JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LAISANT

Applications mécaniques du Calcul des quaternions

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 3 (1877), p. 325-400.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1877_3_3__325_0>

Applications mécaniques du Calcul des quaternions;

PAR M. LAISANT,

Ancien Élève de l'École Polytechnique.

PRÉLIMINAIRES.

Le Calcul des quaternions n'est pas une méthode nouvelle. Il y a plus de vingt ans que furent publiées à Dublin, en 1853, les *Lectures on quaternions*, du géomètre anglais Hamilton, auquel la Science est redevable de cette remarquable méthode. Depuis, en Angleterre et ailleurs, les savants ne dédaignèrent pas de s'occuper de ce nouveau calcul; parmi les travaux qui s'y rapportent, il y a lieu surtout de citer le Mémoire italien de M. Bellavitis, inséré en 1858 dans les *Mémoires de la Société italienne des Sciences de Modène*.

M. Bellavitis considère le Calcul des quaternions comme une sorte d'extension de sa méthode des équipollences, si féconde en ce qui touche la Géométrie plane, méthode que j'ai essayé de faire connaître en France par la traduction d'une des œuvres de ce géomètre [*] et sur laquelle je n'ai pas à revenir ici. Mais, tandis que les règles du calcul algébrique ordinaire s'appliquent exactement aux équipollences (ou équations géométriques) du plan, il n'en est plus de même pour les équations gométriques de l'espace, que l'on considère dans la méthode des quaternions. Malgré cela, M. Bellavitis, en se plaçant à ce point de

---

[*] *Exposition de la méthode des équipollences*. Paris, Gauthier-Villars, 1874.

vue, en rattachant les deux méthodes l'une à l'autre, sut mettre dans son exposition une extrême clarté, parvint à résumer dans un Mémoire assez peu volumineux les principes essentiels du Calcul des quaternions et y introduisit même un certain nombre d'applications géométriques. De nombreux travaux ultérieurs de M. Bellavitis ont été publiés sur le même sujet.

En 1866, parut à Londres l'ouvrage posthume d'Hamilton : *Elements of quaternions*, livre qui peut être considéré à bon droit comme une véritable encyclopédie mathématique. Depuis, l'un des disciples d'Hamilton, M. Tait, a publié un traité des quaternions : *An elementary treatise on quaternions*, Oxford, 1867, lequel a été réimprimé en 1873 avec quelques changements, ce qui semble accuser, de la part des mathématiciens d'outre-Manche, un intérêt sérieux pour l'étude de ce calcul. Enfin, en 1873 aussi, a été publié un ouvrage élémentaire : *Introduction to quaternions*, de MM. Tait et Kelland, qui contient de nombreuses et intéressantes applications géométriques.

Cependant, cette méthode, dont on s'occupe en Angleterre, en Italie, en Allemagne, comme le montrent en particulier les travaux de Hankel, ne semble pas avoir pénétré profondément en France, jusqu'à présent. Jusqu'en 1874, à notre connaissance, un seul travail a été publié sur les quaternions, en 1862, par M. Allégret, sous le titre d'*Essai sur le Calcul des quaternions*. M. Prouhet en rendait compte dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (année 1863, p. 333) et disait à ce propos :

« Inventer des expressions qui par elles-mêmes n'offrent aucun sens à l'esprit, et chercher ensuite à leur en donner un par ce que l'on appelle une *interprétation géométrique*, n'est-ce pas comme si, après avoir construit une belle phrase, on cherchait quelle pensée on pourrait bien y mettre. »

Cette critique, très-juste en elle-même, n'est pas applicable à la méthode des quaternions, telle qu'elle a été conçue par Hamilton et exposée par M. Bellavitis. Imaginer des symboles nouveaux pour représenter des faits géométriques très-réels, ce n'est pas faire une phrase pour se demander ensuite ce qu'elle pourrait bien signifier : c'est simplifier et perfectionner la langue parlée et la langue écrite, c'est gagner en concision et en force; c'est par là même ouvrir la porte à des aperçus nouveaux, car on sait combien le langage réagit sur la pensée elle-même, en Mathématiques comme partout.

Cependant le Calcul des quaternions ne semble pas avoir pris faveur en France. Depuis 1862, personne ne s'en occupait plus, lorsque M. Hoüel, en 1874, publia la dernière Partie de sa *Théorie élémentaire des quantités complexes*. Cette Partie, qui forme un volume de près de 300 pages, est exclusivement consacrée aux quaternions; on y trouve résumés les travaux de MM. Hamilton, Tait, Hankel, Bellavitis : c'est en somme un Traité complet sur la matière, dans lequel l'éminent professeur de la Faculté de Bordeaux a introduit des plus heureuses modifications aux notations anglaises. Les applications tiennent aussi une assez grande place; mais la préoccupation de l'auteur a été principalement l'exposé de la méthode, et les applications données par M. Hoüel se bornent au domaine de la Géométrie.

Il m'a paru qu'il pouvait être intéressant de prendre pour sujet d'étude quelques-unes des nombreuses questions de Mécanique rationnelle auxquelles se prête heureusement la méthode d'Hamilton. Beaucoup d'entre elles ont été traitées, par l'inventeur lui-même, dans ses *Elements of quaternions*; d'autres me sont au contraire personnelles, sans qu'il me soit possible d'indiquer d'une manière complète ce qui m'appartient et ce qui est au contraire la propriété d'autrui. En tous cas, je crois pouvoir affirmer au moins que la méthode d'exposition est sur tous les points nouvelle, et que l'introduction des notations françaises de M. Hoüel, auxquelles je me suis constamment attaché, est de nature à ajouter beaucoup de clarté aux développements. Il est permis de croire que cette question des notations est pour quelque chose dans l'abandon où la plupart des géomètres français ont laissé les quaternions.

Dans ce qui va suivre, je ne reviens pas sur les principes de la méthode; j'ai pris pour base l'Ouvrage de M. Hoüel, que je suppose connu, et qui est trop complet pour que je songe à le refaire. D'ailleurs, mon but n'est pas de donner une exposition nouvelle du calcul d'Hamilton, mais bien d'en montrer les usages dans certaines questions de Mécanique. Parmi ces questions, je me suis efforcé surtout de choisir les plus générales, celles par conséquent dont l'importance théorique est la plus grande, et j'ai divisé mon Mémoire en trois Parties : Cinématique, Statique et Dynamique, suivant l'ordre généralement adopté aujourd'hui dans l'enseignement.

J'ai cru devoir suivre une marche constamment analytique, et n'appuyer aucun raisonnement sur des considérations géométriques, l'un des principaux mérites des quaternions étant précisément de fournir, à l'aide du calcul, des résultats dont l'interprétation concrète est ensuite immédiate.

Je ne voudrais rien exagérer, et je crois qu'il serait inexact de prétendre que le Calcul des quaternions doive détrôner toutes les méthodes précédentes et faire renoncer aux procédés employés jusqu'à présent en Mécanique rationnelle. La méthode d'Hamilton n'est pas d'une application universelle, non plus qu'aucune autre, mais elle me semble présenter dans des cas nombreux de réels avantages : c'en est un déjà de n'avoir à écrire qu'une seule équation au lieu de trois, comme cela a lieu à chaque instant dans les questions de Mécanique ; et ce serait un tort, à mon sens, de se priver de ressources nouvelles, sous prétexte que ces ressources ne sont pas d'un usage constant. Les difficultés du début que l'on peut rencontrer dans l'étude des quaternions ne sont pas en rapport avec les avantages que l'on en retire, une fois en possession de la méthode.

Je ne saurais enfin me dispenser, sans manquer à l'amitié et à la reconnaissance, de payer ici un juste tribut de remercîments à M. Hoüel, dont les conseils affectueux et l'extrême bienveillance m'ont été d'un grand secours, sans parler de son Ouvrage, par lequel il a rendu un véritable service à tous ceux qui s'occupent de Mathématiques en France.

Première Partie : Cinématique.

Étude du mouvement d'un point matériel.

1. Si un vecteur variable x est donné en fonction de quantités constantes (algébriques ou non), et d'une variable réelle t, on pourra l'exprimer sous la forme

$$\mathrm{x} = f(t). \tag{1}$$

Cette équation représente le lieu géométrique de l'extrémité du vecteur x, c'est-à-dire une certaine courbe de l'espace. Mais, si nous considérons le paramètre variable t comme représentant le *temps écoulé* à partir d'un certain instant pris pour origine, il est visible que cette équation exprime, en même temps que la *trajectoire* dont nous venons de parler, la manière dont cette trajectoire est parcourue par le point mobile. En effet, à un instant donné quelconque, la position du mobile se trouve complétement déterminée.

L'équation (1) est donc l'équation la plus générale du mouvement d'un point mobile. Sur cette équation, nous pourrons opérer suivant les besoins tous les calculs nécessaires, en nous conformant aux règles de la méthode des quaternions. Nous pourrons aussi la différentier et la soumettre au calcul des dérivées, *la variable t étant réelle*.

2. La *vitesse* du mobile X est évidemment fournie par

$$\frac{d\mathrm{x}}{dt} = f'(t) \tag{2}$$

en grandeur et en direction. Nous désignerons aussi cette vitesse par x'_t.

En changeant de variable, et supposant pour un instant x exprimé en fonction de la *longueur de l'arc* de la trajectoire, à partir d'une certaine origine, nous avons encore

$$(3) \qquad \mathrm{x}'_t = \mathrm{x}'_s \frac{ds}{dt}.$$

Sous cette forme, la direction et la grandeur de la vitesse sont mises en évidence, car $\mathrm{x}'_s = \frac{d\mathrm{x}}{ds}$ est évidemment un vecteur unitaire dirigé suivant la tangente à la trajectoire, et $\mathfrak{T}\,\mathrm{x}'_t = \frac{ds}{dt}$ exprime la grandeur de la vitesse.

3. Si nous décomposons x suivant trois directions non coplanaires quelconques A_1, A_2, A_3, nous aurons

$$\mathrm{x} = x_1\mathrm{A}_1 + x_2\mathrm{A}_2 + x_3\mathrm{A}_3;$$

d'où, pour la vitesse,

$$\mathrm{x}' = \frac{dx_1}{dt}\mathrm{A}_1 + \frac{dx_2}{dt}\mathrm{A}_2 + \frac{dx_3}{dt}\mathrm{A}_3.$$

Or

$$\frac{dx_1}{dt}\mathrm{A}_1 = (x_1\mathrm{A}_1)'_t, \quad \frac{dx_1}{dt}\mathrm{A}_1 + \frac{dx_2}{dt}\mathrm{A}_2 = (x_1\mathrm{A}_1 + x_2\mathrm{A}_2)'_t;$$

de là résulte que, si l'on considère le mouvement projeté, soit sur un *axe* quelconque A_1, soit sur un *plan* quelconque $(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2)$, on peut énoncer ce théorème : *La vitesse de la projection du point mobile est égale à la projection de la vitesse du même point.*

4. Si par le point pris pour origine on mène à chaque instant un vecteur x' égal à celui qui représente la vitesse, l'extrémité de x' décrira une trajectoire, dont la loi de description sera donnée par l'équation

$$(4) \qquad \mathrm{x}' = f'(t).$$

Cette courbe représente ainsi la vitesse à chaque instant; elle est d'un usage assez fréquent, et nous l'appellerons, avec Hamilton, l'*hodographe* du mouvement considéré.

On remarquera que l'équation de l'hodographe (en même temps que de sa loi de description) s'obtient en prenant la dérivée de l'équation du mouvement par rapport au temps.

Il est clair que l'hodographe d'un mouvement uniforme est une courbe sphérique de centre O, et que l'hodographe d'un mouvement dans un plan est une courbe dans le même plan.

5. Puisque l'accélération se définit par la variation de la vitesse, on voit immédiatement que cette accélération, à l'instant t, est donnée par

$$\mathrm{x}''_t = \frac{d^2\mathrm{x}}{dt^2} = f''(t). \tag{5}$$

Comme on peut écrire aussi $\mathrm{x}''_t = (\mathrm{x}'_t)'_t$, l'accélération est représentée par la vitesse du point correspondant de l'hodographe.

De la définition même de l'accélération il résulte d'ailleurs qu'elle est située dans le plan osculateur de la trajectoire.

Si nous différentions la relation (3) par rapport à t, il vient

$$\mathrm{x}''_t = \frac{d^2 s}{dt^2}\mathrm{x}'_s + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \mathrm{x}''_s = \frac{dv}{dt}\mathrm{x}'_s + v^2 \mathrm{x}''_s, \tag{6}$$

en appelant v la grandeur de la vitesse.

Mais il est visible que x''_s exprime, en grandeur et en direction, l'inverse du rayon de courbure de la trajectoire en X (x'_s étant, comme il importe de se le rappeler, un vecteur unitaire). L'accélération se trouve donc décomposée en deux parties : l'*accélération tangentielle*, dirigée suivant la tangente à la trajectoire, et dont la grandeur est $\frac{dv}{dt}$; l'*accélération normale*, dirigée suivant la normale principale, et dont la grandeur est $\frac{v^2}{\mathrm{r}}$, si l'on appelle r le rayon de courbure.

6. Il suit immédiatement de là que l'accélération normale est nulle dans tout mouvement rectiligne, et que réciproquement, si l'accélération normale est constamment nulle, le mouvement est rectiligne.

On voit aussi que, dans tout mouvement uniforme, l'accélération tangentielle est nulle; que dans un mouvement circulaire et uniforme l'accélération normale est constante en grandeur.

Le théorème du n° **3**, qui s'applique à la projection du mouvement, soit sur un axe fixe, soit sur un plan fixe, est vrai pour les accélérations comme pour les vitesses. On le démontrerait exactement de la même manière que ci-dessus.

7. Lorsqu'on passe d'un point x à un point $x + \Delta x$, infiniment voisin sur la trajectoire, l'accroissement Δx peut s'exprimer au moyen de la série de Taylor, par exemple sous l'une ou l'autre des deux formes suivantes :

$$\Delta x = \frac{dx}{ds}\,ds + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{ds^2}\,ds^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3x}{ds^3}\,ds^3 + \ldots, \tag{7}$$

$$\Delta x = \frac{dx}{dt}\,dt + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}\,dt^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3x}{dt^3}\,dt^3 + \ldots. \tag{8}$$

Si l'on néglige dans la formule (7) les termes d'ordre supérieur au second, et si l'on remarque que $\frac{d^2x}{ds^2}$ est perpendiculaire à la tangente, on voit immédiatement que le terme $\frac{1}{2}\frac{d^2x}{ds^2}\,ds^2$ représente la distance du point $x + \Delta x$ à la tangente au point x. Ce terme peut se mettre sous la forme $\frac{1}{2}v^2 x''_s\,dt^2$, et par suite la distance en question est égale à la moitié de l'accélération normale multipliée par le carré de l'élément de temps.

La formule (8) nous montre, de son côté, que si l'on porte sur la tangente en x une longueur égale à $v\,dt$, et si l'on joint l'extrémité de cette longueur avec le point $x + \Delta x$, la ligne ainsi obtenue est exprimée, en grandeur et en direction, par la moitié de l'accélération totale multipliée par le carré de l'élément de temps.

Enfin, le premier membre de cette même formule (8) pouvant s'écrire $x + \Delta x - x$, il en résulte, en prenant les dérivées par rapport à t,

$$\frac{d(x + \Delta x)}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2}\,dt, \tag{9}$$

c'est-à-dire que la vitesse en un point infiniment voisin du point x, atteint au bout du temps dt, peut se décomposer en deux parties, savoir : 1° la vitesse en x ; 2° l'accélération totale en x, multipliée par dt.

8. L'origine O peut être regardée comme le sommet d'un cône ayant la trajectoire pour directrice, et dont chaque vecteur x est une génératrice. Dans le temps dt, ce vecteur décrira un élément de la surface de ce cône, représenté par le triangle ayant pour sommet O et pour côtés x et $x + dx$. Le quotient de l'aire de ce triangle infiniment petit par dt pourra être appelé *vitesse aréolaire* du point x, et nous pourrons la représenter, *en grandeur et en direction*, par une longueur mesurée par le même nombre et portée sur la perpendiculaire élevée en O sur le plan tangent correspondant.

D'après cela, si nous représentons cette vitesse par Y, nous pourrons l'exprimer ainsi

$$(10) \qquad Y = \frac{1}{2} \mathfrak{V} \, . \, x x'_t \, .$$

Je propose d'appeler la trajectoire du point Y *hodographe aréolaire* du mouvement.

En prenant la dérivée de la relation (10) par rapport au temps, il vient

$$(11) \qquad Y'_t = \frac{1}{2} \mathfrak{V} . \, x x''_t \, ,$$

formule qui nous donne la vitesse sur l'hodographe aréolaire, ou, ce qui revient au même, l'*accélération aréolaire* du mouvement étudié.

Il n'est pas sans intérêt de remarquer qu'en appelant X le point mobile, XV la vitesse, XJ son accélération, le second membre de l'équation (10) exprime l'aire du triangle OXV et le second membre de l'équation (11) l'aire du triangle OXJ. Cette seconde aire représente donc la dérivée de la première, en grandeur et en direction, et par conséquent, si nous projetons ces deux triangles sur un plan fixe quelconque, l'aire du second mesurera la dérivée de l'aire du premier. Ainsi :

Un point étant mobile dans l'espace, soient formés les deux triangles ayant pour sommets : l'un ce point mobile, l'extrémité de sa vitesse et *un point fixe quelconque; l'autre ce point mobile, l'extrémité de son accélération et le même point fixe. Ces deux triangles étant projetés sur un plan fixe quelconque, la projection de l'aire du second mesurera la dérivée de la projection de l'aire du premier par rapport au temps.*

Lorsqu'il s'agit d'un mouvement dans lequel les aires parcourues sont proportionnelles aux temps, la vitesse aréolaire est constante en grandeur, et par conséquent l'hodographe aréolaire est une courbe sphérique de centre O.

S'il s'agit d'un mouvement qui a lieu dans un plan passant par O, l'hodographe aréolaire se réduit à une droite normale à ce plan.

Si les deux circonstances précédentes se produisent simultanément, l'hodographe aréolaire s'évanouit, se réduisant à un point. Dans ce cas, le triangle formé par le vecteur x et l'accélération doit avoir une aire nulle, c'est-à-dire que l'accélération passe constamment par le point O.

Réciproquement, si ce dernier fait se produit, nous avons, d'après (11) et (10),

$$\mathrm{Y}'_t = 0, \quad \mathrm{Y} = \mathrm{c},$$

de sorte que le mouvement se produit, dans un plan (normal à c), avec une vitesse aréolaire constante.

La vitesse aréolaire sur l'hodographe aréolaire a pour expression

$$(12) \qquad \frac{1}{8}\,\mathfrak{V}\,(\mathfrak{V}\mathrm{xx}'_t\,\mathfrak{V}\mathrm{xx}''_t) = -\frac{1}{8}\,\mathrm{x}\,\mathfrak{S}\mathrm{xx}'_t\,\mathrm{x}''_t\,.$$

Cela nous montre que cette vitesse est dirigée dans un plan perpendiculaire à x (ce qui était évident), et en outre que sa grandeur est exprimée par le produit de $\frac{3}{4}\cdot$ OX par le volume du tétraèdre OXVJ.

Lorsqu'on étudie un mouvement rectiligne suivant une trajectoire passant par l'origine, la notion de la vitesse aréolaire s'évanouit évidemment.

9. Nous pouvons, après ces considérations générales, chercher à étudier plus particulièrement les circonstances d'un mouvement qui s'accomplit dans un plan. Prenons un point de ce plan comme origine

et déterminons la position du point mobile à chaque instant par ses coordonnées polaires ordinaires, que nous appellerons r et θ. (Il est essentiel de ne pas confondre r avec r, que nous avons employé plus haut pour représenter le rayon de courbure de la trajectoire.)

Le mouvement pourra alors se représenter par l'équation

$$\mathrm{x} = r\,\mathrm{B}\mathrm{A}^{\theta}, \tag{13}$$

A et B étant deux vecteurs unitaires, le premier perpendiculaire au plan du mouvement, et le second dirigé dans ce plan.

Les coordonnées r et θ doivent être regardées, bien entendu, comme deux fonctions du temps t; θ sera considéré comme rapporté à l'angle droit pris pour unité.

En prenant les dérivées de l'équation (13) par rapport au temps, nous avons, comme expression de la vitesse,

$$\frac{d\mathrm{x}}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\mathrm{B}\mathrm{A}^{\theta} + r\frac{d\theta}{dt}\,\mathrm{B}\mathrm{A}^{\theta}\mathrm{A}. \tag{14}$$

Cette formule (14) nous montre immédiatement que la vitesse se compose de deux parties : la *vitesse de translation* $\frac{dr}{dt}$ suivant le rayon vecteur; et la *vitesse de circulation* $r\frac{d\theta}{dt}$ perpendiculaire à ce même rayon.

La *vitesse angulaire* est $\frac{d\theta}{dt}$, et la *vitesse aréolaire* se représente par $\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}\mathrm{A}$; cette dernière est de direction constante, comme on l'a vu plus haut.

En prenant encore la dérivée de l'équation (14), nous avons

$$\frac{d^2\mathrm{x}}{dt^2} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\mathrm{B}\mathrm{A}^{\theta} + \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\mathrm{B}\mathrm{A}^{\theta}\mathrm{A}, \tag{15}$$

et nous voyons ainsi que l'accélération totale se décompose en deux parties, l'une dirigée suivant le rayon vecteur, de grandeur $\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$, et l'autre, perpendiculairement, exprimée par $2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}$.

Il serait possible également d'étudier un mouvement plan, en rapportant la position du point mobile à deux axes coordonnés dans ce plan. L'équation du mouvement prendrait alors la forme

$$\mathrm{X} = x_1 \mathrm{A}_1 + x_2 \mathrm{A}_2,$$

x_1 et x_2 étant fonctions du temps.

Si l'on veut, en particulier, étudier le mouvement dont l'accélération est constante et égale à A, il suffit évidemment d'intégrer l'équation

$$\frac{d^2\mathrm{X}}{dt^2} = \mathrm{A},$$

ce qui donne

$$\frac{d\mathrm{X}}{dt} = \mathrm{A}t + \mathrm{B},$$

et

$$\mathrm{X} = \tfrac{1}{2}\mathrm{A}t^2 + \mathrm{B}t + \mathrm{C}. \tag{16}$$

C donne la position du mobile à l'origine des temps, B la vitesse initiale de ce mobile. En supposant l'origine O prise dans le plan (A, B), il est clair que A, B, C sont coplanaires entre eux, et avec X. La trajectoire est donc une courbe plane, et il est aisé de reconnaître que c'est une parabole. En choisissant pour origine la position initiale du mobile, l'équation se réduit d'ailleurs à la forme plus simple

$$\mathrm{X} = \tfrac{1}{2}\mathrm{A}t^2 + \mathrm{B}t,$$

qui nous montre immédiatement que la trajectoire est une parabole dont les diamètres sont dirigés suivant A, et dont B est la tangente à l'origine.

En prenant ainsi la position initiale pour origine, la vitesse aréolaire prend la forme simple $\frac{1}{4}t^2\,\mathfrak{V}\,\mathrm{BA}$, ce qui donne une propriété assez intéressante.

Les propriétés diverses de ce mouvement, les problèmes auxquels il donne lieu, pourraient être étudiés d'après l'algorithme des quaternions; mais nous préférons, sur ces questions si connues, nous en tenir à quelques indications générales.

10. Cherchons à former l'équation d'un mouvement dont l'accélération, passant par un point fixe, est proportionnelle à la distance du mobile à ce point fixe. Nous exprimerons cette propriété par l'équation

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \pm . m^2 x, \tag{17}$$

en prenant pour origine le point fixe. Le signe + du second membre est relatif au cas d'une accélération *répulsive*, et le signe — au cas d'une accélération *attractive*.

En intégrant cette formule, on obtient pour la loi du mouvement

$$x = A \,\mathrm{Ch}\, mt + B \,\mathrm{Sh}\, mt \tag{18}$$

dans le premier cas, et

$$x = A \cos mt + B \sin mt \tag{19}$$

dans le second, A et B étant deux vecteurs arbitraires, mais constants.

Le mouvement représenté par la relation (18) a pour trajectoire une hyperbole ayant pour centre l'origine, et celui représenté par (19) une ellipse de même centre; A et B, dans les deux cas, sont deux demi-diamètres conjugués.

La vitesse du premier de ces mouvements a pour expression

$$\frac{dx}{dt} = m(A \,\mathrm{Sh}\, mt + B \,\mathrm{Ch}\, mt) \tag{20}$$

et celle du second

$$\frac{dx}{dt} = m(- A \sin mt + B \cos mt). \tag{21}$$

Nous voyons ainsi qu'à un facteur constant près cette vitesse s'exprime par le demi-diamètre conjugué de celui qui aboutit au point mobile; si bien que l'hodographe est, pour le premier mouvement, une hyperbole homothétique de la conjuguée de celle que parcourt le mobile; et, pour le second, une ellipse homothétique à la trajectoire.

Ces équations (18) et (19) permettraient d'étudier les propriétés de l'hyperbole et de l'ellipse; mais, ayant actuellement pour objet une étude cinématique et non pas purement géométrique, nous n'entamerons pas une semblable digression.

11. Nous allons maintenant étudier un cas beaucoup plus intéressant au point de vue des applications physiques, puisque c'est celui des mouvements planétaires : nous voulons parler de l'hypothèse d'une accélération *centrale* (appelant ainsi généralement celle qui passe constamment par un point ou centre fixe) dont la grandeur est inversement proportionnelle au carré de la distance du centre au point mobile.

Il est clair, tout d'abord, d'après ce qu'on a vu au n° **8**, que le mouvement s'exécute dans un plan, et que la vitesse aréolaire est constante. Maintenant, m représentant un facteur constant, nous avons

$$(22) \qquad \frac{d^2 \mathrm{x}}{dt^2} = \frac{m\,\mathfrak{U}\mathrm{x}}{(\mathfrak{T}\mathrm{x})^2};$$

m est négatif dans le cas d'une accélération attractive, et positif pour une accélération répulsive.

C'est cette équation (22) qu'il s'agit d'intégrer : la remarquable méthode d'intégration qui suit est celle qu'a employée Hamilton.

On sait que, généralement, $\frac{d\mathfrak{U}\mathrm{x}}{\mathfrak{U}\mathrm{x}} = \mathfrak{V}\frac{d\mathrm{x}}{\mathrm{x}}$. Donc, divisant par dt, et introduisant sous le signe $\mathfrak{V}$ le facteur $\frac{1}{\mathrm{x}}\mathrm{x}$,

$$(23) \qquad \frac{d\mathfrak{U}\mathrm{x}}{dt} = -\frac{\mathfrak{U}\mathrm{x}.\mathfrak{V}\mathrm{x}\mathrm{x}'_t}{(\mathfrak{T}\mathrm{x})^2} = -\frac{\mathfrak{U}\mathrm{x}.\mathrm{c}}{(\mathfrak{T}\mathrm{x})^2},$$

puisque la vitesse aréolaire $\frac{1}{2}\mathfrak{V}\mathrm{x}\mathrm{x}'_t$ est constante.

Par conséquent,

$$(24) \qquad \frac{d^2\mathrm{x}}{dt^2}\,\mathrm{c} = -m\frac{d\mathfrak{U}\mathrm{x}}{dt},$$

et de là

$$(25) \qquad \mathrm{x}'_t \,.\, \mathrm{c} = \mathrm{E} - m.\mathfrak{U}\mathrm{x}.$$

Il est seulement à remarquer que le vecteur E, que nous introduisons ici comme constante d'intégration, n'est pas absolument arbitraire. Ce vecteur est assujetti à être perpendiculaire à c, c'est-à-dire dirigé dans le plan du mouvement, puisque $\mathfrak{S}\mathrm{x}'_t \,.\, \mathrm{c}^2$ et $\mathfrak{S}.(\mathfrak{U}\mathrm{x}.\mathrm{c})$ sont tous deux nuls, ce qui donne $\mathfrak{S}.\mathrm{EC} = 0$.

Opérant sur (25) par $\times \frac{1}{\mathrm{c}}$, nous obtenons l'hodographe

$$(26) \qquad \mathrm{x}'_t = \mathrm{EC}^{-1} - m.(\mathfrak{U}\mathrm{x})\mathrm{c}^{-1}.$$

Les deux termes du second membre sont des expressions vectorielles : le premier est constant, et le second a un module constant, et ne varie qu'en direction seulement. Il suit de là que l'hodographe est une circonférence, de même plan que la trajectoire, ayant pour centre l'extrémité du vecteur EC^{-1}, et pour rayon $\frac{m}{\mathfrak{T}\mathrm{c}}$.

On peut encore déterminer l'hodographe par les deux équations suivantes, écrites simultanément :

$$(27) \qquad \begin{cases} \mathfrak{T}(\mathrm{x}'_t - \mathrm{EC}^{-1}) = \dfrac{m}{\mathfrak{T}\mathrm{c}}, \\ \mathfrak{S}.\mathrm{C}\mathrm{x}'_t = 0. \end{cases}$$

La première représente une sphère, et la seconde un plan passant par l'origine, et aussi par le centre de la sphère.

Pour avoir l'équation de la trajectoire, il suffit d'opérer par $\mathfrak{V}.\mathrm{x}$ sur celle de l'hodographe (26), ce qui donne

$$(28) \qquad \mathrm{c} = \mathfrak{V}.\mathrm{xEC}^{-1} + m\mathfrak{T}\mathrm{x}.\mathrm{c}^{-1},$$

ou, en opérant par $\mathfrak{S}.(\ )\mathrm{c}$,

$$(29) \qquad \mathrm{c}^2 = \mathfrak{S}\,\mathrm{EX} + m\mathfrak{T}\mathrm{x},$$

ou enfin

$$(30) \qquad m.\mathfrak{T}\mathrm{x} = \mathfrak{S}.\mathrm{E}(\mathrm{c}^2\mathrm{E}^{-1} - \mathrm{x}).$$

Sous cette dernière forme, nous reconnaissons immédiatement la propriété du foyer et de la directrice. C'est en effet l'équation d'une surface de révolution du second ordre, ayant pour axe E.

La trajectoire est donnée par l'intersection de cette surface avec le plan

$$\mathfrak{S}.\,\mathrm{CX} = 0, \tag{31}$$

c'est-à-dire par l'ensemble des équations (30) et (31).

On reconnaît sans peine que l'origine est un foyer; que la distance du foyer à la directrice est exprimée en grandeur et en direction par $\mathrm{C}^2\mathrm{E}^{-1}$; que l'excentricité est $\frac{\mathfrak{T}\mathrm{E}}{m}$, et l'axe focal $-\frac{2m\mathrm{C}^2}{m^2+\mathrm{E}^2}$.

L'équation (26) peut encore se mettre sous la forme

$$(\mathrm{X}'_t - \mathrm{EC}^{-1})^2 = +m^2.\mathrm{C}^{-2} = +\frac{m^2}{\mathrm{C}^2}; \tag{32}$$

d'où résultent immédiatement la forme circulaire de l'hodographe et la détermination de son centre et de son rayon.

Il est à remarquer, si nous nous rappelons l'expression de C, écrite plus haut, que le rayon a pour valeur le quotient de la constante m par la double vitesse aréolaire.

Suivant que $\mathfrak{T}\mathrm{E} \lesseqgtr m$, l'origine O est intérieure ou extérieure au cercle hodographique; si $\mathfrak{T}\mathrm{E} = m$, l'origine est alors sur la circonférence de ce cercle.

12. Cette propriété fort remarquable des mouvements planétaires, qu'Hamilton désigne sous le nom de *loi de l'hodographe circulaire*, l'a conduit à de nombreuses conséquences, que nous ne saurions reproduire ici, même en partie, au moins pour le moment. Mais, avant de quitter cette étude de la Cinématique d'un point, il ne sera peut-être pas sans intérêt de voir comment l'illustre inventeur des quaternions a étendu l'analyse du numéro précédent au cas d'une accélération centrale quelconque.

Soit R (au lieu de mr^{-2}) la grandeur de l'accélération attractive, répondant à la distance r du mobile au centre fixe.

Alors

$$(33) \qquad x''_t = - R . \mathfrak{U} x = R r x^{-1},$$

si nous remarquons que $r = \mathfrak{T} x$.

Prenant les dérivées, en ayant égard à la formule

$$\frac{d \mathfrak{U} x}{\mathfrak{U} x} = \mathfrak{V} \frac{dx}{x},$$

que nous avons rappelée plus haut, il vient

$$\begin{aligned} x'''_t &= - R'_t . \mathfrak{U} x - \frac{R}{r^2} \frac{\mathfrak{V}(x x'_t)}{\mathfrak{U} x} \\ &= - R'_t \, \mathfrak{U} x + \frac{R}{r^2} \mathfrak{U} x . \mathfrak{V}(x x'_t), \end{aligned}$$

ou, posant la double vitesse aréolaire $\mathfrak{V} . x x'_t$ égale à c, comme plus haut,

$$(34) \qquad x'''_t = - R'_t \, \mathfrak{U} x + \frac{R}{r^2} \mathfrak{U} x . c.$$

Opérant par $\mathfrak{V} . \frac{1}{x''_t}$, en tenant compte de la formule (33), on a

$$(35) \qquad \mathfrak{V} \frac{x'''_t}{x''_t} = - \frac{1}{r^2} c.$$

Mais, ainsi que nous l'avons remarqué au n° 5, l'inverse du rayon de courbure d'une courbe quelconque x, dirigé suivant la normale, a pour expression le vecteur x''_s, appelé par Hamilton *vecteur de courbure*. Et, en se rappelant que $x'_s = \mathfrak{U} x'_t$, on peut transformer x''_s de la manière suivante :

$$x''_s = - \frac{1}{x'_t} \mathfrak{V} \frac{x''_t}{x'_t}.$$

Le *vecteur de courbure de l'hodographe* a donc pour expression $- \frac{1}{x''_t} \mathfrak{V} \frac{x'''_t}{x''_t}$, ou, si nous remplaçons x''_t et $\mathfrak{V} \frac{x'''_t}{x''_t}$ par leurs valeurs (33) et (35), et si nous appelons c la grandeur $\mathfrak{T} c$ de la double vitesse aréolaire,

$$\frac{c}{Rr^2}\,\mathfrak{U}\,.\,\mathrm{xc}. \tag{36}$$

Quant *au rayon de courbure h de l'hodographe*, il a pour valeur l'inverse du module de l'expression (36), ou

$$h = \frac{Rr^2}{c}. \tag{37}$$

En langage ordinaire, cette formule (37) peut se traduire par l'énoncé suivant :

Dans tout mouvement dont l'accélération passe par un centre fixe, le rayon de courbure de l'hodographe a pour valeur le produit de l'accélération par le carré de la distance, divisé par le double de la vitesse aréolaire.

Ce théorème nous donne, comme cas particulier, la loi de l'hodographe circulaire pour le cas de l'attraction universelle, examiné dans le numéro précédent. Il nous fournit en même temps la démonstration de la réciproque de cette loi, c'est-à-dire que :

Pour tout mouvement d'accélération centrale, si l'hodographe du mouvement est un cercle, l'accélération est nécessairement en raison inverse du carré de la distance du centre fixe au point mobile.

La formule (37) peut encore se transformer, en introduisant la longueur p de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la tangente à l'hodographe. On a, en effet, $p = \frac{c}{r}$, comme il est facile de le reconnaître directement, et par suite

$$h = \frac{Rr}{p}, \tag{38}$$

$$h = \frac{Rc}{p^2}. \tag{39}$$

Cette dernière relation (39) ne contient que des éléments relatifs à l'hodographe, puisque R n'est autre chose que la vitesse sur cette courbe.

Elle nous fournit donc la condition pour qu'un mouvement donné soit le mouvement hodographique correspondant à un mouvement d'accélération centrale. Il faut, en outre, évidemment que le mouvement donné s'exécute dans un plan unique.

On peut aussi retrouver ces conditions en cherchant à résoudre directement le problème. Soit, en effet, z le mouvement donné. Le mouvement x dont z est l'hodographe s'exprimera par $x = \int z\,dt$; de sorte que les conditions cherchées s'exprimeront elles-mêmes par l'équation

$$\mathfrak{V}.(\int z\,dt.z) = c, \tag{40}$$

c étant un vecteur constant.

Cette équation peut en fournir d'autres, d'une interprétation plus facile. Ainsi, en en prenant deux fois successivement la dérivée, nous avons

$$\mathfrak{V}.(\int z\,dt.z'_t) = 0, \tag{41}$$

$$\mathfrak{V}.(\int z\,dt.z''_t) + \mathfrak{V}.zz'_t = 0. \tag{42}$$

De la formule (41) on tire

$$\int z\,dt = u z'_t,$$

et par suite, en vertu de (40),

$$u\mathfrak{V}.z'_t z = c, \tag{43}$$

ce qui démontre que la courbe donnée *doit être plane*. De plus,

$$u\mathfrak{V}.z''_t z_t + \mathfrak{V}\,zz'_t = 0, \tag{44}$$

et, en éliminant u entre (43) et (44),

$$c.\mathfrak{V}z''_t z_t = (\mathfrak{V}zz'_t)^2, \tag{45}$$

d'où l'on déduit immédiatement la relation (39).

Mouvement d'un solide autour d'un point fixe.

13. On sait que la rotation d'une figure autour d'un axe fixe L, l'amplitude de la rotation étant 2λ, se représente dans le Calcul des quaternions par l'opérateur $\mathrm{L}^{-\lambda}(\quad)\mathrm{L}^{\lambda}$, ou, si nous appelons L le quaternion L^{λ}, par $L^{-1}(\quad)L$.

Nous ne nous arrêterons pas à démontrer cette proposition, ni à montrer comment elle permet d'opérer très-simplement des compositions de rotations entre elles ou avec des translations. Nous allons seulement en déduire quelques conséquences, utiles pour la suite de notre étude.

Considérons un vecteur A, qui subit la rotation que nous venons de définir, ce qui le transforme en A_1. Nous aurons

$$L^{-1}\mathrm{A}L = \mathrm{A}_1, \tag{46}$$

et nous pouvons aussi mettre cette formule sous la forme

$$\mathrm{A}L = L\mathrm{A}_1. \tag{47}$$

Si nous décomposons le quaternion L (que nous pouvons supposer unitaire) en ses parties réelle et symbolique L_0 et L_i, la formule (46) nous donnera

$$L_0^2\mathrm{A} - L_i\mathrm{A}L_i + 2L_0\mathfrak{V}.\mathrm{A}L_i = \mathrm{A}_1. \tag{48}$$

De même, la formule (47) nous donne

$$L_0(\mathrm{A} - \mathrm{A}_1) = L_i\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}L_i,$$

d'où, en prenant les parties vectorielles de chaque terme,

$$L_0(\mathrm{A} - \mathrm{A}_1) = \mathfrak{V}.L_i(\mathrm{A} + \mathrm{A}_1). \tag{49}$$

14. Comme première application, cherchons à démontrer le célèbre théorème, énoncé par d'Alembert, en ce qui concerne un mouvement infiniment petit, et consistant en ce que *tout déplacement d'un solide dont un point est immobile équivaut à une rotation autour d'un certain axe.*

Prenons le point fixe pour origine, et soient A, B deux points du corps qui deviennent respectivement A_1 et B_1. Je dis qu'on peut écrire

$$(50) \qquad L^{-1} A L = A_1, \quad L^{-1} B L = B_1,$$

et il est évident que, si l'on peut trouver un quaternion L satisfaisant à ces deux équations, le théorème est démontré.

Or la formule (49), qui se déduit de la première équation (50), en entraîne une pareille en B. Si nous les multiplions, et si nous prenons ensuite les parties vectorielles, nous aurons

$$(51) \left\{ \begin{aligned} L_0^2 \mathfrak{V}.(A - A_1)(B - B_1) &= \mathfrak{V}.[\mathfrak{V}.L_i(A + A_1)\mathfrak{V}.L_i(B + B_1)] \\ &= (B + B_1)\mathfrak{S}.L_i(A + A_1)L_i \\ &\quad - L_i\mathfrak{S}.L_i(A + A_1)(B + B_1) \\ &= L_i\mathfrak{S}.(A + A_1)L_i(B + B_1). \end{aligned} \right.$$

Par suite, nous obtiendrons la *direction* du vecteur L_i, c'est-à-dire de l'axe de rotation, en formant l'expression $\mathfrak{V}.(A - A_1)(B - B_1)$.

Cette direction étant obtenue, tout est démontré en réalité; mais nous pouvons nous proposer de rechercher en outre l'*amplitude* de la rotation, que la formule nous donnera immédiatement, si nous remarquons que $L_0 = \cos\lambda$, $L_i = \mathrm{L}\sin\lambda$, d'où

$$(52) \qquad \operatorname{tang}^2\lambda = \frac{\mathfrak{T}.\mathfrak{V}.(A - A_1)(B - B_1)}{\mathfrak{S}.(A + A_1)\mathrm{L}(B + B_1)}.$$

Cette expression s'interprète géométriquement avec la plus grande facilité.

Il est bon de remarquer que la démonstration qui précède suppose implicitement que le corps n'a subi aucune déformation. Il est clair, en effet, que c'est là une condition indispensable pour que les équations (50) soient satisfaites.

15. Soit maintenant un corps solide, mobile *d'une manière continue* autour d'un point fixe, que nous prendrons pour origine. Le mouvement élémentaire de ce corps, à un instant quelconque, sera, d'après ce qui précède, une rotation infiniment petite autour d'un axe (axe instantané de rotation) passant par l'origine.

Désignons par x le vecteur d'un point déterminé du corps à l'instant considéré; par T le vecteur unitaire suivant l'axe instantané (et dirigé dans un sens tel que la rotation élémentaire s'accomplisse dans le sens direct par rapport à cet axe); par $d\theta$ l'amplitude de la rotation élémentaire. Nous aurons, pour passer au point infiniment voisin $x + dx$,

$$x + dx = T^{-\frac{d\theta}{2}} x T^{+\frac{d\theta}{2}}$$

ou, négligeant les infiniment petits d'ordres supérieurs au premier,

$$x + dx = \left(1 - T\frac{d\theta}{2}\right) x \left(1 + T\frac{d\theta}{2}\right) = x + \frac{d\theta}{2}(xT - Tx),$$

et enfin

$$(53) \qquad dx = d\theta . \mathfrak{V} . xT.$$

Appelant ω la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$, et désignant par un accent les dérivées prises par rapport au temps, seule variable indépendante que nous considérions ici, nous tirons de là pour la vitesse du point x

$$(54) \qquad x' = \omega \mathfrak{V} . xT = \omega x \sin(\widehat{xT}) \mathfrak{U} . xT,$$

x étant la longueur du vecteur $OX = x$.

Ainsi, cette vitesse du point X a pour grandeur le produit de la vitesse angulaire par la distance du point X à l'axe instantané de rotation ; elle est perpendiculaire au plan passant par OX et l'axe instantané, et son sens est évidemment celui du mouvement, c'est-à-dire que, pour un observateur placé sur l'axe OT, les pieds en O, elle se dirige à gauche du plan TOX.

Actuellement, considérons le déplacement *total* subi par le corps, à partir d'une certaine position initiale. Ce déplacement équivaut à une rotation finie $L^{-1}(\ \ )L$, en appelant L un certain quaternion que nous supposerons unitaire; de sorte que, si A est la position initiale du vecteur x, nous aurons

$$(55) \qquad \mathrm{x} = L^{-1}\mathrm{A}L.$$

De là, en prenant les dérivées,

$$(56) \left\{ \begin{aligned} \mathrm{x}' &= (L^{-1})'\mathrm{A}L + L^{-1}\mathrm{A}L' = -L^{-1}L'L^{-1}\mathrm{A}L + L^{-1}\mathrm{A}L.L^{-1}L' \\ &= 2\mathfrak{V}.(L^{-1}\mathrm{A}L\mathfrak{V}\, L^{-1}L') = 2\mathfrak{V}.(\mathrm{x}.\mathfrak{V}L^{-1}L'). \end{aligned} \right.$$

Or,

$$\mathfrak{V}.L^{-1}L' = \frac{(\mathfrak{U}L)'}{\mathfrak{U}L} = \frac{L'}{L} = L^{-1}L',$$

puisque nous avons supposé que L est un quaternion unitaire. Nous pouvons donc écrire encore

$$(57) \qquad \mathrm{x}' = 2\mathfrak{V}.(\mathrm{x}L^{-1}L') = 2\mathfrak{V}.(L^{-1}\mathrm{A}L').$$

Ces nouvelles expressions de la vitesse seront utiles chaque fois que l'on connaîtra le déplacement total du corps, en fonction du temps, mais que le mouvement élémentaire ne sera pas directement donné.

De la formule (55) on déduit aussi

$$(58) \qquad \mathrm{A} = L\mathrm{x}L^{-1},$$

et, en prenant les dérivées,

$$(59) \qquad 0 = L\mathrm{x}'L^{-1} + L'\mathrm{x}L^{-1} + L\mathrm{x}(L^{-1})'.$$

La formule (58) exprime le déplacement total du corps, considéré comme partant de la position au temps t pour revenir à la position initiale; ou, si l'on veut, le mouvement apparent d'un corps en repos absolu, rapporté au corps mobile; par suite, la formule (59) s'interprète d'elle-même, et nous fournit ce théorème bien connu :

Si (M) est un corps en repos, et (N) un corps mobile autour d'un point fixe, la vitesse apparente d'un point considéré comme lié au corps (M), pour un observateur emporté par (N), est égale et directe-

ment opposée à la vitesse réelle du même point considéré comme lié à (N).

16. On peut chercher à déterminer l'axe instantané, connaissant seulement le déplacement total en fonction du temps; c'est ce que permettra de faire la comparaison des formules (56) et (57) avec (54). Nous avons effectivement ainsi

$$\omega\,\mathfrak{V}.\mathrm{x}\mathrm{T} = 2\,\mathfrak{V}.(\mathrm{x}\,\mathfrak{V}.L^{-1}L') = 2\,\mathfrak{V}.(\mathrm{x}L^{-1}L'),$$

et, comme cette relation doit subsister, quel que soit x, c'est-à-dire pour tous les points du corps,

$$\mathrm{T}\omega = 2L^{-1}L' = \mathrm{z}. \tag{60}$$

Ce vecteur z dirigé suivant l'axe instantané, et d'une longueur proportionnelle à la vitesse angulaire à chaque instant, peut nous fournir un moyen de représenter le mouvement du corps, si nous le construisons dans toutes les positions successives. Nous pourrons appeler la courbe (z) parcourue de cette manière l'*hodographe* du mouvement. Elle présente une grande analogie avec l'hodographe aréolaire dont nous avons précédemment proposé l'emploi dans l'étude du mouvement d'un point.

En prenant la dérivée de la formule (60), on trouve pour la vitesse sur l'hodographe

$$\mathrm{z}' = 2[L^{-1}L'' - (L^{-1}L')^2] = 2L^{-1}L'' - \frac{\mathrm{z}^2}{2}. \tag{61}$$

On a aussi, en vertu de la formule (54),

$$\mathrm{x}' = \mathfrak{V}\mathrm{x}\mathrm{z} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{x}\mathrm{z} - \mathrm{z}\mathrm{x}),$$

et par dérivation

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{x}'' = \mathfrak{V}.(\mathrm{x}\mathrm{z}' + \mathrm{x}'\mathrm{z}) &= \mathfrak{V}.\mathrm{x}\mathrm{z}' + \mathrm{z}^2\mathrm{x} - \mathrm{z}\,\mathfrak{S}\mathrm{x}\mathrm{z} \\ &= \mathfrak{V}.\mathrm{x}\mathrm{z}' - \omega^2\mathrm{x} - \mathrm{z}\,\mathfrak{S}\mathrm{x}\mathrm{z}, \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

ce qui fournit une construction très-simple pour l'accélération, construction indépendante, comme l'on voit, de la vitesse même du point mobile.

Cette accélération peut encore se mettre en fonction de L, sous la forme

$$\text{(63)} \qquad \mathrm{x}'' = 2(\mathfrak{V}\,\mathrm{x}\,L^{-1}L'' - L^{-1}L'\mathrm{x}\,L^{-1}L').$$

17. La formule (60) nous donne pour équation de l'axe instantané, en désignant maintenant par z le vecteur d'un point *quelconque* de cet axe, et par u un coefficient réel arbitraire,

$$\text{(64)} \qquad \mathrm{z} = uL^{-1}L',$$

et par suite, en donnant à L dans cette dernière formule toutes les valeurs successives que ce quaternion peut recevoir, c'est-à-dire en faisant varier L avec le temps, l'équation (64) est celle de la surface conique, lieu des positions successives *dans l'espace* de tous les axes instantanés.

Si, au contraire, nous ramenons chaque vecteur z à la position initiale du corps, il deviendra $L\mathrm{z}L^{-1} = \mathrm{Y}$; et par conséquent

$$\text{(65)} \qquad \mathrm{Y} = uL'L^{-1}$$

sera l'équation du cône, lieu des axes instantanés, *dans le corps ramené a sa position initiale*.

On sait que le mouvement que nous étudions n'est autre que le roulement du cône (Y) sur le cône (z).

Rien n'est plus facile que d'obtenir l'équation du cône (Y) transporté avec le corps mobile dans une position particulière quelconque de celui-ci, correspondant à la valeur Λ attribuée à L. Il suffit, en effet, pour cela de faire subir au cône Y la rotation $\Lambda^{-1}(\quad)\Lambda$, ce qui donne

$$\text{(66)} \qquad \mathrm{v} = u\Lambda^{-1}L'L^{-1}\Lambda.$$

Il est à remarquer qu'ici Λ est constant et L variable. Si l'on attribue à L la valeur particulière Λ, il vient $\mathrm{v} = \mathrm{z}$. L'axe instantané est, en effet, une génératrice commune aux deux cônes roulants, dans la position considérée.

Le plan tangent commun, le long de cette génératrice, est normal à la droite

$$(67)\quad \mathfrak{V}.\mathrm{zz}' = 4\mathfrak{V}.L^{-1}L'[L^{-1}L'' - (L^{-1}L')^2] = \frac{\omega^2}{2}\mathrm{z} + 2\mathfrak{V}\mathrm{z}L^{-1}L''.$$

18. Soient x, y les vecteurs de deux points quelconques du corps à un même instant. Nous avons, en vertu des formules (54) et (60),

$$\mathrm{x}' = \mathfrak{V}.\mathrm{xz}, \quad \mathrm{y}' = \mathfrak{V}.\mathrm{yz},$$

et par conséquent

$$(68)\qquad \mathfrak{V}.\mathrm{x}'\mathrm{y}' = \mathrm{z}\mathfrak{S}.\mathrm{xzy} = 4L^{-1}L'\mathfrak{S}.\mathrm{x}L^{-1}L'\mathrm{y}.$$

L'interprétation de la première partie de cette formule donne lieu à la construction suivante.

X et Y étant les positions simultanées de deux points du corps, OX′ et OY′ des droites égales et parallèles à leurs vitesses respectives et menées par l'origine, l'axe instantané OZ sera perpendiculaire au plan OX′Y′. Portons sur cette droite une longueur OT quelconque, et construisons les deux tétraèdres OTX′Y′, OTXY. Le rapport des volumes de ces deux solides nous donnera le carré de la vitesse angulaire.

Mouvements relatifs. — Théorème de Coriolis.

19. Soient (M) un milieu en repos absolu, et (N) un milieu mobile, *entraîné* d'un certain mouvement.

Si X est un point mobile dans l'espace d'une manière quelconque, et qu'un observateur soit emporté par le milieu (N), le mouvement du point X rapporté à ce milieu supposé immobile sera le mouvement *relatif* du point, ou, ce qui revient au même, le mouvement *apparent* pour l'observateur dont nous venons de parler. Le mouvement du même point rapporté à (M) est au contraire son mouvement *absolu*.

Le milieu (N), supposé d'abord en coïncidence avec (M), peut être amené à sa position à un instant quelconque par les deux mouvements successifs que voici : 1° une translation tout d'une pièce ; 2° une certaine rotation autour d'un point fixe. Soient s la translation, $L^{-1}(\ \ )L$ la rotation. Si nous ramenons par la pensée le milieu (N) à sa position initiale avec le point X et si nous appelons x_r le vecteur relatif de ce point X ainsi ramené en X_r, il est bien évident que nous aurons

$$(69)\qquad \mathrm{x} = \mathrm{s} + L^{-1}\mathrm{x}_r L.$$

Prenons les dérivées

$$(70)\qquad \mathrm{x}' = [L^{-1}\mathrm{x}'_r L] + [\mathrm{s}' + (L^{-1})'\mathrm{x}_r L + L^{-1}\mathrm{x}_r L'].$$

Le premier membre exprime la vitesse absolue ; la première quantité entre crochets représente évidemment la vitesse relative dans la position considérée. Quant à la seconde quantité entre crochets, c'est la dérivée de $\mathrm{s} + L^{-1}\mathrm{x}_r L$, x_r *étant considéré comme constant*. C'est donc la vitesse d'entraînement, et nous pouvons dire que *la vitesse absolue a pour composantes la vitesse relative et la vitesse d'entraînement.*

Pour trouver maintenant l'accélération, prenons la dérivée de l'équation (70), et il viendra

$$(71)\qquad \begin{cases} \mathrm{x}'' = [L^{-1}\mathrm{x}''_r L] + [\mathrm{s}'' + (L^{-1})''\mathrm{x}_r L + L^{-1}\mathrm{x}_r L'' + 2(L^{-1})'\mathrm{x}_r L'] \\ \qquad + 2[(L^{-1})'\mathrm{x}'_r L + L^{-1}\mathrm{x}'_r L']. \end{cases}$$

On reconnaît comme tout à l'heure que les deux premières expressions entre crochets sont l'accélération relative, et celle d'entraînement. Quant à la troisième, c'est la dérivée de $L^{-1}\mathrm{x}'_r L$, x'_r étant supposé constant ; de sorte que si, par un point de l'axe autour duquel s'effectue la rotation instantanée, nous menons une droite égale et parallèle à la vitesse relative, la troisième quantité entre crochets représentera la vitesse de l'extrémité de cette droite, dans le mouvement de rotation. Ainsi :

L'accélération absolue s'obtient par la composition :

1° *De l'accélération relative ;*

2° *De l'accélération d'entraînement ;*

3° *Du double de la vitesse de l'extrémité de la vitesse relative, dans le mouvement de rotation instantanée, cette vitesse relative étant transportée parallèlement à elle-même de manière que son origine tombe en un point de l'axe instantané.*

On remarquera que cet énoncé du théorème de Coriolis est un peu différent de celui qu'on donne dans la plupart des traités classiques. Celui-ci nous paraît avoir l'avantage de faire disparaître immédiatement toute ambiguïté sur le sens de la troisième composante. Quant à sa grandeur, il résulte évidemment de l'énoncé précédent qu'elle est égale à $2\omega v_r \sin\tau$, ω étant la vitesse angulaire instantanée, v_r la vitesse relative, et τ l'angle de cette vitesse avec l'axe instantané.

On déduirait aussi cette expression de l'*accélération centrifuge composée*, de la formule (54) ci-dessus, laquelle en donne en même temps la direction et le sens.

Il semble difficile d'imaginer une démonstration analytique plus simple de ce théorème important.

Deuxième Partie : Statique.

Représentation des forces, des moments et des couples.

20. On sait qu'une force peut se représenter par une droite en longueur et en direction. Si donc le point d'application est donné, et pris pour origine, par exemple, nous pourrons exprimer la force en question par le vecteur F. Mais il y a une distinction importante à établir ; c'est que la position du vecteur F dans l'espace ne le modifie en rien, au point de vue de ses propriétés analytiques ; il reste toujours *égal* à lui-même lorsqu'il se transporte ainsi parallèlement ; tandis que l'action de la force, au contraire, est essentiellement dépendante de sa position absolue dans l'espace, en même temps que de sa grandeur et de sa direction.

Conséquemment, pour bien définir une force AF, appliquée en un point A, nous nous donnerons à la fois le vecteur $\text{F} = \text{AF}$; et aussi le vecteur $\text{A} = \text{OA}$ du point d'application, O étant une origine fixe arbitraire.

Le *moment* de la force dont nous venons de parler, par rapport à l'origine, a pour valeur $\mathfrak{T}.\mathfrak{V}.\text{AF}$, et il est dirigé dans le plan OAF.

Le moment de la même force par rapport à un point quelconque C de l'espace, donné par $\text{C} = \text{OC}$ sera $\mathfrak{T}.\mathfrak{V}.(\text{A}-\text{C})\text{F}$, et sa direction est celle du plan CAF.

Nous ne nous arrêterons pas à démontrer en partant de ces expressions les théorèmes simples sur les moments que l'on trouve dans tous les traités de Mécanique rationnelle; mais il nous est impossible de ne pas indiquer immédiatement la représentation de la conception si remarquable de Poinsot : la notion du *couple* s'introduit en effet ici comme d'elle-même, puisqu'on peut dire qu'un couple n'est qu'un certain moment donné en grandeur et en direction. Et, d'après ce qui précède, on voit que le couple (AF, OF'), formé de la force F ci-dessus et d'une force opposée appliquée à l'origine, a pour expression

$$-\mathfrak{V}.\text{AF} \quad \text{ou} \quad \mathfrak{V}.\text{FA},$$

et que le couple (AF, CF''), C étant un point arbitraire, a pour expression

$$\mathfrak{V}.\text{F}(\text{A}-\text{C}),$$

en représentant les couples par leurs *axes*, comme le fait Poinsot.

Par suite, la composition des couples s'effectuera par une simple addition de vecteurs, de même que la composition des forces appliquées en un même point.

Si nous convenons de représenter par F_A la force F *appliquée en* A, et par $\text{F}\binom{\text{A}}{\text{B}}$ le *couple* formé de la force $+\text{F}$ *appliquée en* A, et $-\text{F}$ *appliquée en* B, nous pouvons écrire

$$(1) \qquad \text{F}_\text{A} = \text{F}_\text{A} - \text{F}_\text{O} + \text{F}_\text{O} = \text{F}_\text{O} + \text{F}\binom{\text{A}}{\text{O}} = \text{F}_\text{O} + [\mathfrak{V}\,\text{FA}],$$

$$(2) \qquad \text{F}_\text{A} = \text{F}_\text{A} - \text{F}_\text{B} + \text{F}_\text{B} = \text{F}_\text{B} + \text{F}\binom{\text{A}}{\text{B}} = \text{F}_\text{B} + [\mathfrak{V}.\text{F}(\text{A}-\text{B})];$$

nous mettons seulement entre crochets les $\mathfrak{V}$, qui représentent des couples, pour éviter toute confusion, puisqu'il s'agit ici d'une représentation symbolique, et que les couples sont irréductibles avec les forces. C'est ce que nous ferons constamment dans nos calculs, chaque fois que des forces et des couples y figureront simultanément. Les quantités entre crochets devront toujours se calculer séparément, et ne se combineront qu'entre elles. Nous ferons, au contraire, disparaître les crochets lorsque nous ne considérerons que des couples, puisqu'il n'y aura plus aucune confusion à redouter.

Il importe de ne pas perdre de vue la notation

$$(3)\quad [\mathfrak{V}.\mathrm{ML}] = \mathrm{M_L} - \mathrm{M_0} = -(\mathrm{M_0} - \mathrm{M_L}) = (\mathrm{L_0} - \mathrm{L_M}) = -(\mathrm{L_M} - \mathrm{L_0}).$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \mathrm{L_M} + \mathrm{M_L} &= \mathrm{L_0} + \mathrm{M_0} = (\mathrm{L} + \mathrm{M})_0, \\ \mathrm{L_M} - \mathrm{M_L} &= \mathrm{L_0} - \mathrm{M_0} + 2\mathrm{L}\binom{\mathrm{M}}{\mathrm{O}} = \mathrm{L_0} - \mathrm{M_0} - 2\mathrm{M}\binom{\mathrm{L}}{\mathrm{O}} \\ &= \mathrm{L_0} - \mathrm{M_0} + 2[\mathfrak{V}.\mathrm{LM}] = \mathrm{L_0} - \mathrm{M_0} - 2[\mathfrak{V}.\mathrm{ML}]. \end{aligned}$$

Il est à remarquer que, dans la notation $\mathrm{F}\binom{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \mathfrak{V}.\mathrm{F}(\mathrm{A} - \mathrm{B})$, nous pouvons, sans altérer la valeur, ajouter un vecteur quelconque aux deux vecteurs entre parenthèses. En faisant permuter ces deux vecteurs, nous changeons le signe. Le vecteur inférieur étant réduit à zéro, nous pouvons aussi faire permuter F avec le vecteur supérieur, et il en résulte encore un simple changement de signe. Ainsi

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{F}\binom{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} &= \mathrm{F}\binom{\mathrm{A}+\mathrm{C}}{\mathrm{B}+\mathrm{C}} = \mathrm{F}\binom{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{\mathrm{O}} = -\mathrm{F}\binom{\mathrm{B}}{\mathrm{A}} = -\mathrm{F}\binom{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{O}} \\ &= -(\mathrm{A}-\mathrm{B})\binom{\mathrm{F}}{\mathrm{O}} = (\mathrm{B}-\mathrm{A})\binom{\mathrm{F}}{\mathrm{O}} = -\mathrm{F}\binom{-\mathrm{A}}{-\mathrm{B}} \\ &= -\mathrm{F}\binom{\mathrm{A}}{2\mathrm{A}-\mathrm{B}} = -\mathrm{F}\binom{2\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \cdots \end{aligned}\right.$$

Toutes ces transformations, et celles qu'on pourrait encore déduire de là, sont d'une interprétation très-facile.

Le moment d'une force $\mathrm{F_A}$ *par rapport à un axe* z *passant par l'ori-*

gine a pour expression $-\mathfrak{S}(\text{z}.\mathfrak{V}\text{FA}) = -\mathfrak{S}.\text{ZFA} = -\mathfrak{S}.\text{FAZ}$, si nous prenons pour z un vecteur unitaire. Si deux quelconques des trois éléments F, A, Z deviennent parallèles, le moment devient nul. Il en est de même si z est dirigé, en général, dans le plan passant par l'origine et la force.

Centres de gravité.

21. Si $\text{F}' = f'\text{F}$, $\text{F}'' = f''\text{F}$, ... sont des forces parallèles appliquées respectivement en des points A', A'', ..., F étant un vecteur unitaire, leur résultante sera une force $\text{R} = \Sigma f.\text{F}$, appliquée en un certain point G, lequel n'est autre que le *centre des forces parallèles* considérées, ou, en d'autres termes, le *centre de gravité* des points A', A'', ... de poids f', f'', ...

Pour déterminer le centre de gravité, prenons les moments de toutes ces forces par rapport à un axe quelconque z passant par l'origine. Le moment de la résultante étant égal à la somme des moments des composantes, nous aurons, d'après ce qui vient d'être dit,

$$\mathfrak{S}.\text{RGZ} = \Sigma\mathfrak{S}.\text{FAZ}$$

ou

$$\mathfrak{S}.(\Sigma f.\text{F}.\text{GZ}) = \mathfrak{S}.(\text{F}.\Sigma f\text{A}.\text{Z}).$$

De là, cette relation devant subsister quel que soit z, nous pouvons y satisfaire en écrivant

$$\Sigma f.\text{G} = \Sigma f\text{A},$$

ou

(5) $$\text{G} = \frac{\Sigma f\text{A}}{\Sigma f}.$$

Cette valeur de G est indépendante de F. Il est bien clair, en effet, qu'on n'altérerait pas la relation ci-dessus en $\mathfrak{S}$, en ajoutant à G un vecteur quelconque parallèle à F. Mais, en nous imposant la condition que le point G soit indépendant de la direction de F, nous avons nécessairement la formule (5).

22. Le centre de gravité d'un corps solide (supposé continu), de poids P, de volume v et de densité p au point A, sera donné par

$$(6) \qquad \mathrm{C} = \frac{\Sigma(p\,.\,dv\,.\,\mathrm{A})}{\mathrm{P}},$$

le signe Σ étant une certaine intégrale qui s'étend jusqu'aux limites du corps. Si celui-ci est homogène,

$$(7) \qquad \mathrm{C} = \frac{\Sigma(dv\,.\,\mathrm{A})}{v}.$$

Ces formules sont également applicables aux surfaces et aux lignes, en supposant que v représente alors une aire ou une longueur.

23. La formule (5) nous permet d'établir une propriété assez importante du centre de gravité. Si, pour chaque point A d'un système, on fait le produit du poids (ou de la masse) par le carré de la distance à un point fixe C, on a

$$\begin{aligned} -f(\mathrm{A}-\mathrm{C})^2 &= -f\mathrm{A}^2 - f\mathrm{C}^2 + 2f\,\mathfrak{S}\mathrm{AC} \\ &= -f\mathrm{A}^2 + \mathfrak{S}.(2f\mathrm{A} - f\mathrm{C})\mathrm{C}. \end{aligned}$$

Si nous faisons, pour tout le système considéré, la somme de ces *moments d'inertie polaire*, nous avons

$$-\Sigma f\mathrm{A}^2 + \mathfrak{S}.(2\Sigma f\mathrm{A} - \Sigma f.\mathrm{C})\mathrm{C}.$$

Cherchons le minimum de ce moment total d'inertie polaire. Pour cela, donnons à C un accroissement dC, et prenons la différentielle. Nous aurons

$$(8) \qquad 2\,\mathfrak{S}.(\Sigma f\mathrm{A} - \Sigma f.\mathrm{C})\,d\mathrm{C},$$

et, si elle se réduit à zéro quel que soit dC, il vient

$$\mathrm{C} = \frac{\Sigma f\mathrm{A}}{\Sigma f}.$$

Ce point c est celui pour lequel a lieu le minimum. La comparaison avec la formule (5) nous montre que $c = G$, si bien que le centre de gravité d'un corps est le point pour lequel le moment d'inertie polaire est minimum.

L'expression différentielle (8) peut encore s'écrire

$$2\Sigma f. \mathfrak{S}. (G - c)\, dc,$$

et, comme elle s'annule pour tout déplacement dc perpendiculaire à $G - c$, il en résulte que *le moment d'inertie polaire total est le même pour tous les points d'une sphère quelconque* ayant son centre au centre de gravité.

24. Pour éviter des développements trop étendus, je n'ai point l'intention d'étudier ici les nombreuses propriétés des centres de gravité. J'en ai indiqué quelques-unes dans une addition à ma traduction de la *Méthode des équipollences*, de M. Bellavitis, et il est à remarquer que les conclusions trouvées à ce sujet dans le plan s'étendent immédiatement à l'espace, puisque les vecteurs ne sont ici combinés que par voie d'addition. Ces diverses propriétés ne sont du reste que des conséquences élémentaires de la formule (5).

Mais, comme exemple très-simple de l'utilité de cette formule, nous allons traiter un seul cas, celui du centre de gravité d'un arc d'hélice homogène.

Soient r le rayon du cylindre, k le pas de l'hélice. Prenons trois axes rectangulaires, dirigés, l'un suivant le rayon du cylindre aboutissant à l'origine de l'arc donné, le second perpendiculairement au précédent et à l'axe du cylindre, le troisième suivant l'axe du cylindre ; et soient respectivement I_1, I_2, I_3 des vecteurs unitaires suivant ces axes.

L'hélice est représentée par l'équation

$$x = r\cos t . I_1 + r \sin t . I_2 + \frac{k}{4} t I_3 ;$$

de là

$$dx = \left(- r \sin t . I_1 + r \cos t . I_2 + \frac{k}{4} I_3\right) dt,$$

$$\mathfrak{T} dx = ds = dt \sqrt{r^2 + \frac{k^2}{16}}.$$

Pour appliquer la formule (5), il faut y remplacer A par X, f par ds, et alors

$$\mathrm{G} = \frac{\int_0^t \sqrt{r^2+\frac{k^2}{16}}\left(r\cos t . \mathrm{I}_1 + r\sin t . \mathrm{I}_2 + \frac{k}{4} t \mathrm{I}_3\right) dt}{\int_0^t \sqrt{r^2+\frac{k^2}{16}} . dt},$$

(9) $$\mathrm{G} = \frac{r\sin t}{t}\mathrm{I}_1 + \frac{r(1-\cos t)}{t}\mathrm{I}_2 + \frac{kt}{8}\mathrm{I}_3.$$

Les trois coordonnées de ce centre de gravité sont donc

$$\frac{r\sin t}{t}, \quad \frac{r(1-\cos t)}{t}, \quad \frac{kt}{8},$$

pour le système d'axes considéré; c'est-à-dire que, si nous appelons x_1, x_2, x_3 les coordonnées de l'extrémité de l'arc l'hélice donné, $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3$ celles du centre de gravité de cet arc, nous avons

(10) $$\overline{x}_1 = \frac{kx_2}{4x_3}, \quad \overline{x}_2 = \frac{k(r-x_1)}{4x_3}, \quad \overline{x}_3 = \frac{x_3}{2}.$$

Si la courbe, au lieu d'être homogène, a une densité proportionnelle à la longueur de l'arc depuis l'origine, nous devrons remplacer ds par $ptds$ dans les formules ci-dessus, p étant constant, ce qui donnera, à la place de la formule (9),

$$\mathrm{G}' = 2r\left(\frac{\cos t - 1}{t^2} + \frac{\sin t}{t}\right)\mathrm{I}_1 + 2r\left(\frac{\sin t}{t^2} - \frac{\cos t}{t}\right)\mathrm{I}_2 + \frac{kt}{6}\mathrm{I}_3.$$

et à la place des formules (10)

$$\overline{x}'_1 = \frac{k}{2x_3}\left[\frac{k(x_1-r)}{4x_3} + x_2\right], \quad \overline{x}'_2 = \frac{k}{2x_3}\left(\frac{kx_2}{4x_3} - x_1\right), \quad \overline{x}'_3 = \frac{2}{3}x_3.$$

Équilibre d'un corps solide. — Composition générale des forces.

25. Désignons, comme au n° 20, par $\mathrm{F_A}$ une force F appliquée en A, et considérons un système de forces $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \mathrm{F}_3, \ldots$ respectivement

appliquées sur un corps solide en $A_1, A_2, A_3, \ldots$. La condition d'équilibre du système considéré peut évidemment s'écrire sous la forme

$$\Sigma F_A = 0, \tag{11}$$

ou, en vertu de l'équation (1),

$$\Sigma F_0 + [\Sigma \mathfrak{V}.FA] = 0. \tag{12}$$

Nous rappelant l'irréductibilité des forces avec les couples, et supprimant, pour simplifier, l'indice zéro des forces appliquées à l'origine, nous voyons que cette condition se décompose dans les deux suivantes :

$$\Sigma F = 0, \tag{13}$$

$$\Sigma \mathfrak{V} FA = 0. \tag{14}$$

Maintenant, x étant un vecteur arbitraire, la relation (13) nous donne $\mathfrak{V}.x\Sigma F = 0$, et par conséquent

$$\mathfrak{V}.x\Sigma F = \Sigma.\mathfrak{V} AF, \tag{15}$$

ou

$$\Sigma \mathfrak{V}.F(A - x) = 0, \tag{16}$$

et réciproquement, si cette relation a lieu *quel que soit* x, on en déduit (13) et (14).

Donc la condition (16) est équivalente à (12) ou (11), et exprime à elle seule l'équilibre du système.

Il est facile, du reste, d'interpréter ces diverses formules séparément. Ainsi (13) signifie que la *somme* (ou *résultante*) de toutes les forces transportées à l'origine est nulle ; (14), que le *couple résultant* produit par le transport des forces à l'origine est nul ; (12), que ces deux conditions sont à la fois réalisées ; (15) ou (16), que le *couple résultant*, produit par le transport des forces *en un point quelconque* x, est nul. Cette dernière condition est donc nécessaire et suffisante pour que l'équilibre ait lieu.

26. Supposons que la condition suivante soit remplie :

$$(17) \qquad \mathfrak{S}(\Sigma \mathrm{F} . \Sigma \mathfrak{V} . \mathrm{FA}) = 0,$$

sans que $\Sigma \mathrm{F}$ s'annule.

Alors (15) ou (16) représente une droite en prenant x comme vecteur variable, et le système des forces considérées a une résultante unique $\Sigma \mathrm{F} = \mathrm{R}$, appliquée en un point quelconque x de cette droite ; car

$$\mathrm{R}_{\mathrm{x}} = \mathrm{R}_0 + [\mathfrak{V}.\mathrm{RX}] = \Sigma \mathrm{F}_0 + [\Sigma . \mathfrak{V} . \mathrm{FA}] = \Sigma . \mathrm{F}_{\mathrm{A}},$$

en vertu de (15).

La condition (17) exprime que la direction de la résultante est située dans le plan du couple résultant.

Si la relation (13) est satisfaite, mais que (14) ne le soit pas, le système des forces se réduit au contraire à un couple exprimé par $[\Sigma \mathfrak{V} . \mathrm{FA}]$, quelle que soit du reste la position de l'origine.

Tout à l'heure le système tendait à produire une *translation*, et dans le dernier cas, il tend à produire une *rotation*.

Si maintenant ni l'une ni l'autre des équations (13) et (14) n'est satisfaite, nous pouvons chercher à déterminer le point x, de telle sorte que la force résultante soit perpendiculaire au plan du couple résultant, produit par le transport au point x. Cela nous donnera la condition

$$\mathfrak{V}[\Sigma \mathrm{F} . \Sigma \mathfrak{V} . \mathrm{F}(\mathrm{A} - \mathrm{X})] = 0,$$

ou

$$(18) \qquad \mathfrak{V} \frac{\Sigma \mathfrak{V} . \mathrm{F}(\mathrm{A} - \mathrm{X})}{\Sigma \mathrm{F}} = 0.$$

Cette équation, en prenant x comme variable, représente une droite autour de laquelle les forces tendent à faire tourner le solide, et suivant laquelle elles tendent à le transporter. En d'autres termes, c'est l'axe du *mouvement de vis* que tendent à produire les forces en question. Nous l'appellerons *axe central* du système.

On arrive encore à déterminer cet axe par la condition que $\mathfrak{T}[\Sigma \mathfrak{V} . \mathrm{F}(\mathrm{A} - \mathrm{X})]$ soit un minimum, ce qui fournit une nouvelle propriété d'un énoncé facile. Dans ce but, posons pour un instant $\Sigma \mathrm{F} = \mathrm{R}$, comme plus haut, et aussi $\Sigma\mathfrak{V}.\text{FA} = \text{C}$. L'expression à rendre minimum est $\mathfrak{T}(\text{C} - \mathfrak{V}\text{RX}) = \mathfrak{T}(\text{C} - \text{Y})$, si nous écrivons $\mathfrak{V}\text{RX} = \text{Y}$. Élevant au carré,

$$-\mathfrak{T}^2(\text{C} - \text{Y}) = \text{C}^2 + \text{Y}^2 - \text{CY} - \text{YC},$$

et formant la dérivée, à un facteur réel près, nous avons

$$\begin{aligned}
&\text{Y}d\text{Y} + d\text{Y}.\text{Y} - \text{C}d\text{Y} - d\text{YC}\\
&\quad = (\text{Y} - \text{C})d\text{Y} + d\text{Y}(\text{Y} - \text{C}) = 2\mathfrak{S}.(\text{Y} - \text{C})d\text{Y}\\
&\qquad\qquad = 2\mathfrak{S}.(\mathfrak{V}.\Sigma\text{FX} - \Sigma\mathfrak{V}\text{FA})\Sigma\text{F}d\text{X}\\
&\qquad\qquad = -2\mathfrak{S}.d\text{X}\mathfrak{V}[\Sigma\text{F}.\Sigma\mathfrak{V}.\text{F}(\text{X} - \text{A})].
\end{aligned}$$

Si nous égalons cette dérivée à zéro, *quel que soit* $d\text{X}$, nous trouvons immédiatement la relation (18) pour le cas du minimum.

Cela serait facile à démontrer aussi géométriquement.

27. Avec les notations que nous venons d'employer, l'équation (18) de l'axe peut s'écrire

$$(19)\qquad \mathfrak{V}\left(\frac{\mathfrak{V}\text{RX}}{\text{R}}\right) = \mathfrak{V}\frac{\text{C}}{\text{R}} \quad\text{ou}\quad \frac{\mathfrak{V}\text{RX}}{\text{R}} = \mathfrak{V}\frac{\text{C}}{\text{R}}.$$

Si nous prenons le vecteur X abaissé perpendiculairement de l'origine sur cette droite, nous voyons qu'il s'exprime par $\mathfrak{V}\frac{\text{C}}{\text{R}}$, car alors $\mathfrak{V}\text{RX} = \text{RX}$.

D'autre part, la valeur du *moment central*, c'est-à-dire du moment par rapport à l'axe central est $\mathfrak{T}(\text{C} - \mathfrak{V}\text{RX})$, X représentant l'un quelconque des points de l'axe central, et si nous divisons la grandeur de ce moment par celle de la résultante R, nous avons

$$\mathfrak{T}\left(\frac{\text{C}}{\text{R}} - \frac{\mathfrak{V}\text{RX}}{\text{R}}\right) = \mathfrak{T}\left(\frac{\text{C}}{\text{R}} - \mathfrak{V}\frac{\text{C}}{\text{R}}\right) = \mathfrak{T}\mathfrak{S}\frac{\text{C}}{\text{R}} = \mathfrak{S}\frac{\text{C}}{\text{R}}.$$

Il suit de là que, si nous posons $\frac{\text{C}}{\text{R}} = Q = Q_0 + Q_i$, un quaternion, les deux éléments Q_0 et Q_i s'interprètent comme nous venons de le dire. Le quaternion Q peut encore s'écrire $\frac{\Sigma\mathfrak{V}.\text{FA}}{\Sigma\text{F}}$, et par suite se forme immédiatement avec les données ; et nous voyons que, si sa partie réelle s'annule, le système peut se composer en une résultante unique. Si, au contraire, c'est son vecteur qui est égal à zéro, alors l'axe central du système passe par l'origine.

Prenons maintenant un nouveau quaternion auxiliaire

$$S = S_0 + S_i = \frac{\Sigma.\text{FA}}{\Sigma\text{F}} = Q + \frac{\Sigma\mathfrak{S}.\text{FA}}{\Sigma\text{F}}. \tag{20}$$

Alors

$$Q_0 = S_0 = j, \tag{21}$$

et l'expression $j\,\Sigma\,\text{F}$ ou $j\,\text{R}$ représente l'axe du couple central en grandeur et en direction.

De plus,

$$S_i = Q_i + \frac{\Sigma\mathfrak{S}.\text{FA}}{\Sigma\text{F}} = \text{K} \tag{22}$$

est le vecteur d'un point K situé sur l'axe central, et dont la position sur cet axe est complétement indépendante du choix de l'origine.

28. Ces formules nous conduisent immédiatement aux transformations suivantes :

$$\Sigma\text{FA} = \Sigma\text{F}.(j + \text{K}) = \text{R}(j + \text{K}), \tag{23}$$

$$\mathfrak{T}\Sigma\text{FA} = \mathfrak{T}\Sigma\text{F}.\sqrt{j^2 - \text{K}^2} = \mathfrak{T}\text{R}.\sqrt{j^2 - \text{K}^2}, \tag{24}$$

$$\Sigma\mathfrak{V}\text{FA} = j\Sigma\text{F} + \mathfrak{V}(\Sigma\text{F}.\text{K}), \quad \text{ou} \quad \text{C} = j\text{R} + \mathfrak{V}.\text{RK}, \tag{25}$$

$$(\Sigma\mathfrak{V}.\text{FA})^2 = j^2(\Sigma\text{F})^2 + [\mathfrak{V}(\Sigma\text{F}.\text{K})]^2, \quad \text{ou} \quad \text{C}^2 = j^2\text{R}^2 + (\mathfrak{V}.\text{RK})^2. \tag{26}$$

La formule (25) nous montre que le couple résultant du transport de toutes les forces en un même point O varie généralement *en direction* et *en grandeur* avec la position de ce point ; tandis que, d'après (26), nous voyons que la *grandeur* du moment de ce couple est la même pour tous les points d'une surface cylindrique de révolution ayant pour axe l'axe central.

En appelant *moment complet* d'une force F_A par rapport à l'origine le quaternion FA, le premier membre de (23), $\Sigma\,\text{FA}$, nous représentera le moment complet du système tout entier ; et, d'après (24), la *grandeur* de ce moment complet reste constante lorsque l'origine se déplace sur une surface sphérique ayant pour centre le point K. Si l'origine est prise au point K lui-même, cette grandeur devient alors égale à celle du moment central.

Nous désignerons ce point K sous le nom de *centre du système*.

On a déjà remarqué sans doute l'analogie entre la formule (20) qui fournit le point K, et la formule (5) donnant le centre G d'un système des forces parallèles. Le point K coïncide en effet avec G si les forces que nous étudions ici deviennent toutes parallèles entre elles ; et ce centre, comme on l'a déjà vu du reste, est indépendant de la direction de ces forces, si bien que lorsqu'elles tournent respectivement autour de leurs points d'application sans changer de grandeur et en restant parallèles, leur résultante unique, considérée comme appliquée en G, tourne également autour de ce point.

29. Supposons maintenant les forces F, non plus parallèles entre elles, mais parallèles à un même plan. Si nous les faisons tourner respectivement d'un même angle et dans le même sens, autour d'axes perpendiculaires à ce plan, sans changer leurs points d'application, chaque force F se transformera en $L\text{F}$, L étant un certain quaternion unitaire ayant pour axe la direction des axes de rotation. Le nouveau centre des forces sera donc fourni par l'expression

$$(27)\qquad \frac{\Sigma.L\text{FA}}{\Sigma.L\text{F}} = \frac{L\Sigma\text{FA}}{L\Sigma\text{F}} = \frac{\Sigma\text{FA}}{\Sigma\text{F}} = j + \text{K}.$$

Ainsi, lorsque les forces tournent comme nous venons de le dire, le centre des forces n'éprouve aucune variation, non plus que le moment central.

Si toutes les forces sont dans un même plan, alors, en prenant l'origine dans ce plan, tous les vecteurs F et A sont coplanaires, et l'on voit sans peine que le point K est situé dans le même plan.

Ce point K, dans ce cas particulier, est le même que celui qu'on détermine pour un tel système de forces dans la méthode des équipollences (*voir*, par exemple, *Exposition de la méthode des équipol-*

lences, par M. Bellavitis, n° 120) ; mais l'algorithme des équipollences n'étant pas le même que celui des quaternions, la formule qui fournit ce point n'a plus la même forme. Ainsi, en continuant de représenter les vecteurs par les mêmes lettres, mais employant par ailleurs les notations de M. Bellavitis, le point K serait donné par la relation

$$\mathrm{K} = \frac{\Sigma.(\mathrm{cj\,F.A})}{\Sigma\,\mathrm{cj\,F}}.$$

Dans les équipollences, en effet, toutes les expressions qu'on obtient, et en particulier le numérateur du second membre de l'équation qui précède, représentent des vecteurs coplanaires; en outre, la multiplication est toujours commutative, et les règles de calcul sont essentiellement différentes. Si l'on se rappelle que dans la méthode dont nous parlons tout vecteur s'exprime par une quantité imaginaire ordinaire de la forme $x + yi$, on voit qu'en posant $\mathrm{F} = a + bi$, la formule que nous venons de rappeler revient à $\mathrm{K} = \frac{\Sigma.(a - bi)\mathrm{A}}{\Sigma.(a - bi)}$, et si on la rapproche de celle qui donne le centre de gravité ordinaire, aussi bien dans le calcul des équipollences que dans celui des quaternions, on peut dire que le point K est le *centre de gravité d'un certain nombre de points situés dans un même plan et affectés de masses imaginaires.*

Cette digression relative aux équipollences nous a semblé utile en ce qu'elle montre que les résultats que nous avons obtenus par les quaternions constituent une généralisation de ceux-ci; de sorte qu'un langage qui paraît tout d'abord exclusivement symbolique prend au contraire une signification *réelle* et *physique* très-nette, par le secours des nouvelles méthodes; et qu'il s'étend même parfois (comme nous venons de le voir en passant des équipollences aux quaternions) sans rien perdre de sa réalité.

50. La transformation de F en LF, que nous avons effectuée au commencement du numéro précédent, est applicable au cas d'un système quelconque; mais elle n'a plus d'intérêt comme application, parce que les vecteurs se transforment en quaternions, de sorte que toute interprétation devient impossible.

Cherchons, au lieu de cela, à faire tourner chaque force autour d'un axe de direction L donnée, l'amplitude 2λ de la rotation étant la même; F alors deviendra $\mathrm{L}^{-\lambda}\mathrm{F}\mathrm{L}^{\lambda}$; et, pour trouver ce que devient le quaternion $\frac{\Sigma \mathrm{FA}}{\Sigma \mathrm{F}}$, nous l'écrirons sous la forme

$$\frac{1}{(\Sigma \mathrm{F})^2}\Sigma \mathrm{F}.\Sigma \mathrm{FA}.$$

Effectuant la substitution indiquée, nous avons

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{(\Sigma \mathrm{F})^2}\mathrm{L}^{-\lambda}\Sigma \mathrm{F}\,\Sigma \mathrm{FL}^{\lambda}\mathrm{A} &= \frac{1}{(\Sigma \mathrm{F})^2}\mathrm{L}^{-\lambda}\Sigma \mathrm{F}\,(\Sigma \mathrm{FAL}^{\lambda} - 2\sin\lambda\,\Sigma\,\mathrm{F}\,\mathfrak{V}\,\mathrm{AL})\\ &= \mathrm{L}^{-\lambda}\frac{\Sigma \mathrm{FA}}{\Sigma \mathrm{F}}\mathrm{L}^{\lambda} - 2\sin\lambda\,\mathrm{L}^{-\lambda}\frac{\Sigma\,\mathrm{F}\,\mathfrak{V}\,\mathrm{AL}}{\Sigma \mathrm{F}}.\end{aligned}\right.$$

Si nous supposons le cas particulier où tous les points d'application sont situés sur une même droite passant par l'origine, et si nous prenons cette droite pour axe de rotation L, nous voyons que $\mathfrak{V}\,\mathrm{AL}$ s'évanouit; alors le terme $\frac{\Sigma \mathrm{FA}}{\Sigma \mathrm{F}}$ n'a fait que subir une rotation pareille à celle des forces, de telle sorte que le centre des forces a tourné lui aussi du même angle autour de l'axe L, et que le moment central n'a subi aucune altération.

Au contraire, si tous les points A sont coplanaires avec l'origine, et qu'on prenne des axes normaux à leur plan, on trouve que la rotation des forces a pour effet de transformer $\frac{\Sigma \mathrm{FA}}{\Sigma \mathrm{F}}$ en $\mathrm{L}^{-\lambda}\frac{\Sigma \mathrm{FA}}{\Sigma \mathrm{F}}\mathrm{L}^{-\lambda}$.

31. Des développements qui précèdent on peut déduire une autre forme de l'équation générale de l'équilibre précédemment établie (nº **25**). Il suffit d'égaler le moment complet $\Sigma \mathrm{FA}$ à une quantité réelle constante m, indépendante de l'origine. En effet, l'équation

$$(29)\qquad \Sigma \mathrm{FA} = m$$

équivaut (nº **28**) à

$$j\mathrm{R} + \mathrm{RK} = m \quad \text{ou} \quad j\mathrm{R} + \mathfrak{V}\,\mathrm{RK} = 0,$$

c'est-à-dire $\mathrm{C} = 0$, quelle que soit l'origine; ce qui est une condition nécessaire et suffisante de l'équilibre, comme nous l'avons déjà dit.

Hamilton propose d'appeler la constante m *tension totale* du système.

32. Un système quelconque de forces étant donné, proposons-nous de trouver deux forces X, Y, qui, appliquées en M, N, soient équivalentes au système primitif.

Nous avons

$$\mathrm{X}_{\mathrm{M}} = \mathrm{X}_0 + \mathrm{X}_{\mathrm{M}} - \mathrm{X}_0 = \mathrm{X}_0 + \mathrm{X}\binom{\mathrm{M}}{\mathrm{O}},$$

$$\mathrm{Y}_{\mathrm{N}} = \mathrm{Y}_0 + \mathrm{Y}_{\mathrm{N}} - \mathrm{Y}_0 = \mathrm{Y}_0 + \mathrm{Y}\binom{\mathrm{N}}{\mathrm{O}}.$$

Les équations à résoudre sont donc

$$\text{(30)} \qquad \mathrm{X} + \mathrm{Y} = \mathrm{R}, \quad \mathfrak{V}\,\mathrm{X}\,\mathrm{M} + \mathfrak{V}\,\mathrm{Y}\mathrm{N} = \mathrm{C},$$

d'où

$$\mathfrak{V}.\mathrm{X}\mathrm{M} + \mathfrak{V}.(\mathrm{R} - \mathrm{X})\,\mathrm{N} = \mathrm{C},$$

$$\mathfrak{V}.\mathrm{X}(\mathrm{M} - \mathrm{N}) = \mathrm{C} - \mathfrak{V}\,\mathrm{R}\mathrm{N},$$

$$\mathrm{X} = (\mathrm{C} - \mathfrak{V}\,\mathrm{R}\mathrm{N})\,\frac{1}{\mathrm{M} - \mathrm{N}} + x(\mathrm{M} - \mathrm{N}).$$

On trouverait une valeur analogue pour Y. Comme X, Y doivent être des vecteurs, la condition de possibilité du problème est

$$\mathfrak{S}.(\mathrm{C} - \mathfrak{V}\,\mathrm{R}\mathrm{N})\,\frac{1}{\mathrm{M} - \mathrm{N}} = 0.$$

Du reste, cette condition étant remplie, les termes en x et y peuvent être omis, comme exprimant des forces opposées agissant le long de la même droite $\mathrm{M} - \mathrm{N}$.

33. Il est possible d'établir enfin sous une nouvelle forme l'équation d'équilibre d'un corps solide, en employant le principe du travail virtuel. En effet, A étant toujours le point d'application de la force F, et $\delta\mathrm{A}$ représentant le déplacement du point d'application, nous voyons sans peine que le travail correspondant de la force F est représenté par $-\mathfrak{S}.\mathrm{F}\,\delta\mathrm{A}$, de sorte que l'équation cherchée est

$$\text{(31)} \qquad \Sigma\,\mathfrak{S}.\mathrm{F}\,\delta\mathrm{A} = 0.$$

Il est facile de reconnaître que cette équation résume les formules (13) et (14) ci-dessus; car le déplacement le plus général d'un corps solide équivaut à une translation et une rotation; la translation peut se représenter par E, et la rotation [nº 15, formule (53)], par $\mathfrak{V}.\mathrm{AT}$, E et T étant des vecteurs infiniment petits, puisqu'il s'agit d'un déplacement élémentaire. Ainsi $\delta\mathrm{A} = \mathrm{E} + \mathfrak{V}\mathrm{AT}$, et

$$\mathfrak{S}.\mathrm{F}\delta\mathrm{A} = \mathfrak{S}.\mathrm{FE} + \mathfrak{S}.\mathrm{F}\mathfrak{V}\mathrm{AT} = \mathfrak{S}.\mathrm{FE} + \mathfrak{S}.\mathrm{T}\mathfrak{V}\mathrm{FA},$$

$$\Sigma\mathfrak{S}.\mathrm{F}\delta\mathrm{A} = \mathfrak{S}.(\Sigma\mathrm{F}.\mathrm{E}) + \mathfrak{S}.\mathrm{T}\Sigma\mathfrak{V}\mathrm{FA},$$

d'où

$$\Sigma\mathrm{F} = 0, \quad \text{et} \quad \Sigma\mathfrak{V}\mathrm{FA} = 0.$$

Moments d'inertie.

34. Le moment d'inertie d'un système matériel par rapport à un axe est fourni par la somme des produits obtenus en multipliant la masse de chaque point matériel du système par le carré de sa distance à l'axe considéré.

Prenons l'origine A sur cet axe, et soient X un vecteur dirigé suivant l'axe en question, et M le vecteur aboutissant au point M du système, point dont la masse est m. Le moment d'inertie sera

$$\Sigma.m\mathfrak{T}(\mathfrak{V}.\mathrm{M}\,\mathfrak{U}\mathrm{X})^2,$$

ou

$$\mathrm{X}^{-2}\Sigma.m(\mathfrak{V}.\mathrm{MX})^2. \tag{32}$$

En posant

$$\square\mathrm{X} = \Sigma.m\mathrm{M}\mathfrak{V}.\mathrm{MX} = \mathrm{X}\Sigma m\mathrm{M}^2 - \Sigma.m\mathrm{M}\mathfrak{S}\mathrm{MX}, \tag{33}$$

$\square\mathrm{X}$ sera une fonction vectorielle, linéaire et conjuguée à elle-même, et le moment d'inertie pourra encore être mis sous la forme

$$-\mathfrak{S}.\mathrm{X}^{-1}\square\mathrm{X}. \tag{34}$$

35. Jusqu'à présent, le module de x est absolument arbitraire; si nous le prenons maintenant égal à l'inverse de la racine carrée du moment d'inertie, il est visible que nous aurons

$$\mathfrak{S}.\mathrm{x}\square\mathrm{x} = 1 \tag{35}$$

pour équation du lieu des extrémités des vecteurs x. On reconnaît immédiatement sous cette forme l'ellipsoïde d'inertie.

Cet ellipsoïde a pour centre l'origine A. Cherchons maintenant le moment d'inertie du même système par rapport à un axe parallèle à x, mais passant par un autre point donné B; soit B le vecteur AB. Le moment cherché s'obtiendra en remplaçant M par M — B dans l'expression (32) ci-dessus. Ce sera donc

$$\begin{aligned}\mathrm{x}^{-2}m[\mathfrak{V}.\mathrm{x}(\mathrm{M}-\mathrm{B})]^2 = \mathrm{x}^{-2}\Sigma m(\mathfrak{V}\mathrm{x}\,\mathrm{M})^2 &+ \mathrm{x}^{-2}\Sigma m(\mathfrak{V}\mathrm{x}\,\mathrm{B})^2 \\ &- 2\mathrm{x}^{-2}\Sigma m\mathfrak{S}.(\mathfrak{V}\mathrm{xM}.\mathfrak{V}\mathrm{xB}),\end{aligned} \tag{36}$$

ce qui donne, en appelant a le moment d'inertie par rapport à l'axe passant par le point A; b le moment d'inertie par rapport à l'axe passant par le point B; $\mathfrak{M}$ la masse totale Σm du système; G le centre de gravité; G le vecteur $\mathrm{AG} = \frac{\Sigma m\mathrm{M}}{\mathfrak{M}}$; et p la distance $\mathfrak{T}(\mathfrak{V}.\mathrm{B}\mathfrak{U}\mathrm{x})$ du point B à l'axe x passant par A,

$$b = a + p^2\mathfrak{M} + 2\mathfrak{M}\mathfrak{S}(\mathrm{Bx}^{-1}\mathfrak{V}\mathrm{xG}). \tag{37}$$

Si l'axe x issu du point A passe par le centre de gravité, nous avons $\mathfrak{V}\mathrm{xG} = 0$, et, par conséquent,

$$b = a + p^2\mathfrak{M}, \tag{38}$$

résultat bien connu et auquel nous ne nous arrêterons pas.

36. Il résulte de ce qui précède et de la théorie d'Hamilton sur l'inversion de la fonction linéaire et vectorielle □, que les valeurs des trois moments d'inertie principaux a_1, a_2, a_3 en un point quelconque sont données par l'équation du troisième degré

$$a^3 - 2n^2a^2 + (n^4 + n'^2)a - (n^2n'^2 - n''^2) = 0, \tag{39}$$

n^2, n'^2, n''^2 étant trois quantités réelles positives, savoir :

$$n^2 = -\Sigma m \mathrm{M}^2, \quad n'^2 = -\Sigma mm'(\mathfrak{V}\mathrm{MM}')^2, \quad n''^2 = -\Sigma mm'm''(\mathfrak{S}\mathrm{MM}'\mathrm{M}'')^2.$$

Le produit $a_1 a_2 a_3$ de ces trois moments peut s'exprimer ainsi

$$\begin{aligned} a_1 a_2 a_3 &= n^2 n'^2 - n''^2 + \Sigma mm'm''(\mathfrak{S}\mathrm{MM}'\mathrm{M}'')^2 \\ &= \Sigma m^2 m' \mathrm{M}^2 (\mathfrak{V}\mathrm{MM}')^2 + \Sigma mm'm''\mathrm{M}^2(\mathfrak{V}\mathrm{M}'\mathrm{M}'')^2. \end{aligned}$$

De plus, la fonction $\square$ satisfait à l'équation symbolique du troisième degré

$$(40) \qquad (\square + a_1)(\square + a_2)(\square + a_3) = 0, \quad \text{ou} \quad \varphi(\square) = 0,$$

et les directions des axes principaux d'inertie sont données par

$$(41) \qquad \mathrm{A}_1 = \frac{\varphi(\square)}{\square + a_1}\mathrm{x}, \quad \mathrm{A}_2 = \frac{\varphi(\square)}{\square + a_2}\mathrm{x}, \quad \mathrm{A}_3 = \frac{\varphi(\square)}{\square + a_3}\mathrm{x},$$

x étant un vecteur quelconque.

57. Si nous prenons le module de chaque vecteur x, égal, non plus à l'inverse de la racine carrée du moment d'inertie, mais simplement à l'inverse du rayon de gyration, l'ellipsoïde d'inertie reste alors semblable à ce qu'il était, mais son équation (35) prend la forme

$$(42) \qquad \mathfrak{S}\mathrm{x}\square\mathrm{x} = \mathfrak{M},$$

Cela posé, cherchons à voir comment on passe de l'ellipsoïde relatif au centre de gravité (ellipsoïde central) à l'ellipsoïde relatif à un point A quelconque. Si nous désignons par A le vecteur de ce point rapporté au centre de gravité, et si l'équation particulière de l'ellipsoïde central est

$$(43) \qquad \mathfrak{S}.\mathrm{x}\square_0\mathrm{x} = \mathfrak{M},$$

nous aurons alors, en vertu de la formule (38),

$$
\begin{aligned}
-\mathfrak{S}\mathrm{x}^{-1}\square\mathrm{x} &= -\mathfrak{S}.\mathrm{x}^{-1}\square_0\mathrm{x} + \mathcal{M}(\mathfrak{T}\mathfrak{V}.\mathrm{A}\mathfrak{U}\mathrm{x})^2 \\
&= -\mathfrak{S}.\mathrm{x}^{-1}\square_0\mathrm{x} - \mathcal{M}\mathfrak{S}.\mathrm{x}^{-1}.\mathrm{A}\mathfrak{V}\mathrm{A}\mathrm{x},
\end{aligned}
$$

de sorte que nous pouvons écrire

$$
(44) \qquad \square\mathrm{x} = \square_0\mathrm{x} + \mathcal{M}\mathrm{A}\mathfrak{V}\mathrm{A}\mathrm{x} = \square_0\mathrm{x} + \mathcal{M}\mathrm{A}^2\mathrm{x} - \mathcal{M}\mathrm{A}\mathfrak{S}\mathrm{A}\mathrm{x}.
$$

Supposons maintenant qu'on cherche à déterminer l'un quelconque des axes principaux en A. Si x_1 est cet axe principal, nous aurons, pour cette valeur spéciale x_1,

$$
\square\mathrm{x}_1 = k\mathrm{x}_1,
$$

c'est-à-dire, en vertu de la relation (44),

$$
(45) \qquad (\square_0 - k + \mathcal{M}\mathrm{A}^2)\mathrm{x}_1 = \mathcal{M}\mathrm{A}\mathfrak{S}\mathrm{A}\mathrm{x}_1.
$$

Opérant par $(\square_0 - k + \mathcal{M}\mathrm{A}^2)^{-1}$,

$$
(46) \qquad \mathrm{x}_1 = \mathcal{M}.\mathfrak{S}\mathrm{A}\mathrm{x}_1.(\square_0 - k + \mathcal{M}\mathrm{A}^2)^{-1}\mathrm{A}.
$$

Opérant maintenant par $\mathfrak{S}.\mathrm{A} \times \ldots$, il vient

$$
(47) \qquad \mathfrak{S}.\mathrm{A}(\square_0 - k + \mathcal{M}\mathrm{A}^2)^{-1}\mathrm{A} = \frac{1}{\mathcal{M}}.
$$

Si nous considérons la surface du second degré

$$
(48) \qquad \mathfrak{S}.\mathrm{z}(\square_0 - k + \mathcal{M}\mathrm{A}^2)^{-1}\mathrm{z} = \frac{1}{\mathcal{M}},
$$

nous voyons : 1° qu'elle est homofocale à l'ellipsoïde réciproque [*] de l'ellipsoïde central ; 2° qu'elle passe par le point A, en vertu de la relation (47) ; 3° que sa normale en ce point a pour direction celle de $(\square_0 - k + \mathcal{M}\mathrm{A}^2)^{-1}\mathrm{A}$.

---

[*] Nous appelons ici *ellipsoïde réciproque* celui dont les axes, dirigés comme ceux de l'ellipsoïde central, ont des longueurs inverses de ces derniers.

Or cette direction dernière [formule (46)] est aussi celle de x_1, c'est-à-dire de l'un quelconque des axes principaux d'inertie en A. Donc :

Les axes principaux d'inertie en tout point sont normaux aux trois surfaces du second degré qui passent par ce point et qui sont homofocales avec l'ellipsoïde réciproque de l'ellipsoïde central.

Ce théorème remarquable est dû à Binet.

38. Il est facile, en employant la formule (44), de trouver la condition pour qu'un axe soit en tous ses points axe principal ; car $\square x$ doit être parallèle à x pour les deux valeurs A et $A + hx$, h étant réel ; ce qui prouve qu'il en doit être de même de

$$(A + hx)\mathfrak{S}(A + hx)x - A\mathfrak{S}Ax = hx^2 A + hx\mathfrak{S}Ax + h^2 x^2 . x.$$

Or, les deux derniers termes étant parallèles à x, il faut de même que l'on ait $A \parallel x$; en sorte que l'axe x doit passer par le centre de gravité. C'est donc un des axes principaux de l'ellipsoïde central.

La réciproque est pour ainsi dire évidente.

39. Pour qu'en un point A l'ellipsoïde d'inertie se réduise à une sphère, il faut que la fonction $\square x = \square_0 x + \mathfrak{M} A \mathfrak{V} Ax$ soit parallèle à x pour toute valeur de ce vecteur. Mais, si l'on fait $x \parallel A$, cette fonction se réduit à $\square_0 x \parallel \square_0 A$; donc A doit être situé sur l'un des axes de l'ellipsoïde central. Soit x_1 cet axe, et $\square_0 x_1 = a_1 x_1$, a_1 étant le moment d'inertie principal correspondant.

Alors

$$\square_0 x + \mathfrak{M} A \mathfrak{V} Ax = a_1 x.$$

Si nous donnons maintenant à x successivement les directions x_2 et x_3 des deux autres axes de l'ellipsoïde central, répondant aux moments d'inertie a_2 et a_3, il viendra

$$a_2 - a_1 + \mathfrak{M} A^2 = 0, \quad a_3 - a_1 + \mathfrak{M} A^2 = 0.$$

Donc

$$-A^2 = \frac{a_2 - a_1}{\mathfrak{M}} = \frac{a_3 - a_1}{\mathfrak{M}},$$

ce qui montre qu'il faut $a_2 = a_3$, c'est-à-dire que l'ellipsoïde central soit de révolution, et en outre $a_1 < a_2$, de sorte que cet ellipsoïde doit être allongé.

Troisième Partie : Dynamique.

Équation générale de la Dynamique.

40. Considérons un système matériel quelconque en mouvement. Soient M un point matériel quelconque de ce système, m la masse de ce point ; M son vecteur rapporté à une origine fixe ; $\mathrm{F} = m\mathrm{J}$ la force qui agit sur le point en question ; t le temps compté à partir d'une origine fixe quelconque ; et enfin $\delta\mathrm{M}$ une variation élémentaire du vecteur de M, compatible avec les liaisons du système.

Si nous appliquons le principe de d'Alembert et que nous le combinions avec celui des vitesses virtuelles, écrit comme nous l'avons fait plus haut [nº **33**, formule (31)], nous voyons que l'équation du mouvement du système matériel considéré peut s'écrire

$$(1) \qquad \Sigma m \mathfrak{S}.\left(\frac{d^2\mathrm{M}}{dt^2} - \mathrm{J}\right)\delta\mathrm{M} = 0.$$

La sommation représentée par le signe Σ s'étend, bien entendu, à tous les points matériels du système. Si l'on suppose qu'il s'agisse de corps géométriques continus, ce signe sera équivalent à une intégrale triple ou à une addition d'intégrales triples.

L'équation (1) est ainsi l'équation la plus générale de la Dynamique, pour un système matériel quelconque. Si nous supposons maintenant que ce système se réduise à un corps libre, mais solide, le déplacement $\delta\mathrm{M}$ peut se décomposer, ainsi qu'on l'a vu au numéro **33**, en une translation et une rotation, c'est-à-dire se mettre sous la forme $\mathrm{E} + \mathfrak{V}\mathrm{MX}$. Alors, à cause de l'indétermination des deux vecteurs infiniment petits

F, X, l'équation (1) se décompose en les deux suivantes :

(2) $$\Sigma m \left(\frac{d^2 M}{dt^2} - J\right) = 0,$$

(3) $$\Sigma m \mathfrak{V}. M \left(\frac{d^2 M}{dt^2} - J\right) = 0.$$

On remarquera l'analogie qu'elles présentent avec les équations statiques (13) et (14) du numéro **25**.

En appelant G le vecteur du centre de gravité du système, l'équation (2) peut évidemment s'écrire

$$\frac{d^2 G}{dt^2} \Sigma m = \Sigma F,$$

et elle nous donne par conséquent la loi du mouvement du centre de gravité.

Quant à la formule (3), il est aisé de voir, par rapprochement avec les considérations présentées au numéro **8**, qu'elle renferme l'énoncé du principe des aires.

Mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.

41. Si le corps solide que nous venons de considérer en dernier lieu se meut autour d'un point fixe O, nous prendrons ce point pour origine, et nous éliminerons les réactions en ce point, en nous attachant exclusivement à l'équation (3).

Soit X un vecteur dirigé suivant l'axe instantané de rotation et dont le module $\mathfrak{T}X$ représente la vitesse angulaire de la rotation à l'instant t, vecteur que, pour abréger, nous appellerons *vecteur instantané de rotation*. On aura, en vertu des liaisons du système,

(4) $$\frac{dM}{dt} = \mathfrak{V} X M;$$

d'où, par différentiation,

(5) $$\frac{d^2 M}{dt^2} = X \mathfrak{V} X M - \mathfrak{V} M \frac{dX}{dt}.$$

Substituant dans l'équation (3), celle-ci devient donc

(6) $$\Sigma m \mathrm{M} \mathfrak{V} \mathrm{M} \frac{d\mathrm{x}}{dt} = \Sigma m (\mathfrak{V} \mathrm{xM} . \mathfrak{S} \mathrm{xM} - \mathfrak{V} \mathrm{MJ});$$

de là on tire encore

(7) $$\Sigma m \mathrm{M} \frac{d\mathrm{M}}{dt} - \Sigma m \mathfrak{V} \int \mathrm{MJ}\, dt = \mathrm{c},$$

c étant un vecteur constant. C'est évidemment une expression particulière du principe des aires.

De même, on obtient aussi

(8) $$\tfrac{1}{2} \Sigma m \left(\frac{d\mathrm{M}}{dt}\right)^2 - \Sigma m \mathfrak{S} \int \mathrm{xMJ}\, dt = c,$$

formule qui répond au principe des forces vives, et dans laquelle c est une quantité réelle constante.

Supposons que les forces appliquées se fassent équilibre, ou, plus généralement, qu'elles se composent en une seule force passant au point fixe. Alors elles satisfont à la condition

$$\Sigma m \mathfrak{V} \mathrm{MJ} = 0.$$

Les formules (6), (7), (8) se simplifient alors ; et si nous introduisons la fonction linéaire et vectorielle

(9) $$\square \mathrm{x} = \Sigma m \mathrm{M} \mathfrak{V} \mathrm{Mx} = \mathrm{x} \Sigma m \mathrm{M}^2 - \Sigma m \mathrm{M} \mathfrak{S} \mathrm{Mx}$$

et que nous remplacions c par $-\frac{h^2}{2}$, ces formules deviendront respectivement

(10) $$\square \frac{d\mathrm{x}}{dt} + \mathfrak{V} \mathrm{x} \square \mathrm{x} = 0,$$

(11) $$\square \mathrm{x} + \mathrm{c} = 0,$$

(12) $$\mathfrak{S} . \mathrm{x} \square \mathrm{x} = h^2,$$

ce qui donne aussi

$$\mathfrak{S}\mathrm{xc} + h^2 = 0, \tag{13}$$

et

$$\square \frac{d\mathrm{x}}{dt} = \mathfrak{V}\mathrm{xc}. \tag{14}$$

Il est facile d'interpréter les constantes c et h^2. La première représente la somme vectorielle des vitesses aréolaires de tous les éléments du corps, représentées comme on l'a vu en Cinématique et multipliées, chacune, par la masse de l'élément correspondant. Quant à h^2, c'est une quantité réelle, égale à la *force vive* du corps, c'est-à-dire à la somme des produits de la masse de chaque élément par le carré de la vitesse correspondante.

42. En considérant x comme un vecteur variable, l'équation (12) représente un ellipsoïde, invariable dans le corps en mouvement, mais mobile avec ce corps. L'équation (13) est celle d'un plan tangent à cet ellipsoïde, lequel plan tangent reste fixe dans l'espace, mais change généralement de position par rapport au corps. Et, comme le déplacement élémentaire du corps à chaque instant est une rotation autour de l'axe x passant par le point de contact, nous arrivons de la sorte à la représentation du mouvement qu'on doit à Poinsot, et qui consiste dans le roulement sans glissement d'un ellipsoïde mobile sur un plan fixe.

L'ellipsoïde (12) peut être appelé *ellipsoïde des forces vives*, et le plan fixe (13) sur lequel il roule est parallèle au plan invariable des aires dont l'équation est

$$\mathfrak{S}\mathrm{xc} = 0.$$

La considération de l'ellipsoïde s'est introduite ici sans qu'il y ait été question en aucune manière de moments d'inertie. Mais, si nous nous reportons à ce qui a été exposé dans la deuxième Partie sur ce sujet, nous reconnaissons immédiatement l'identité de la formule (9) ci-dessus avec la formule (33) du n° **34**. Ainsi la fonction $\square$ employée ici est exactement la même que précédemment, et le moment d'inertie est [n° **34**, formule (34)]

$$-\mathfrak{S}\,x^{-1}\square x = \frac{h^2}{\mathfrak{T}x^2}; \tag{15}$$

ce qui nous montre que le carré d'un demi-diamètre quelconque de l'ellipsoïde est égal en grandeur à la force vive divisée par le moment d'inertie correspondant à ce demi-diamètre.

Les équations (11) et (12) nous donnent immédiatement

$$c^2\mathfrak{S}\,x\square x - h^2(\square x)^2 = 0, \tag{16}$$

ce qui, en posant

$$y = c^2\square x - h^2\square^2 x, \tag{17}$$

donne

$$\mathfrak{S}\,xy = 0. \tag{18}$$

Cette équation (16) représente un cône du second ordre, lieu des positions des axes instantanés x considérés comme liés avec le corps; le long de la génératrice x, la normale a, d'après la relation (18), la direction de y. Or il est facile de reconnaître, par la formule (10), qu'on a

$$\mathfrak{S}.x\square\frac{dx}{dt} = 0, \quad \text{et} \quad \mathfrak{S}\square x\square\frac{dx}{dt} = 0,$$

ce qui montre, en raison des propriétés connues de la fonction $\square$, que $\frac{dx}{dt}$ est perpendiculaire à $\square x$ et $\square^2 x$, et par suite [relation (17)] à y. Ainsi le cône (16) est *touché* le long de la génératrice x par l'autre cône, que forment les axes instantanés dans l'espace; et le mouvement peut ainsi se représenter encore par le roulement du premier de ces deux cônes sur le second. Cette représentation a été indiquée également par Poinsot.

Le point C est fixe dans l'espace, mais mobile dans le corps. Si nous cherchons le lieu du vecteur c dans le corps, nous trouvons, au moyen des formules (16) et (11),

$$c^2\mathfrak{S}\,c\square^{-1}c + h^2c^2 = 0, \tag{19}$$

en posant

$$c = \mathfrak{T}\mathrm{c} \quad [*], \tag{20}$$

d'où

$$\mathrm{c}^2 + c^2 = 0. \tag{21}$$

Le lieu décrit par le point C, extrémité de c, est donc donné par l'intersection de la sphère (21) et du cône (19), laquelle intersection appartient aussi à l'ellipsoïde réciproque

$$\mathfrak{S}\mathrm{c}\square^{-1}\mathrm{c} = h^2. \tag{22}$$

La normale au cône (19) en tout point de la génératrice c a la direction de $c^2\square^{-1}\mathrm{c} + h^2\mathrm{c}$, c'est-à-dire, en vertu de la formule (11), celle de $\mathrm{x} + h^2\mathrm{c}^{-1}$. Menons par l'origine une parallèle z à cette normale. Cette parallèle, en vertu de la formule (13), satisfera à l'équation $\mathfrak{S}\mathrm{zc} = 0$, c'est-à-dire qu'elle appartiendra au plan invariable. Donc le cône normal au cône (19) roule sur ce plan invariable, z représentant la génératrice de contact.

43. Cherchons à quelle condition le corps peut tourner constamment autour du même axe, avec une vitesse constante. Il faut pour cela qu'on ait

$$\frac{d\mathrm{x}}{dt} = 0, \tag{23}$$

ou [formule (10)]

$$\mathfrak{V}\mathrm{x}\square\mathrm{x} = 0.$$

La direction permanente de l'axe doit donc être celle de l'un des axes de figure de l'ellipsoïde (12) ou de son réciproque (22), c'est-à-dire celle de l'un des axes principaux d'inertie (n° **36**).

---

[*] Il est à peine utile de remarquer que ce c n'est plus le même que celui qui a été employé au n° **41**.

De plus, la condition (23) exige la suivante :

$$\square^{-1} o = o,$$

comme il est aisé de le voir; et, pour s'assurer que cette dernière est effectivement remplie, il suffit de transformer la formule (40) du n° **36**, en l'écrivant ainsi :

$$-a_1 a_2 a_3 \square^{-1} = \square^2 + (a_1 + a_2 + a_3)\square + a_2 a_3 + a_3 a_1 + a_1 a_2.$$

Par conséquent, si le corps commence à tourner, à un instant quelconque, autour d'un de ses axes principaux d'inertie, il continuera à tourner autour du même axe avec une vitesse de rotation invariable.

La représentation du mouvement par le roulement d'un ellipsoïde sur un plan aurait évidemment conduit à ce résultat par des considérations purement géométriques.

On voit, en particulier, que cette circonstance se présentera pour un axe instantané quelconque si l'ellipsoïde se réduit à une sphère.

Mouvement d'un système de points matériels libres s'attirant réciproquement en raison inverse des carrés de leurs distances.

44. Avant d'écrire l'équation générale du mouvement, en partant de l'équation (1) du n° **40**, supposons simplement deux points M, M', de masses m, m', et déterminés par les vecteurs M, M'. Nous aurons alors

$$\mathrm{J} = \frac{m'}{(\mathrm{M} - \mathrm{M}')r}, \quad \mathrm{J}' = \frac{m}{(\mathrm{M}' - \mathrm{M})r},$$

si

$$r = \mathfrak{T}(\mathrm{M} - \mathrm{M}');$$

donc

$$(24) \quad m\mathfrak{S}.\mathrm{J}\,\delta\mathrm{M} + m'\mathfrak{S}.\mathrm{J}'\,\delta\mathrm{M}' = \frac{mm'}{r}\,\mathfrak{S}\,\frac{\delta(\mathrm{M} - \mathrm{M}')}{\mathrm{M} - \mathrm{M}'} = \frac{mm'\,\delta r}{r^2} = -\,\delta\,\frac{mm'}{r},$$

si bien que dans ce cas particulier l'équation (1) peut s'écrire

$$m\,\mathfrak{S}\,\frac{d^2\mathrm{M}}{dt^2}\,\delta\mathrm{M} + m'\,\mathfrak{S}\,\frac{d^2\mathrm{M}'}{dt^2}\,\delta\mathrm{M}' + \delta\,\frac{mm'}{r} = 0.$$

Mais il est aisé d'étendre la formule (24) à un nombre quelconque de points, m, m', m'', ... et d'établir ainsi que l'on a

$$\Sigma m \mathfrak{S}.\mathrm{J}\,\delta\mathrm{M} = -\,\delta\Sigma\frac{mm'}{\mathfrak{T}(\mathrm{M}-\mathrm{M}')} = -\,\delta\mathrm{P},$$

si nous désignons par P le *potentiel* du système

$$\Sigma\frac{mm'}{\mathfrak{T}(\mathrm{M}-\mathrm{M}')} = \mathrm{P};$$

par conséquent, l'équation générale de la Dynamique devient dans ce cas

$$\Sigma m \mathfrak{S}\frac{d^2\mathrm{M}}{dt^2}\delta\mathrm{M} + \delta\mathrm{P} = 0. \tag{25}$$

D'une manière générale, si une quantité réelle quelconque f est fonction, comme P ci-dessus, de plusieurs vecteurs $\mathrm{M}, \mathrm{M}', \mathrm{M}''$, ..., sa variation, lorsque ces vecteurs varieront eux-mêmes, pourra se mettre sous la forme

$$\delta f = \mathfrak{S}\mathrm{K}\,\delta\mathrm{M} + \mathfrak{S}\mathrm{K}'\,\delta\mathrm{M}' + \ldots = \Sigma\mathfrak{S}\mathrm{K}\,\delta\mathrm{M}, \tag{26}$$

K, K', ... étant eux-mêmes de nouveaux vecteurs, qu'il est avantageux de désigner par convention sous le nom de *dérivées* de f par rapport à M, à M', ..., et de représenter par les symboles

$$\mathrm{K} = \mathfrak{D}_{\mathrm{M}} f, \quad \mathrm{K}' = \mathfrak{D}_{\mathrm{M}'} f, \quad \ldots.$$

D'après cette notation nous aurons

$$\delta\mathrm{P} = \Sigma\mathfrak{S}\mathfrak{D}_{\mathrm{M}}\mathrm{P}.\delta\mathrm{M}. \tag{27}$$

Alors, en vertu de l'équation (25), les équations particulières du mouvement de chacun des points M, M', ... pourront s'écrire

$$\left\{\begin{array}{l} m\dfrac{d^2\mathrm{M}}{dt^2} + \mathfrak{D}_{\mathrm{M}}\mathrm{P} = 0, \\ m'\dfrac{d^2\mathrm{M}'}{dt^2} + \mathfrak{D}_{\mathrm{M}'}\mathrm{P} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right. \tag{28}$$

ou encore, en développant,

$$(29)\qquad \left\{\begin{array}{l}\dfrac{d^2\mathrm{M}}{dt^2}=\dfrac{m'}{(\mathrm{M}-\mathrm{M}')\,\mathfrak{T}(\mathrm{M}-\mathrm{M}')}+\dfrac{m''}{(\mathrm{M}-\mathrm{M}'')\,\mathfrak{T}(\mathrm{M}-\mathrm{M}'')}+\ldots,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right.$$

Si nous reprenons l'équation (25) et que nous y fassions successivement $\delta\mathrm{M}$ égal : 1° à une translation infiniment petite, commune à tous les points du système; 2° à une rotation infiniment petite autour d'un axe fixe; 3° au déplacement effectif $d\mathrm{M}$ du point considéré, il est aisé de voir qu'on tombe sur trois équations immédiatement intégrables, et dont les intégrales sont

$$(30)\qquad \Sigma m\frac{d\mathrm{M}}{dt}=\mathrm{B},$$

$$(31)\qquad \Sigma m\,\mathfrak{V}\mathrm{M}\frac{d\mathrm{M}}{dt}=\mathrm{C},$$

$$(32)\qquad \mathrm{T}=-\tfrac{1}{2}\Sigma m\left(\frac{d\mathrm{M}}{dt}\right)^2=\mathrm{P}+\mathrm{H},$$

B, C étant ici des vecteurs constants, H une constante réelle, et T représentant la demi-force vive du système.

Ces équations répondent respectivement à la loi du mouvement du centre de gravité, à celle de la description des aires et à celle de la force vive.

Cette formule (25) peut d'ailleurs être intégrée, tout en laissant à la variation $\delta\mathrm{M}$ sa généralité, en employant la transformation suivante :

$$(33)\qquad \mathfrak{S}\frac{d^2\mathrm{M}}{dt^2}\delta\mathrm{M}=\frac{d.\,\mathfrak{S}\dfrac{d\mathrm{M}}{dt}\delta\mathrm{M}}{dt}-\tfrac{1}{2}\delta\left(\frac{d\mathrm{M}}{dt}\right)^2.$$

Si maintenant nous introduisons l'intégrale définie

$$(34)\qquad \mathrm{F}=\int_0^t(\mathrm{P}+\mathrm{T})\,dt,$$

nous voyons que l'équation (25) nous donnera l'intégrale

$$(35)\qquad \Sigma m\,\mathfrak{S}\left[\frac{d\mathrm{M}}{dt}\delta\mathrm{M}-\left(\frac{d\mathrm{M}}{dt}\right)_0\delta\mathrm{M}_0\right]+\delta\mathrm{F}=0,$$

en désignant par l'indice zéro les valeurs initiales des vecteurs représentant les *positions* des points M, ou leurs *vitesses*.

On remarquera l'analogie qu'offre cette méthode avec l'intégration par parties.

45. Cette équation (35) conduit à des conséquences importantes. Pour en obtenir quelques-unes, remarquons que, les masses $m, m', \ldots$ étant constantes, les intégrales complètes des équations (28) ou (29) nous donneraient les *positions* et les *vitesses actuelles* en fonction des *positions* et des *vitesses initiales*, ainsi que du *temps t*. Réciproquement nous pouvons concevoir les *vitesses initiales* comme fonctions des *positions initiales* et *finales*, ainsi que du *temps*. De cette manière, nous sommes conduit à considérer P, T, et par suite F, comme des fonctions *réelles* (exprimées ou non) de $\mathrm{M}, \mathrm{M}', \ldots, \mathrm{M}_0, \mathrm{M}'_0, \ldots$ et de t. D'après cela, et en vertu de la remarque exprimée par la formule (26), l'équation (35) se décompose dans les deux systèmes suivants :

$$(36) \qquad m\frac{d\mathrm{M}}{dt} + \mathbb{D}_{\mathrm{M}}\mathrm{F} = 0, \qquad m'\frac{d\mathrm{M}'}{dt} + \mathbb{D}_{\mathrm{M}'}\mathrm{F} = 0, \ldots,$$

$$(37) \qquad -m\left(\frac{d\mathrm{M}}{dt}\right)_0 + \mathbb{D}_{\mathrm{M}_0}\mathrm{F} = 0, \quad m'\left(\frac{d\mathrm{M}'}{dt}\right)_0 + \mathbb{D}_{\mathrm{M}'_0}\mathrm{F} = 0, \ldots.$$

Le système (36) peut être appelé l'intégrale *intermédiaire*, et le système (37) l'intégrale *définitive* des équations différentielles du mouvement, impliquées dans la formule (25). On remarquera, en effet, que le système (37) ne renferme que les vitesses initiales, et qu'il exprime, au moins théoriquement, la dépendance entre les *positions actuelles*, les *positions* et les *vitesses initiales*, et le *temps*. La fonction F joue ainsi un rôle très-important dans cette théorie. C'est elle que Hamilton a désignée sous le nom de *fonction principale* du mouvement. Après avoir exposé sa méthode dans deux Mémoires publiés dans les *Transactions philosophiques* (1834-1835) sous la forme de coordonnées ordinaires, il lui a plus tard appliqué l'algorithme des quaternions, qui s'y adapte si bien.

46. Si l'on donne les positions et les vitesses initiales, on peut dire que la fonction F dépend uniquement du temps, et alors, en vertu de l'équation (34), qui définit cette fonction, sa vitesse d'accroissement, ou sa *dérivée totale*, est

$$\mathfrak{D}_t \mathrm{F} = \mathrm{P} + \mathrm{T}. \tag{38}$$

Mais la fonction F peut être considérée comme renfermant les vecteurs des positions initiales et finales, vecteurs qui contiennent aussi le temps explicitement. Nous pouvons, par suite, nous proposer de déterminer la *dérivée partielle* $(\mathfrak{D}_t \mathrm{F})$ par rapport au temps seulement, comme si les vecteurs des positions finales $\mathrm{M}, \mathrm{M}', \ldots$ étaient constants, au lieu de changer avec le temps, comme cela a lieu effectivement dans le mouvement du système.

Dans ce but, il nous suffira de remarquer que la dérivée totale (38) se compose de deux parties : celle que nous cherchons et celle qui résulte du changement des vecteurs $\mathrm{M}, \mathrm{M}', \ldots$. Or cette dernière [formule (26)] a pour expression

$$\Sigma \mathbf{S}\left(\mathfrak{D}_{\mathrm{M}} \mathrm{F} \frac{d\mathrm{M}}{dt}\right),$$

c'est-à-dire, en vertu des relations (36) et (32),

$$-\Sigma m \left(\frac{d\mathrm{M}}{dt}\right)^2 = 2\mathrm{T}. \tag{39}$$

La dérivée partielle cherchée est donc

$$(\mathfrak{D}_t \mathrm{F}) = \mathfrak{D}_t \mathrm{F} - 2\mathrm{T} = \mathrm{P} - \mathrm{T} = -\mathrm{H}; \tag{40}$$

par conséquent, la *variation totale* de la fonction F, si t est considéré comme variable aussi bien que $\mathrm{M}, \mathrm{M}', \ldots$ et $\mathrm{M}_0, \mathrm{M}'_0, \ldots$, est, d'après la relation (35),

$$\partial \mathrm{F} = -\mathrm{H}\,\partial t - \Sigma m \mathbf{S} \frac{d\mathrm{M}}{dt} \delta \mathrm{M} + \Sigma m \mathbf{S} \left(\frac{d\mathrm{M}}{dt}\right)_0 \delta \mathrm{M}_0. \tag{41}$$

Enfin, P_0 indiquant la valeur initiale du potentiel, on conclut de ce qui précède et des relations (32), (36), (37), que la fonction principale F doit satisfaire aux deux équations aux différentielles partielles

$$(\mathfrak{D}_t \mathrm{F}) - \tfrac{1}{2}\Sigma m^{-1} (\mathfrak{D}_{\mathrm{M}} \mathrm{F})^2 = \mathrm{P}, \tag{42}$$

$$(\mathfrak{D}_t \mathrm{F}) - \tfrac{1}{2}\Sigma m^{-1} (\mathfrak{D}_{\mathrm{M}_0} \mathrm{F})^2 = \mathrm{P}_0. \tag{43}$$

47. Considérons maintenant l'intégrale

$$(44) \qquad V = \int_0^t 2\,T\,dt.$$

Elle représente la *force vive accumulée*, ou, suivant l'expression d'Hamilton, l'*action* du système. C'est la même qui figure dans le principe de Mécanique dit *de la moindre action*. Dans les Mémoires déjà cités, comme dans ses *Éléments des quaternions*, Hamilton donne à cette fonction V le nom de *fonction caractéristique*, que nous adopterons ici.

D'après les équations (32) et (34), les deux intégrales F et V sont liées entre elles par la relation

$$(45) \qquad V = F + tH;$$

donc la *variation totale* de V sera, en la considérant comme fonction du temps et des positions initiales et finales,

$$\delta V = H\,\delta t + t\,\delta H + \delta F,$$

ou, en vertu de l'équation (41),

$$(46) \qquad \delta V = t\,\delta H - \Sigma m\, S \frac{d\mathrm{M}}{dt}\,\delta\mathrm{M} + \Sigma m\, S \left(\frac{d\mathrm{M}}{dt}\right)_0 \delta\mathrm{M}_0,$$

et ses dérivées partielles sont respectivement

$$(47) \qquad \mathcal{D}_{\mathrm{M}} V = -m\frac{d\mathrm{M}}{dt}, \qquad \mathcal{D}_{\mathrm{M}'} V = \ldots,$$

$$(48) \qquad \mathcal{D}_{\mathrm{M}_0} V = +m\left(\frac{d\mathrm{M}}{dt}\right)_0, \quad \mathcal{D}_{\mathrm{M}'_0} V = \ldots,$$

$$(49) \qquad \mathcal{D}_{\mathrm{H}} V = t.$$

Les intégrales intermédiaires du mouvement du système, qui étaient d'abord exprimées par les équations (36), peuvent maintenant être considérées comme résultant de l'élimination de H entre les formules (47) et (49), et les intégrales définitives [équations (37)] peuvent être regardées aussi comme résultant de l'élimination de la même constante H entre les équations (48) et (49).

La comparaison entre les équations (36) et (47), (37) et (48), respectivement, nous montre que

$$\mathfrak{D}_{\mathrm{M}} V = \mathfrak{D}_{\mathrm{M}} F, \quad \mathfrak{D}_{\mathrm{M}'} V = \mathfrak{D}_{\mathrm{M}'} F, \quad \ldots,$$

$$\mathfrak{D}_{\mathrm{M}_0} V = \mathfrak{D}_{\mathrm{M}_0} F, \quad \mathfrak{D}_{\mathrm{M}'_0} V = \mathfrak{D}_{\mathrm{M}'_0} F, \quad \ldots;$$

par conséquent, et d'après la formule (40), on voit que les équations (42) et (43) nous conduisent aux deux suivantes :

$$\tag{50} \tfrac{1}{2}\Sigma m^{-1}(\mathfrak{D}_{\mathrm{M}} V)^2 + P + H = 0,$$

$$\tag{51} \tfrac{1}{2}\Sigma m^{-1}(\mathfrak{D}_{\mathrm{M}_0} V)^2 + P_0 + H = 0.$$

Telles sont les deux équations aux différentielles partielles auxquelles la fonction caractéristique V doit satisfaire.

Cette fonction s'évanouit, comme F, pour $t = 0$, instant auquel $\mathrm{M} = \mathrm{M}_0, \mathrm{M}' = \mathrm{M}'_0, \ldots$. Chacune de ces deux fonctions F et V contient symétriquement les vecteurs des positions initiales et finales. Il en doit être ainsi pour chacune d'elles, puisqu'elle dépend de la configuration mutuelle de toutes ces positions initiales et finales.

En combinant les équations (30) et (31), respectivement, avec les formules (36) et (37), on a encore les deux relations

$$\tag{52} \Sigma(\mathfrak{D}_{\mathrm{M}} F + \mathfrak{D}_{\mathrm{M}_0} F) = 0,$$

$$\tag{53} \Sigma\mathfrak{V}(\mathrm{M}\,\mathfrak{D}_{\mathrm{M}} F + \mathrm{M}_0 \mathfrak{D}_{\mathrm{M}_0} F) = 0,$$

et de même, pour la fonction caractéristique,

$$\tag{54} \Sigma(\mathfrak{D}_{\mathrm{M}} V + \mathfrak{D}_{\mathrm{M}_0} V = 0,$$

$$\tag{55} \Sigma\mathfrak{V}(\mathrm{M}\,\mathfrak{D}_{\mathrm{M}} V + \mathrm{M}_0 \mathfrak{D}_{\mathrm{M}_0} V) = 0.$$

Les relations (52) et (54) répondent à la loi du mouvement du centre de gravité, et les relations (53) et (55) à la loi de description des aires.

Lorsque t a une valeur très-faible, c'est-à-dire pour un mouvement de petite durée, on satisfait à toutes les conditions qui précèdent au moyen des valeurs *approchées* suivantes pour les fonctions F et V :

$$(56)\qquad F = \frac{t}{2}(P + P_0) + \frac{s^2}{2t},$$

$$(57)\qquad V = s(P + P_0 + 2H)^{\frac{1}{2}},$$

s étant une constante réelle et positive, définie par l'équation

$$s^2 = -\Sigma m(\text{M} - \text{M}_0)^2,$$

d'où

$$(58)\qquad s = \sqrt{\Sigma m \mathfrak{T}(\text{M} - \text{M}_0)^2}.$$

On reconnaît que les conditions requises sont satisfaites en assimilant $\text{M} - \text{M}_0$ à $t\frac{d\text{M}}{dt}$.

Quant aux expressions de H et de t, on les déduit des formules (56) et (57) comme il suit :

$$(59)\qquad H = -(\mathfrak{D}_t F) = -\tfrac{1}{2}(P + P_0) + \frac{s^2}{2t^2},$$

$$(60)\qquad t = \mathfrak{D}_H V = s(P + P_0 + 2H)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ces deux valeurs de H et de t se déduisent évidemment l'une de l'autre.

48. Les diverses propriétés de la fonction principale et de la fonction caractéristique, que nous avons établies ici, d'après Hamilton, pour le cas particulier de l'attraction planétaire, ne sont pas spéciales à cet exemple. Elles s'étendent à tous ceux dans lesquels il existe un potentiel, ou fonction des forces, tel que P, dont la variation δP représente le travail virtuel. Il est à remarquer que la fonction caractéristique V présente sur la fonction principale F l'avantage de ne pas contenir le temps explicitement. Cela résulte immédiatement des formules (40) et (45).

Ces fonctions satisfont, chacune, à deux équations aux différentielles partielles, que nous rappelons ici, et qui sont, pour la fonction F,

(42) $$(\mathbb{D}_t F) - \tfrac{1}{2}\Sigma m^{-1}(\mathbb{D}_{\text{M}} F)^2 = P,$$

(43) $$(\mathbb{D}_t F) - \tfrac{1}{2}\Sigma m^{-1}(\mathbb{D}_{\text{M}_0} F)^2 = P_0,$$

et pour la fonction V,

(50) $$\tfrac{1}{2}\Sigma m^{-1}(\mathbb{D}_{\text{M}} V)^2 + P + H = 0,$$

(51) $$\tfrac{1}{2}\Sigma m^{-1}(\mathbb{D}_{\text{M}_0} V)^2 + P_0 + H = 0.$$

Hamilton avait considéré ces couples d'équations comme nécessaires à la détermination de ces fonctions F et V respectivement; mais Jacobi a donné une remarquable extension à cette théorie, en démontrant *qu'une seule*, et non pas nécessairement *deux* équations aux différentielles partielles, pouvait suffire à la détermination, soit de la fonction F, soit de la fonction V, sous une forme plus générale, il est vrai, que la forme examinée par Hamilton. Nous allons indiquer ici l'analyse de Jacobi, en y adaptant la méthode des quaternions, pour ce qui concerne la fonction caractéristique. Celle qui se rapporte à la fonction principale est tout à fait analogue.

THÉORÈME. — *Soit* V *une solution complète de l'équation aux différentielles partielles* (50), *laquelle solution renferme, outre les vecteurs* M, M′, ..., *un égal nombre de vecteurs constants arbitraires* A, A′, ... *Cette solution contient aussi la constante réelle* H *et une constante arbitraire combinée par addition. Soit, de plus,* P *une fonction quelconque des vecteurs* M, M′, ..., *pouvant contenir le temps explicitement, auquel cas on remplacerait t par* $\mathbb{D}_{\text{H}} V$ [*formule* (49)] *dans l'équation aux différentielles partielles.*

Les intégrales des équations différentielles du mouvement (28) *s'obtiendront par l'élimination de* H *entre les équations*

(61) $$\mathbb{D}_{\text{A}} V = \text{B}, \quad \mathbb{D}_{\text{A}'} V = \text{B}', \quad \ldots,$$

(49) $$\mathbb{D}_{\text{H}} V = t,$$

B, B′, ... *étant de nouveaux vecteurs arbitraires.*

Pour établir ce théorème, différentions successivement l'équation

(50) par rapport aux vecteurs A, A′, ... et à la constante réelle H. (A cet effet, comme dans toutes les différentiations qui vont suivre, nous désignerons par des δ accompagnés d'indices les variations des diverses fonctions considérées. Ainsi $\delta_A V$, par exemple, représente l'accroissement que prend V lorsqu'on y fait varier A seulement.) Nous aurons

(62) $$\Sigma m^{-1}\mathfrak{S}\mathfrak{D}_M V.\delta_A\mathfrak{D}_M V + \mathfrak{D}_t P.\delta_A\mathfrak{D}_H V = 0, \square \ldots,$$

(63) $$\Sigma m^{-1}\mathfrak{S}\mathfrak{D}_M V.\delta_H\mathfrak{D}_M V + \mathfrak{D}_t P.\delta_H\mathfrak{D}_H V + 1 = 0.$$

Différentions maintenant les équations (61) et (49) par rapport à t. Il viendra

(64) $$\Sigma\mathfrak{S}\frac{dM}{dt}.\mathfrak{D}_M\delta_A V + \mathfrak{D}_t H.\mathfrak{D}_H\delta_A V = 0, \ldots,$$

(65) $$\Sigma\mathfrak{S}\frac{dM}{dt}.\mathfrak{D}_M\delta_H V + \mathfrak{D}_t H.\mathfrak{D}_G\delta_H V - 1 = 0.$$

Si l'on compare ces deux systèmes d'équations, en ayant égard, de même que dans les différentiations, à la définition des dérivées résultant de la formule (26), on obtient

(47) $$\mathfrak{D}_M V = -m\frac{dM}{dt}, \quad \ldots,$$

(66) $$\mathfrak{D}_t P = -\mathfrak{D}_t H.$$

Actuellement, différentions l'équation (47) par rapport à t. Nous obtiendrons

(67) $$\Sigma\mathfrak{S}\mathfrak{D}_M V.\delta_M\mathfrak{D}_M V = \Sigma m^2\mathfrak{S}\frac{dM}{dt}.\frac{d^2M}{dt^2}dt, \quad \ldots.$$

Enfin, la différentiation de l'équation (50) par rapport à M, M′, ... nous donne

$$\Sigma m^{-1}\mathfrak{S}\mathfrak{D}_M V.\delta_M\mathfrak{D}_M V + \Sigma\delta_M P = 0,$$

c'est-à-dire

(68) $$\Sigma\mathfrak{S}\mathfrak{D}_M V.\delta_M\mathfrak{D}_M V = -\Sigma m\mathfrak{S}\mathfrak{D}_M P.\frac{dM}{dt}dt;$$

et la comparaison des équations (67) et (68) montre qu'on a

(28) $$\mathfrak{D}_M P = -m\frac{d^2M}{dt^2}, \quad \ldots,$$

c'est-à-dire les équations différentielles du mouvement. Ces dernières, étant ainsi vérifiées identiquement, ont donc bien pour intégrales générales les équations (61) et (49).

On remarquera toute l'analogie que présente le système (61), (49) avec le système (48), (49), qui n'est qu'un cas particulier du premier, comme nous allons le reconnaître.

D'après les relations (47), on voit que l'équation aux différentielles partielles (50) nous donne

$$\tag{32} \tfrac{1}{2}\Sigma m \left(\frac{d\mathrm{M}}{dt}\right)^2 + \mathrm{P} + \mathrm{H} = 0.$$

Si donc P ne contient pas le temps, c'est-à-dire si H est une constante, ce sera la constante des forces vives. Dans ce cas, la valeur de $d\mathrm{V}$ deviendra

$$d\mathrm{V} = \Sigma \mathfrak{S} \mathfrak{D}_{\mathrm{M}} \mathrm{V} . d\mathrm{M},$$

ou, d'après (47),

$$\tag{69} d\mathrm{V} = -\Sigma m \left(\frac{d\mathrm{M}}{dt}\right)^2 dt = 2\mathrm{T}\,dt;$$

d'où

$$\tag{70} \mathrm{V} = \int 2\mathrm{T}\,dt + \text{const.},$$

conformément à la formule (44) qui nous avait d'abord servi à définir la fonction V dans la théorie d'Hamilton.

En choisissant enfin pour vecteurs constants $\mathrm{A}, \mathrm{A}', \ldots$ les vecteurs des positions initiales $\mathrm{M}_0, \mathrm{M}'_0, \ldots$, et déterminant la constante H de manière que V s'annule pour $t = 0$, on retomberait exactement sur la définition donnée par la formule (44), et sur le système (48), (49), pour les intégrales du mouvement. La fonction caractéristique V satisfait alors, comme nous l'avons vu, à l'équation différentielle (51) en même temps qu'à l'équation (50).

Mouvement d'un point matériel libre sollicité par un centre fixe, en raison inverse du carré de la distance.

49. Lorsque deux points matériels libres, ayant pour vecteurs M et M', et pour masses m et m', s'attirent réciproquement en raison inverse du carré de leur distance, la formule (29) du n° **44** nous montre que le mouvement *relatif* du premier point autour du second a pour équation

$$(71) \qquad \frac{d^2(\mathrm{M}-\mathrm{M}')}{dt^2} = (m+m')(\mathrm{M}-\mathrm{M}')^{-1}r^{-1},$$

en posant

$$r = \mathfrak{T}(\mathrm{M}-\mathrm{M}').$$

Si nous remplaçons $m+m'$ par m (somme des masses) et $\mathrm{M}-\mathrm{M}'$ par M (vecteur du premier point relativement au second), cette équation prend la forme

$$(72) \qquad \frac{d^2\mathrm{M}}{dt^2} = m\mathrm{M}^{-1}r^{-1}.$$

Opérant sur cette formule par $\mathfrak{V}.\mathrm{M}\times$, nous avons

$$\mathfrak{V}.\mathrm{M}\frac{d^2\mathrm{M}}{dt^2} = 0;$$

d'où, par intégration,

$$(73) \qquad \mathfrak{V}.\mathrm{M}\frac{d\mathrm{M}}{dt} = \mathrm{c},$$

c étant un vecteur constant

Ce premier résultat montre à la fois que la trajectoire est plane et que l'aire décrite par le vecteur M est proportionnelle au temps. Le vecteur c est normal au plan de la trajectoire, et $\mathfrak{T}\mathrm{c}$ mesure la double vitesse aréolaire, comme nous l'avons vu en Cinématique (n° **8**). Ces conclusions sont évidemment les mêmes si r^{-1} est remplacé par une fonction quelconque de r, c'est-à-dire pour tout mouvement dû à une force centrale, quelle qu'en soit la loi.

Une transformation pour ainsi dire identique à celle que nous avons pratiquée au n° **11** nous montre qu'on peut écrire l'équation (72) sous la forme

$$\frac{d^2\mathrm{M}}{dt^2} = \frac{d\mathfrak{U}_{\mathrm{M}}}{dt}\mathrm{B}, \tag{74}$$

la valeur du vecteur constant B étant

$$\mathrm{B} = m\mathrm{C}^{-1}. \tag{75}$$

L'équation (74), immédiatement intégrable, donne

$$\frac{d\mathrm{M}}{dt} = (\mathfrak{U}_{\mathrm{M}} - \mathrm{E})\mathrm{B},$$

ou

$$\frac{d\mathrm{M}}{dt} = \mathrm{B}(\mathrm{E} - \mathfrak{U}_{\mathrm{M}}), \tag{76}$$

E étant un vecteur constant arbitraire, assujetti seulement à se trouver dans le plan de la trajectoire.

Cette équation (76) peut évidemment être considérée comme étant celle de l'*hodographe* du mouvement, et elle nous montre immédiatement que l'hodographe est une circonférence dont le centre a pour vecteur BE et dont le rayon h est égal à $\mathfrak{T}\mathrm{B}$. Ce rayon, d'après les formules (73) et (75), est donc égal au quotient de la masse m par la double vitesse aréolaire $\mathfrak{T}\mathrm{C} = c$.

En posant pareillement $\mathfrak{T}\mathrm{E} = e$, cette quantité réelle mesure l'*excentricité* de l'hodographe par rapport au centre des forces; et par exemple, suivant que e est plus petit que 1, égal à 1, ou plus grand que 1, le centre des forces sera intérieur à l'hodographe, situé sur cette circonférence, ou extérieur.

Nous retrouvons donc, et par la même analyse, les propriétés de l'*hodographe circulaire* indiquées déjà au n° **11**, et qui sont ainsi des conséquences mathématiques de la loi de l'attraction planétaire. Nous avons d'ailleurs démontré au n° **12** que réciproquement, parmi tous les mouvements dus à des forces centrales, celui qui correspond à une force inversement proportionnelle au carré de la distance présente seul la propriété de l'hodographe circulaire.

50. L'équation (76) donne

$$\mathrm{E} - \mathfrak{U}\mathrm{M} = \mathrm{B}^{-1}\frac{d\mathrm{M}}{dt} = m^{-1}\,\mathrm{C}\,\frac{d\mathrm{M}}{dt}.$$

Opérant par $\mathfrak{S}.\mathrm{M}\times$, il vient

$$\mathfrak{S}.\mathrm{ME} + r = m^{-1}\,\mathfrak{S}.\mathrm{C}\frac{d\mathrm{M}}{dt}\mathrm{M} = -\,m^{-1}\,\mathrm{C}^2 = m^{-1}\,c^2, \tag{77}$$

de sorte que, si nous posons

$$\mathfrak{S}.\mathfrak{U}\mathrm{ME} = \cos\nu, \tag{78}$$

$$m^{-1}.\,c^2 = p, \tag{79}$$

nous obtenons pour équation de la trajectoire

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\nu}. \tag{80}$$

Cette trajectoire ou *orbite* est donc une conique, puisque, d'après les relations (78) et (79), ν mesure l'angle d'inclinaison de M sur E, tandis que p est une constante réelle. Cette constante ou demi-paramètre s'obtient en divisant par la masse le carré de la double vitesse aréolaire, qui peut conséquemment s'écrire $(mp)^{\frac{1}{2}}$.

L'un des foyers de la conique est au centre des forces, et l'excentricité a pour valeur e.

En désignant comme plus haut par h le rayon de l'hodographe, il est facile de voir enfin qu'on a

$$c = ph,\quad h^2 = \frac{m}{p}.$$

Si nous avions opéré directement par $\mathfrak{S}.\mathrm{M}\times$ sur l'équation (76), nous aurions obtenu

$$\mathfrak{S}.\mathrm{M}\frac{d\mathrm{M}}{dt} = \mathfrak{S}\,\mathrm{BEM},$$

c'est-à-dire

$$r\frac{dr}{dt} = \mathrm{B}\,\mathfrak{V}\mathrm{ME};$$

d'où

$$r^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \mathrm{B}^2\,(\mathfrak{V}\mathrm{ME})^2 = h^2 r^2 e^2 \sin^2\nu.$$

Remplaçant $\sin^2 \nu$ par sa valeur tirée de l'équation (80), et posant

$$a = \frac{p}{1 - e^2},$$

cette relation devient

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = m\left(\frac{2}{r} - \frac{p}{r^2} - \frac{1}{a}\right). \tag{81}$$

Elle montre ainsi comment la distance r du centre des forces varie avec le temps.

Désignons par une seule lettre H le vecteur BE du centre de l'hodographe. Alors nous aurons

$$\mathfrak{T}\mathrm{H} = \mathfrak{T}\mathrm{B}\ \mathfrak{T}\mathrm{E} = he.$$

D'après cela, et en vertu des propriétés les plus élémentaires de la circonférence, le produit de deux vitesses opposées quelconques sur l'orbite sera constant et aura pour expression

$$h^2(1 - e^2) = \frac{m}{a} = \mathrm{H}^2 - \mathrm{B}^2. \tag{82}$$

Ce cas de deux vitesses opposées ne se présente, à proprement parler, que pour une orbite elliptique, c'est-à-dire pour $e < 1$; mais il n'y a nulle difficulté à interpréter le résultat dans le cas d'une hyperbole.

Si l'on donne le vecteur $\mathrm{N} = \frac{d\mathrm{M}}{dt}$ d'un point de l'hodographe, le vecteur M correspondant de l'orbite s'obtiendra [formules (73), (76)] au moyen des deux équations

$$\mathfrak{V}\mathrm{MN} = \mathrm{C} = m\mathrm{B}^{-1}, \tag{83}$$

$$\mathrm{M} = r\mathrm{B}^{-1}(\mathrm{H} - \mathrm{N}). \tag{84}$$

On tire de là pour le *potentiel* correspondant

$$\mathrm{P} = \frac{m}{r} = \mathfrak{S}\mathrm{N}(\mathrm{H} - \mathrm{N}) = \mathfrak{S}\mathrm{K}(\mathrm{H} - \mathrm{N}), \tag{85}$$

K étant le vecteur d'un point quelconque de la tangente à l'hodographe en N.

L'expression $\mathbf{S}\text{N}(\text{H}-\text{N})$ nous montre que le potentiel est égal à la puissance du point N de l'hodographe par rapport au cercle de diamètre OH, qu'on peut appeler avec Hamilton *cercle d'excentricité*.

La seconde expression répond au produit de la longueur OK par celle de la projection de HN sur OK. Si nous considérons le second point de contact N', et que nous nommions L la projection de H sur OK, il est aisé de voir que les potentiels correspondants P, P' seront proportionnels aux longueurs LN, LN'. Ces dernières droites sont d'ailleurs également inclinées sur OK.

Enfin on reconnaît que OK est parallèle à la corde MM' de l'orbite, correspondant à NN'.

De ces diverses expressions il est possible de déduire de nombreuses conséquences géométriques, dans le détail desquelles nous n'entrerons pas ici. Nous nous contenterons de signaler les deux théorèmes suivants, qu'Hamilton démontre dans ses *Éléments*, par les considérations dont nous parlons.

Théorème d'isochronisme hodographique. — *Si deux hodographes circulaires, ayant une corde commune qui passe par le centre des forces ou tend vers ce centre, sont coupés orthogonalement par un troisième cercle, les temps de description hodographique des arcs interceptés seront égaux.*

Théorème de Lambert. — *Soient* MM' *un arc de l'orbite; r et r' les longueurs* OM, OM'; *s la longueur de la corde* MM'; *a le demi-axe focal de l'orbite, comme plus haut. Le temps employé à décrire l'arc* MM' *est une fonction des trois rapports* $\frac{a^3}{m}, \frac{r+r'}{a}, \frac{s}{r+r'}$.

51. Il est facile de voir que l'équation différentielle (72) du mouvement relatif que nous étudions peut se mettre sous la forme

$$\mathbf{S}\frac{d^2\text{M}}{dt^2}\,\delta\text{M}+\delta\text{P}=0, \tag{86}$$

analogue à l'équation (25) du n° **44**, le potentiel P étant ici égal à $\frac{m}{r}$, comme dans le numéro précédent.

De là

$$(87) \qquad T = P + H,$$

si nous posons

$$(88) \qquad T = -\frac{1}{2}\left(\frac{dM}{dt}\right)^2 = -\frac{1}{2}N^2,$$

$$(89) \qquad H = -\frac{m}{2a};$$

car, en vertu des formules (85), (82), on a

$$T - P = -\tfrac{1}{2}[N^2 + \mathfrak{S}2N(H - N)] = -\tfrac{1}{2}[H^2 - (H - N)^2] = -\tfrac{1}{2}(H^2 - B^2) = -\frac{m}{2a}.$$

Introduisons, comme aux nos 44 et suivants, les deux intégrales

$$(90) \qquad F = \int_0^t (P + T)\,dt,$$

$$(91) \qquad V = \int_0^t 2T\,dt,$$

que nous pourrons, encore ici, appeler la *fonction principale* et la *fonction caractéristique* du mouvement.

En intégrant l'équation (86), identiquement comme nous l'avons fait aux numéros que nous venons de rappeler, nous trouverons, en désignant par M, N les vecteurs représentant la position et la vitesse *initiales*, et par M', N' les vecteurs représentant la position et la vitesse *actuelles*,

$$(92) \qquad \mathcal{D}_M F = \mathcal{D}_M V = N,$$

$$(93) \qquad \mathcal{D}_{M'} F = \mathcal{D}_{M'} V = N',$$

$$(94) \qquad \delta F = \mathfrak{S} N\,\delta M - \mathfrak{S} N'\,\delta M' - H\,\delta t,$$

$$(95) \qquad \delta V = \mathfrak{S} N\,\delta M - \mathfrak{S} N'\,\delta M' + t\,\delta H,$$

$$(96) \qquad (\mathcal{D}_t F) = -H,$$

$$(97) \qquad \mathcal{D}_H V = t.$$

Ici, F est une fonction réelle de M, M', t, et V une fonction réelle de M, M', H, la masse m étant considérée comme donnée. Au lieu des vecteurs M, M', nous pouvons chercher à introduire les quantités réelles r, r', s qui en dépendent (n° **50**). Nous avons

$$(98)\quad \begin{cases} \partial r = -r^{-1}\,\mathfrak{S}\,\mathrm{M}\,\partial\mathrm{M}, \\ \partial r' = -r'^{-1}\,\mathfrak{S}\,\mathrm{M}'\,\partial\mathrm{M}', \\ \partial s = -s^{-1}\,\mathfrak{S}(\mathrm{M}'-\mathrm{M})(\partial\mathrm{M}'-\partial\mathrm{M}). \end{cases}$$

Nous bornant à la fonction V, et remarquant que la formule (95) donne

$$(99)\quad \mathfrak{S}(\mathrm{N}\,\partial\mathrm{M} - \mathrm{N}'\,\partial\mathrm{M}') = \mathrm{D}_r \mathrm{V}.\partial r + \mathrm{D}_{r'}\mathrm{V}.\partial r' + \mathrm{D}_s \mathrm{V}.\partial s,$$

les variations ∂ étant arbitraires, nous obtiendrons, au moyen des valeurs (98),

$$(100)\quad \mathrm{N} = -\mathrm{M}\,r^{-1}\,\mathrm{D}_r\mathrm{V} + (\mathrm{M}'-\mathrm{M})s^{-1}\,\mathrm{D}_s\mathrm{V},$$

$$(101)\quad \mathrm{N}' = \mathrm{M}'\,r'^{-1}\,\mathrm{D}_{r'}\mathrm{V} + (\mathrm{M}'-\mathrm{M})s^{-1}\,\mathrm{D}_s\mathrm{V}.$$

De là encore

$$(102)\quad \mathrm{D}_r\mathrm{V} = \frac{r\,\mathfrak{V}(\mathrm{M}'-\mathrm{M})\,\mathrm{N}}{\mathfrak{V}_{\mathrm{M}\mathrm{M}'}},$$

$$(103)\quad \mathrm{D}_{r'}\mathrm{V} = \frac{r'\,\mathfrak{V}(\mathrm{M}-\mathrm{M}')\,\mathrm{N}'}{\mathfrak{V}_{\mathrm{M}\mathrm{M}'}},$$

et, en vertu de la formule (73),

$$(104)\quad \mathrm{D}_s\mathrm{V} = \frac{s\,\mathrm{C}}{\mathfrak{V}_{\mathrm{M}\mathrm{M}'}}.$$

Or, des considérations indiquées au n° **50**, il est assez facile de conclure que $r\mathrm{N} + r'\mathrm{N}'$ est parallèle à K, c'est-à-dire à $\mathrm{M}-\mathrm{M}'$; par conséquent

$$(105)\quad \mathrm{D}_r\mathrm{V} = \mathrm{D}_{r'}\mathrm{V}.$$

On aurait semblablement

$$(106)\quad \mathrm{D}_r\mathrm{F} = \mathrm{D}_{r'}\mathrm{F},$$

en sorte que chacune des fonctions F et V dépend de la *somme* $r + r'$ des distances r et r'.

En considérant toujours m comme constante, nous pouvons donc dire que la fonction principale, et par suite sa dérivée partielle $(\mathbb{D}_t F) = -H$ [formule (96)], sont fonctions des quantités réelles

$$r + r', \; s \text{ et } t.$$

Pareillement, la fonction caractéristique et sa dérivée partielle $\mathbb{D}_H V = t$ [formule (97)] sont fonctions de

$$r + r', \; s \text{ et } H.$$

Cette dernière conséquence n'est autre que l'énoncé, sous une forme un peu différente, du théorème de Lambert, que nous avons mentionné plus haut. Il est utile de remarquer qu'on arrive ainsi à ce théorème sans avoir recours aux propriétés des sections coniques, et en appliquant uniquement le calcul des quaternions à la loi de l'attraction planétaire.

Si nous élevons au carré les équations (100) et (101), en ayant égard à la relation (105), nous trouverons sans peine

$$(107) \qquad 2P + 2H = (\mathbb{D}_r V)^2 + (\mathbb{D}_s V)^2 + \frac{r^2 - r'^2 + s^2}{rs} \mathbb{D}_r V . \mathbb{D}_s V,$$

$$(108) \qquad 2P' + 2H = (\mathbb{D}_r V)^2 + (\mathbb{D}_s V)^2 + \frac{r'^2 - r^2 + s^2}{rs} \mathbb{D}_r V . \mathbb{D}_s V.$$

On déduit de là, en remplaçant P et P′ par leurs valeurs $\frac{m}{r}$ et $\frac{m}{r'}$,

$$(109) \qquad \mathbb{D}_r V . \mathbb{D}_s V = \frac{m}{r + r' + s} - \frac{m}{r + r' - s},$$

$$(110) \qquad \tfrac{1}{2}[(\mathbb{D}_r V)^2 + (\mathbb{D}_s V)^2] = H + \frac{m}{r + r' + s} + \frac{m}{r + r' - s}.$$

$$(111) \quad (\mathbb{D}_r V + \mathbb{D}_s V)^2 = 2H + \frac{4m}{r + r' + s} = m\left(\frac{4}{r + r' + s} - \frac{1}{a}\right),$$

$$(112) \quad (\mathbb{D}_r V - \mathbb{D}_s V)^2 = 2H + \frac{4m}{r + r' - s} = m\left(\frac{4}{r + r' - s} - \frac{1}{a}\right).$$

Mais, en vertu des formules (95), (99), (105), nous avons la variation

$$(113) \quad \delta V - t\,\delta H = \tfrac{1}{2}(\mathbb{D}_r V + \mathbb{D}_s V)\,\delta(r + r' + s) + \tfrac{1}{2}(\mathbb{D}_r V - \mathbb{D}_s V)\,\delta(r + r' - s).$$

La fonction V s'évanouissant en outre avec t, et par conséquent avec s, il est facile de déduire de là les expressions

$$(114)\quad \mathrm{V} = \int_{-s}^{+s} \left(\frac{m}{r+r'+s} + \frac{\mathrm{H}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} ds = \int_{-s}^{+s} \left(\frac{m}{r+r'+s} - \frac{m}{4a}\right)^{\frac{1}{2}} ds,$$

$$(115)\quad t = \frac{1}{4}\int_{-s}^{+s} \left(\frac{m}{r+r'+s} + \frac{\mathrm{H}}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} ds = \frac{1}{2}\int_{-s}^{+s} \left(\frac{4m}{r+r'+s} - \frac{m}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} ds,$$

$r + r'$ devant, dans ces intégrations, être traitée comme constante.

Pendule de Foucault.

52. Considérons un pendule simple dont le point de suspension, rapporté au centre de la Terre, ait pour vecteur A. Soient λ la latitude de ce point, et I un vecteur unitaire dirigé du centre de la Terre vers le pôle nord. Posons $\mathfrak{T}\mathrm{A} = a$, et appelons ω la vitesse angulaire de rotation de la Terre autour de son axe. Il est aisé de voir que l'on a

$$(116)\qquad \frac{d\mathrm{A}}{dt} = \omega \mathfrak{V}\mathrm{AI},$$

et de là

$$(117)\qquad \frac{d^2\mathrm{A}}{dt^2} = \omega \mathfrak{V} \frac{d\mathrm{A}}{dt}\mathrm{I} = -\,\omega^2(\mathrm{A} - \mathrm{I}a\sin\lambda).$$

Soient maintenant L le vecteur de la lentille du pendule rapportée au point de suspension, m la masse de la lentille, et R la tension du fil. Alors, A_1 étant un vecteur dirigé comme la pesanteur, nous aurons

$$m\left(\frac{d^2\mathrm{A}}{dt^2} + \frac{d^2\mathrm{L}}{dt^2}\right) = -\,mg\mathfrak{U}\mathrm{A}_1 - \mathrm{R}\mathfrak{U}\mathrm{L},$$

équation qui peut s'écrire

$$(118)\qquad \mathfrak{V}\mathrm{L}\frac{d^2\mathrm{A}}{dt^2} + \mathfrak{V}\mathrm{L}\frac{d^2\mathrm{L}}{dt^2} = \frac{g}{\mathfrak{T}\mathrm{A}_1}\mathfrak{V}\mathrm{A}_1\mathrm{L}.$$

En y joignant la condition

$$(119)\qquad \mathfrak{T}\mathrm{L} = l,$$

qui exprime que la longueur du fil est constante, nous avons complétement les équations du mouvement. Ces équations (118) et (119) ne peuvent pas s'intégrer d'une manière générale. Pour y parvenir par approximation, nous prendrons l'hypothèse du pendule de Foucault, c'est-à-dire que nous supposerons qu'il s'agisse d'oscillations très-petites, que nous regarderons comme négligeables les puissances de ω supérieures à la première, ce qui revient à négliger $\frac{d^2\text{A}}{dt^2}$, et qu'enfin nous considérerons A_1 comme ayant la même direction que A, en ne tenant pas compte de l'aplatissement du sphéroïde terrestre.

Cela admis, rapportons la lentille à la position la plus basse qu'elle puisse prendre sur la verticale du point de suspension, c'est-à-dire posons

$$\text{P} = \text{L} + \frac{l}{a}\text{A}. \tag{120}$$

Le vecteur P pourra être considéré comme horizontal, sans qu'il y ait contradiction avec la condition (119), et les puissances de P seront négligeables. L'équation (118) du mouvement devient alors

$$-l\mathfrak{V}\text{A}\frac{d^2\text{P}}{dt^2} = g\mathfrak{V}\text{AP},$$

ou, en posant

$$\frac{g}{l} = n^2, \tag{121}$$

$$\mathfrak{V}\text{A}\left(\frac{d^2\text{P}}{dt^2} + n^2\text{P}\right) = 0, \tag{122}$$

On reconnaît facilement que $\mathfrak{V}\text{AI} = \text{E}$ et $a\text{I} - \text{A}\sin\lambda = \text{N}$ sont deux vecteurs de modules égaux, situés dans le plan horizontal du lieu, et respectivement dirigés vers l'est et vers le nord. Nous pouvons donc poser

$$\text{P} = x\text{E} + y\text{N}. \tag{123}$$

De là, en employant les relations (116), (117), et en introduisant les hypothèses énoncées ci-dessus, on voit sans peine que l'équation (122) prend la forme

$$(124)\quad \left(\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x - 2\frac{dy}{dt}\omega\sin\lambda\right)\mathrm{N} - \left(\frac{d^2y}{dt^2} + n^2y + 2\frac{dx}{dt}\omega\sin\lambda\right)\mathrm{E} = 0,$$

c'est-à-dire que nous avons les deux équations

$$(125)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + n^2x - 2\dfrac{dy}{dt}\omega\sin\lambda = 0, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + n^2y + 2\dfrac{dx}{dt}\omega\sin\lambda = 0, \end{cases}$$

pour déterminer le mouvement du pendule en projection horizontale.

En rapportant ce mouvement à des axes mobiles autour de la verticale, dans le sens du nord à l'est, la vitesse de rotation étant $\omega\sin\lambda$, on trouve que ces équations se réduisent à

$$(126)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} + n^2x_1 = 0, \\ \dfrac{d^2y_1}{dt^2} + n^2y_1 = 0, \end{cases}$$

x_1 et y_1 étant les nouvelles coordonnées.

On reconnaît immédiatement ici les équations du mouvement elliptique d'un point sollicité par un centre fixe en raison directe de la distance ; et l'on peut tirer de là, comme d'habitude, les diverses particularités du mouvement.

Nous ne pousserons pas plus loin les exemples que nous avons tenu à mettre sous les yeux du lecteur, pour montrer comment les quaternions peuvent être appliqués aux questions de Mécanique rationnelle. Dans les ouvrages d'Hamilton et de Tait, on trouve cependant l'indication plus ou moins développée d'applications à la Mécanique céleste, à la théorie de la lumière, à la théorie de l'électricité, à l'élasticité des corps solides, en un mot à toutes les branches de la Mécanique et de la Physique mathématique. Pour la théorie de la déformation des corps surtout, Tait fait un grand usage du symbole d'opération ∇, imaginé par Hamilton, et qui se définit par la relation

$$\nabla = \mathrm{i}_1\frac{d}{dx_1} + \mathrm{i}_2\frac{d}{dx_2} + \mathrm{i}_3\frac{d}{dx_3}.$$

L'emploi de cet opérateur, dont nous n'avons pas eu l'occasion de parler dans ce qui précède, semble être très-avantageux dans un grand nombre de questions de Géométrie ou de Mécanique. Mais les développements auxquels conduirait cette étude nouvelle nous forceraient à dépasser les limites que nous avons voulu nous fixer.

Dans l'état présent de la Science, nous voyons que les quaternions se prêtent à des applications nombreuses et très-variées. Fort souvent ils apportent une réelle simplification en abrégeant notablement le nombre des équations à écrire. Voilà ce que nous désirions établir, et nous avons l'espoir d'y être parvenu.

Le jour où cette analyse nouvelle cesserait d'être mise de côté, le jour où l'on s'appliquerait à y introduire des perfectionnements semblables à ceux qui se sont produits dans les autres branches des sciences mathématiques, on verrait s'accroître encore le domaine des questions physiques auxquelles cet instrument analytique pourrait être utilement appliqué. Il y a là matière à de nombreuses et vastes recherches, fécondes en résultats, car nous croyons que le calcul d'Hamilton est loin d'avoir dit son dernier mot.