation est impossible.

e doit donc être un nombre pur, et par conséquent il restera le même si l'on réduit le nombre des points matériels à deux et qu'on les suppose situés dans le plan P de l'équateur; mais, d'après la solution que j'ai donnée du problème des trois corps, on a alors $\varpi = k$, et par conséquent $e = 1$ (*voir* ce Journal, p. 357, 1876).

Marche de la solution.

11. En intégrant le système des équations canoniques de l'ordre $3n - 6$ formé par les équations (j) du n° **9**, on déterminera, en fonction de t, les variables

$$r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n,\ z_3,\ \ldots,\ z_n;$$

en se servant des deux équations

$$\Sigma m z r \cos\xi = 0, \quad \Sigma m z r \sin\xi = 0,$$

on aura ensuite z_1 et z_2. On obtiendra ainsi la position de tous les points du système matériel par rapport à trois axes rectangulaires mobiles menés par l'origine, savoir l'axe principal d'inertie normal au plan P, la droite S d'intersection du plan P avec le plan invariable et la normale à S située dans le plan P.

Il ne reste plus qu'à déterminer la position occupée dans l'espace par l'angle trièdre de ces coordonnées. Or la droite S est située dans le plan invariable, et l'angle σ qu'elle fait avec une droite fixe située dans ce plan est donné par l'une ou l'autre des formules (1) et (2) du numéro précédent, au moyen d'une quadrature. Ensuite on pourra calculer l'angle U du plan P avec le plan invariable au moyen de la formule

$$k \cos U = \Sigma m r^2 A;$$

car, au n° **8**, nous avons obtenu les quantités A en fonction des variables que nous supposons calculées, et de leurs dérivées par rapport à t. La position du système est alors entièrement déterminée.

Extension de la théorie précédente à un système matériel assujetti à des liaisons.

12. Supposons un système de n points matériels assujettis à des liaisons et pour lequel, comme précédemment, le principe des forces vives et les trois équations des aires soient applicables.

Pour que ces quatre équations aient lieu, il faut que l'expression de la fonction de forces, formée par rapport à un système de coordonnées rectangulaires, ne change pas quand l'on fait tourner autour de l'origine O l'angle trièdre des coordonnées, et que, de plus, les équations conditionnelles, qui expriment les liaisons par rapport aux mêmes axes, subsistent après le même mouvement de ces axes.

Toutes les variables que nous avons adoptées, dans la théorie qui précède, peuvent encore être admises pour le système matériel que nous considérons maintenant. D'après ce que nous venons de dire, la fonction de forces et les équations conditionnelles qui expriment les liaisons restent les mêmes par rapport à un système quelconque de coordonnées rectangulaires dont l'origine est en O. Donc la fonction de forces et les équations de liaisons pourront s'exprimer immédiatement au moyen des coordonnées des points matériels, relatives à l'angle trièdre rectangulaire mobile formé par la normale au plan P, la droite S et une normale à ces deux droites, c'est-à-dire au moyen des $3n$ variables r, ξ, z. Les j équations conditionnelles et celles qu'on en déduit par la différentiation par rapport à t permettent d'éliminer, de l'expression de $2T$ donnée au n° **8**, j variables et leurs dérivées. Donc le nombre des équations de condition abaissera de deux fois autant d'unités l'ordre du système canonique des équations différentielles du mouvement, et par conséquent l'ordre de ce système est égal à $6n - 6 - 2j$.