JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. RESAL

De la déformation qu'éprouve une pièce à simple ou à double courbure sous l'action de forces qui lui font subir en même temps une flexion et une torsion

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 3 (1877), p. 307-322.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1877_3_3__307_0>

De la déformation qu'éprouve une pièce à simple ou à double courbure sous l'action de forces qui lui font subir en même temps une flexion et une torsion [*];

PAR M. H. RESAL.

Cette question offre, même en dehors des applications, un certain intérêt. Elle conduit en effet au problème suivant :

Déterminer la forme d'une courbe à double courbure, dont les rayons de courbure et de torsion sont donnés en fonction de l'arc.

I. — *Rappel des formules relatives aux deux courbures d'une courbe.*

Soient

Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires;

x, y, z les coordonnées d'un point m d'une courbe;

α, β, γ les angles formés par la tangente en m avec Ox, Oy, Oz;

α', β', γ' et $\alpha'', \beta'', \gamma''$ les angles semblables relatifs à la normale principale et la binormale;

ds l'élément de l'arc;

ρ, τ les rayons de courbure et de torsion;

On a

$$(1)\qquad \cos\alpha = \frac{dx}{ds},\quad \cos\beta = \frac{dy}{ds},\quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds};$$

$$(2)\qquad \cos\alpha' = \rho\frac{d\cos\alpha}{ds},\quad \cos\beta' = \rho\frac{d\cos\beta}{ds},\quad \cos\gamma' = \rho\frac{d\cos\gamma'}{ds};$$

$$(3)\qquad \cos\alpha' = \tau\frac{d\cos\alpha''}{ds},\quad \cos\beta' = \tau\frac{d\cos\beta''}{ds},\quad \cos\gamma' = \tau\frac{d\cos\gamma''}{ds};$$

[*] Les premières recherches sur ce sujet sont dues à M. de Saint-Venant (*Comptes*

Les équations (2) et (3) peuvent être remplacées par les quatre suivantes, obtenues en éliminant $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ et en exprimant que la somme des carrés de ces cosinus est égale à l'unité :

$$\frac{d\cos\alpha''}{ds} = \frac{\rho}{\tau}\frac{d\cos\alpha}{ds}, \quad \frac{d\cos\beta''}{ds} = \frac{\rho}{\tau}\frac{d\cos\beta}{ds}, \quad \frac{d\cos\gamma''}{ds} = \frac{\rho}{\tau}\frac{d\cos\gamma''}{ds},$$

$$\left(\frac{d\cos\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\beta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\gamma}{ds}\right)^2 = \frac{1}{\rho^2}.$$

Si nous posons, pour simplifier l'écriture,

$$(4) \qquad \begin{cases} \cos\alpha = a, & \cos\beta = b, \quad \cos\gamma = c, \\ \cos\alpha'' = a'', & \cos\beta'' = b'', \quad \cos\gamma'' = c'', \end{cases}$$

les équations ci-dessus prendront la forme suivante :

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{da''}{ds} = \dfrac{\rho}{\tau}\dfrac{da}{ds}, \quad \dfrac{db''}{ds} = \dfrac{\rho}{\tau}\dfrac{db}{ds}, \quad \dfrac{dc''}{ds} = \dfrac{\rho}{\tau}\dfrac{dc}{ds}, \\ \dfrac{da^2}{ds^2} + \dfrac{db^2}{ds^2} + \dfrac{dc^2}{ds^2} = \dfrac{1}{\rho^2}, \end{cases}$$

et l'on aura de plus

$$(6) \qquad \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1. \end{cases}$$

Si ρ et τ sont donnés en fonction de s, les six équations (5) et (6) feront connaître a, b, c; a'', b'', c'', par suite, x, y, z en fonction de s, ce qui permettra d'obtenir les équations de la courbe.

II. — *Faible déformation d'une courbe.*

Supposons que l'on fasse subir aux rayons de courbure et de torsion d'une courbe donnée et suivant une loi déterminée des variations assez petites pour qu'on puisse en négliger les puissances d'un ordre supé-

---

rendus de l'Académie des Sciences, séances du 30 octobre et du 6 novembre 1844); mais nous avons employé une méthode différente de celle de ce savant.

rieur au premier. Nous distinguerons par l'indice o les quantités qui se rapportent à la forme primitive de la courbe et nous poserons

$$
\begin{aligned}
&\rho = \rho_0 + \delta\rho, && \tau = \tau_0 + \delta\tau, && \\
&a = a_0 + \delta a, && b = b_0 + \delta b, && c = c_0 + \delta c; \\
&a'' = a''_0 + \delta a'', && b'' = b''_0 + \delta b'', && c'' = c''_0 + \delta c''; \\
&x = x_0 + \delta x, && y = y_0 + \delta y, && z = z_0 + \delta z.
\end{aligned}
$$

Les équations (5) et (6), différentiées par rapport à la caractéristique δ, donnent

$$
(5') \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d\delta a''}{ds} = \frac{\rho_0}{\tau_0}\frac{d\delta a}{ds} + \delta\frac{\rho}{\tau}\frac{da_0}{ds}, \\
&\frac{d\delta b''}{ds} = \frac{\rho_0}{\tau_0}\frac{d\delta b}{ds} + \delta\frac{\rho}{\tau}\frac{db_0}{ds}, \\
&\frac{d\delta b''}{ds} = \frac{\rho_0}{\tau_0}\frac{d\delta c}{ds} + \delta\frac{\rho}{\tau}\frac{dc_0}{ds}, \\
&\frac{da_0}{ds}\frac{d\delta a}{ds} + \frac{db}{ds}\frac{d\delta b}{ds} + \frac{dc_0}{ds}\frac{d\delta c}{ds} = -\frac{\delta\rho}{\rho_0^3};
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(6') \qquad \left\{
\begin{aligned}
&a_0\,\delta a + b_0\,\delta b + c_0\,\delta c = 0, \\
&a''_0\,\delta a'' + b''_0\,\delta b'' + c''_0\,\delta c'' = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

formules qui permettront d'obtenir les variations des cosinus.

Les équations (1) donnent

$$\delta a = \frac{d\delta x}{ds}, \qquad \delta b = \frac{d\delta y}{ds}, \qquad \delta c = \frac{d\delta z}{ds},$$

d'où

$$\delta x = \int \delta a\, ds, \quad \delta y = \int \delta b\, ds, \quad \delta z = \int \delta c\, ds.$$

III. — *Cas où la courbe est primitivement plane.*

Prenons le plan de cette courbe pour celui des xy. Les formules du numéro précédent ne peuvent pas s'appliquer ici, comme il est facile de le reconnaître.

Nous avons

$$a''_0 = 0, \quad b''_0 = 0, \quad c''_0 = 1, \quad \frac{1}{\tau_0} = 0,$$

$$a'' = \delta a'', \quad b'' = \delta b'', \quad a = a_0 + \delta a, \quad b = b_0 + \delta b, \quad c_0 = 0, \quad c = \delta c.$$

Les deux premières des formules (5) deviennent

$$\frac{d\delta a''}{ds} = \frac{\rho}{\tau}\left(\frac{da_0}{ds} + \frac{d\delta a}{ds}\right),$$

$$\frac{d\delta b''}{ds} = \frac{\rho}{\tau}\left(\frac{db_0}{ds} + \frac{d\delta b}{ds}\right),$$

ou plus simplement

$$(7) \qquad \frac{d\delta a''}{ds} = \frac{\rho_0}{\tau}\,\frac{da_0}{ds}, \quad \frac{d\delta b''}{ds} = \frac{\rho_0}{\tau}\,\frac{da_0}{ds},$$

d'où

$$(8) \qquad \delta a'' = \int \frac{\rho_0}{\tau}\, da_0, \quad db'' = \int \frac{\rho_0}{\tau}\, db_0.$$

La seconde des équations (6) donne, en conservant les termes du second ordre,

$$c'' = \sqrt{1 - \left(\delta a''^2 + \delta b''^2\right)} = 1 - \frac{1}{2}\left(\delta a''^2 + \frac{1}{2}\,\delta b''^2\right);$$

d'où

$$\delta c'' = -\frac{1}{2}\left(\delta a''^2 + \delta b''^2\right),$$

et, en ayant égard aux formules (7),

$$\frac{d\delta c''}{as} = -\frac{\rho_0}{\tau}\left(\delta a''\,\frac{da_0}{ds} + \delta b''\,\frac{db_0}{ds}\right).$$

En portant cette valeur dans la troisième des équations (5), on trouve

$$(9) \qquad \delta c = -\int (\delta'' a\, da_0 + \delta b\, db''_0).$$

La quatrième des équations (5) et la première des équations (6) deviennent, en négligeant les termes du second ordre,

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{da_0}{ds}\dfrac{d\delta a}{ds}+\dfrac{db_0}{ds}\dfrac{d\delta b}{ds}=-\dfrac{\delta\rho}{\rho_0^3},\\ a\delta a+b\delta b=0.\end{cases}$$

et feront connaître δa et δb, qui auront les mêmes valeurs que si la courbe ne s'était pas voilée.

IV. — *Formules relatives à la flexion et à la torsion simultanées d'une pièce homogène soumise à l'action de forces extérieures.*

Considérons une pièce homogène engendrée par un profil plan invariable qui reste normal à la courbe décrite par le centre de gravité de son aire, et de manière qu'un même rayon vecteur coïncide constamment avec la direction de courbure de la courbe qui est la fibre moyenne de la pièce.

Concevons une portion de la pièce limitée par une section normale déterminée.

Soient

O le centre de gravité de la section;

$O\eta$, $O\zeta$ ses axes principaux d'inertie;

$O\xi$ la tangente en O à la fibre moyenne;

I_η, I_ζ, I_ξ les moments d'inertie de la section par rapport aux axes $O\eta$, $O\zeta$, $O\xi$;

E, μ les coefficients d'élasticité et de glissement de la matière.

Sous l'action de forces extérieures, la portion considérée de la pièce se déformera; les éléments linéaires et les rayons de courbure et de torsion de la fibre moyenne éprouveront des variations. Mais, dans ce qui suit, nous négligerons les dilatations et contractions de la fibre moyenne, qui sont toujours très-petites.

Si nous transportons les forces extérieures parallèlement à elles-mêmes au point O, nous obtiendrons un couple dont l'axe se décomposera en deux autres; l'un $\mathfrak{M}_\xi$ suivant $O\xi$, l'autre $\mathfrak{M}_f$ situé dans le plan de la section. Le premier de ces moments est le moment de torsion et l'autre le moment fléchissant. Nous désignerons par ε l'angle formé avec $O\zeta$ par la trace du couple de moment $\mathfrak{M}_f$ sur le plan de la section.

Soient, après la déformation, ρ, τ les rayons de courbure et de torsion de la fibre moyenne; φ l'angle formé par la direction de ρ avec $O\eta$; nous distinguerons par l'indice o les quantités qui se rapportent à l'état naturel de la pièce.

On a, pour déterminer ρ et φ, les formules suivantes [*] :

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= \frac{1}{E}\sqrt{\frac{\left(\mathfrak{M}_f \sin\varepsilon + \frac{EI_\zeta}{\rho_0}\cos\varphi_0\right)^2}{I_\zeta^2} + \frac{\left(\mathfrak{M}_f \cos\varepsilon - \frac{EI_\eta}{\rho_0}\sin\varphi_0\right)^2}{I_\eta^2}}, \\ \operatorname{tang}\varphi &= \frac{\frac{\mathfrak{M}_f}{EI_\eta}\cos\varepsilon - \frac{\sin\varphi_0}{\rho_0}}{\frac{\mathfrak{M}_f}{EI_\zeta}\sin\varepsilon + \frac{\cos\varphi_0}{\rho_0}}. \end{aligned}\right.$$

Dans le cas où la direction du rayon de courbure ρ_0 coïncide avec celle de l'axe d'inertie $O\eta$ et où la trace du plan du couple fléchissant sur le plan de la section est perpendiculaire à la même direction, on a $\varepsilon = 0$, $\varphi_0 = 0$, par suite

$$(11')\qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0}\sqrt{1 + \frac{\mathfrak{M}_f^2\rho_0^2}{E^2I_\eta^2}},\quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{\mathfrak{M}_f\rho_0}{EI_\eta}.$$

Si $\mathfrak{M}_f$ et $\mathfrak{M}_\xi$ sont du même ordre de grandeur et si les effets de la torsion sont très-petits, la différence $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}$ sera du second ordre, de sorte que l'on pourra considérer la courbure comme n'ayant pas varié.

On doit à M. de Saint-Venant la formule suivante [**], qui fait

[*] *Voir* mon *Traité de Mécanique générale*, t. II, p. 110.

[**] Soient ab, bc, cd trois éléments consécutifs de la fibre moyenne à l'état naturel, pp et pp' les sections normales en b, c. Comme la déformation ne dépend que de déplacements relatifs, on peut considérer l'élément intermédiaire bc comme fixe. Les

connaître la variation éprouvée par la seconde courbure de la fibre moyenne

$$\mu I_\xi \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_0} + \frac{d\varphi}{ds}\right) = \mathfrak{M}_\xi. \tag{12}$$

Nous allons appliquer les formules qui précèdent à quelques exemples auxquels M. de Saint-Venant avait déjà appliqué ses formules, dès 1843.

V. — *Arc de cercle horizontal, dont l'une des extrémités est encastrée suivant un rayon et soumis à l'autre extrémité à l'action d'un poids.*

Nous supposerons que l'un des axes principaux d'inertie de la section coïncide avec la direction du rayon de courbure ρ_0 et que les

---

plans osculateurs abc, bcd entraînant avec eux pp et $p'p'$, se sont déplacés l'un par rapport à l'autre de

$$\frac{ds}{\tau} - \frac{ds}{\tau_0}.$$

Les formules (11) supposent que l'angle φ décroît quand $\mathfrak{M}_\xi$ augmente.

Le plan pp s'est donc déplacé par rapport au plan abc de $\varphi_0 - \varphi$, et $p'p'$, par rapport à bcd, de $\varphi_0 - \left(\varphi + \frac{d\varphi}{ds}\right)$; d'où il résulte que le déplacement angulaire total de $p'p'$ par rapport à pp est

$$ds\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_0} - \frac{d\varphi}{ds}\right).$$

L'angle de torsion est ainsi

$$\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_0} - \frac{d\varphi}{ds}.$$

La force de torsion développée dans l'élément $d\omega$ de pp, situé à la distance r de bc, étant

$$\mu r\, d\omega \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_0} + \frac{d\varphi}{ds}\right),$$

on a, pour le moment de torsion,

$$\mu\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_0} - \frac{d\varphi}{ds}\right) \int r^2 d\omega.$$

déplacements sont très-petits. D'après la première des formules (11'), on pourra négliger la variation éprouvée par la courbure.

Soient

A l'encastrement;

AB la fibre moyenne à l'état naturel;

P le poids qui est adapté à l'extrémité B;

θ_1 l'angle au centre AOB;

θ l'angle formé avec OA pris pour axe des x, par un rayon Om mené en un point quelconque m de l'arc;

Oz la verticale du point O.

Nous avons

$$ds = \rho_0 d\theta, \quad \frac{1}{\tau_0} = 0, \quad \varphi_0 = 0, \quad \varepsilon = 0,$$

$$\mathfrak{M}_f = -\,P\rho_0 \sin(\theta_1 - \theta), \quad \mathfrak{M}_\xi = P\rho_0[1 - \cos(\theta_1 - \theta)],$$

et, d'après la seconde des formules (11').

$$\tang\varphi = -\frac{P\rho_0^2}{EI_\eta}\sin(\theta_1 - \theta);$$

d'où, en remarquant que, par hypothèse, φ est un petit angle,

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{P\rho_0}{EI_\eta}\cos(\theta_1 - \theta).$$

Si nous posons

$$(a) \qquad \frac{P\rho_0}{\mu I_\xi} = \frac{1}{h}, \quad P\rho_0\left(\frac{1}{EI_\eta} - \frac{1}{\mu I_\xi}\right) = \frac{1}{k},$$

la formule (12) donne

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{h} + \frac{1}{k}\cos(\theta_1 - \theta).$$

Nous avons maintenant

$$\alpha_0 = 90^\circ + \theta, \quad \beta_0 = -\,\theta, \quad a_0 = -\sin\theta, \quad b_0 = \cos\theta,$$

$$\frac{da_0}{d\theta} = -\cos\theta, \quad \frac{db_0}{d\theta} = -\sin\theta, \quad .$$

et, en raison de l'encastrement, les conditions

$$\delta a'' = 0, \quad \delta b'' = 0, \quad \delta c'' = 0, \quad \delta c = 0 \quad \text{pour} \quad \theta = 0.$$

Les formules (8) donnent, par suite,

$$(13)\left\{\begin{aligned}
\delta a'' &= -\rho_0 \int_0^\theta \left[\frac{1}{h} + \frac{1}{k}\cos(\theta_1 - \theta)\right]\cos\theta\, d\theta \\
&= -\frac{\rho_0}{h}\sin\theta - \frac{\rho_0}{2k}\left[\theta\cos\theta_1 - \frac{1}{2}\sin(\theta_1 - 2\theta) + \frac{1}{2}\sin\theta_1\right], \\
\delta b'' &= -\rho_0 \int_0^\theta \left[\frac{1}{h} + \frac{1}{k}\cos(\theta_1 - \theta)\right]\sin\theta\, d\theta \\
&= -\frac{\rho_0}{h}(1 - \cos\theta) - \frac{\rho_0}{2k}\left[\theta\sin\theta_1 + \frac{1}{2}\cos(\theta_1 - 2\theta) - \frac{1}{2}\cos\theta_1\right].
\end{aligned}\right.$$

En portant ces valeurs dans la formule (9), on trouve

$$\begin{aligned}
\delta c &= \frac{\rho_0}{h}(1 - \cos\theta) \\
&\quad + \frac{\rho_0}{2k}\left[-\theta\sin(\theta_1 - \theta) - \frac{1}{6}\cos(\theta_1 - 3\theta) + \frac{3}{2}\cos(\theta_1 - \theta)\right],
\end{aligned}$$

et enfin on a

$$\begin{aligned}
\delta z = \rho_0 \int_0^\theta \delta c\, d\theta = \frac{\rho_0^2}{h}(\theta - \sin\theta) + \frac{\rho_0^2}{2k}\Big[&-\theta\cos(\theta_1 - \theta) - \frac{5}{2}\sin(\theta_1 - \theta) \\
&+ \frac{1}{18}\sin(\theta_1 - 3\theta) - \frac{22}{9}\sin\theta_1\Big],
\end{aligned}$$

équation qui détermine la forme de la courbe en projection sur les plans zOx et zOy.

VI. — *Cercle reposant par les deux extrémités d'un même diamètre sur deux appuis de niveau et soumis à l'action de deux poids égaux accrochés aux extrémités du diamètre perpendiculaire au précédent.*

Soient

O le centre du cercle;

A l'un des points d'appui;

B le point de l'un des demi-cercles où est suspendu un poids $2P$.

Prenons les directions de OA et OB pour celles des axes des x et des y. Comme dans la question précédente, nous pourrons négliger la variation de la courbure.

En raison de la symétrie, il ne se développera pas de couple de torsion dans la section B. En considérant le demi-cercle limité par le point B et le point qui lui est diamétralement opposé, on reconnaît sans peine qu'il ne se développe, dans les deux sections extrêmes, ni résultante, ni couples élastiques. La force qui agit sur chaque quart de cercle est P et nous poserons, comme plus haut,

$$\frac{P\rho_0}{\mu I_\xi} = \frac{1}{h}, \quad P\rho_0\left(\frac{1}{EI_\eta} - \frac{1}{\mu I_\xi}\right) = \frac{1}{k}.$$

On remarquera que l'axe du plan osculateur au point B reste dans le plan yOz après la déformation, de sorte que, pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\delta a''$ est nul, et $\delta b''$ prend une certaine valeur qui doit résulter de la solution du problème. En partant de là, on déduit facilement des formules (13), en y supposant $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$,

$$\delta a'' = \frac{\rho_0}{h}(1 - \sin\theta) + \frac{\rho_0}{4k}(1 + \cos 2\theta),$$

$$\delta b'' = \frac{\rho_0}{h}\cos\theta - \frac{\rho_0}{2k}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) + C,$$

C étant une constante.

La formule (9) donne, par suite, en exprimant que δc est nul pour $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned}\delta c = &- \frac{\rho_0}{h}(1 - \sin\theta - \cos\theta)\\ &+ \frac{\rho_0}{2k}\left[-\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{1}{6}\sin 3\theta + \theta\cos\theta + \frac{2}{3}(1 - \cos\theta)\right].\end{aligned}$$

On trouve ensuite, en remarquant que δz est nul pour $\theta = 0$,

$$\begin{aligned}\delta z = &- \frac{\rho_0}{h}(\theta + \cos\theta - \sin\theta - 1)\\ &+ \frac{\rho_0}{2k}\left(\frac{3}{2}\cos\theta - \frac{1}{18}\cos 3\theta + \theta\sin\theta + \frac{2}{3}\theta - \frac{2}{3}\sin\theta - \frac{13}{9}\right).\end{aligned}$$

La flèche f ou la valeur δz pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ a pour valeur

$$f = \frac{\rho_0}{h}\left(2 - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\rho_0}{2k}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{19}{9}\right).$$

Les considérations précédentes sont applicables au cas d'un demi-cercle horizontal dont les extrémités seraient encastrées.

VII. — *Ressort à boudin vertical encastré par son extrémité supérieure et à l'autre extrémité duquel est accroché un poids.*

Nous ne considérerons que le cas des faibles déformations, le seul dans lequel on puisse arriver à quelques résultats intéressants.

Soient

i l'inclinaison de l'hélice sur l'horizon ;

R le rayon du cylindre sur lequel elle est tracée;

Ox, Oy deux droites rectangulaires passant par le centre O de la base supérieure du cylindre, comprises dans le plan de cette base, dont la première passe par l'encastrement A;

θ l'angle formé avec Ox par le rayon mené à la projection n, sur le plan xOy, d'un point quelconque m de l'hélice;

$2n\pi$ la valeur de θ correspondant à l'extrémité libre du ressort où est accroché le poids P, n étant un nombre entier.

En négligeant la déformation, le point d'application de P est projeté en A.

Nous avons

$$\rho_0 = \frac{R}{\cos^2 i},\quad \tau_0 = \frac{R}{\sin i \cos i},\quad \frac{\rho_0}{\tau_0} = \operatorname{tang} i,\quad s = \frac{R\theta}{\cos i},\quad ds = \frac{R}{\cos i}\,d\theta,$$

$$a_0 = -\sin\theta\cos i,\qquad b_0 = \cos\theta\cos i,\qquad c_0 = \sin i,$$

$$\frac{da_0}{d\theta} = -\cos\theta\cos i,\quad \frac{db_0}{d\theta} = -\sin\theta\cos i,\quad \frac{dc_0}{d\theta} = 0,$$

$$a''_0 = \sin\theta\sin i,\qquad b''_0 = -\cos\theta\sin i,\quad c''_0 = \cos i.$$

Le moment du couple obtenu, en transportant la force P parallèlement à elle-même en m ou n, se décompose en deux autres, l'un, PR $\sin\theta$, dont l'axe est nO, et l'autre, PR$(1-\cos\theta)$, dont l'axe est la tangente en n à la circonférence de la base du cylindre. Ce dernier se décompose lui-même en deux autres, l'un PR$(1-\cos\theta)\cos i$, suivant la tangente à l'hélice qui produit la torsion, et l'autre PR$(1-\cos\theta)\sin i$, suivant la perpendiculaire au plan osculateur, et qui diminue la courbure de la pièce. Il résulte de là que l'on a

$$\mathfrak{M}_\xi = \mathrm{PR}(1-\cos\theta)\cos i,$$

et que le moment fléchissant se compose des deux suivants (4) :

$$(b)\quad \mathfrak{M}_f \cos\varepsilon = \mathrm{PR}\sin\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{suivant } Ox,$$

$$(e)\quad \mathfrak{M}_f \sin\varepsilon = -\mathrm{PR}(1-\cos\theta)\sin i \ldots \quad \left\{\begin{array}{l}\text{suivant la perpendiculaire}\\ \text{au plan osculateur.}\end{array}\right.$$

Si nous supposons que la section de la pièce ait un axe principal d'inertie dirigé suivant le rayon de courbure, nous aurons $\varphi_0 = 0$, et les formules (11) et (12) nous donneront, en continuant à négliger les quantités du second ordre,

$$\delta\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = -\frac{\mathrm{PR}(1-\cos\theta)\sin i}{\mathrm{EI}_\zeta},$$

$$\tang\varphi = \frac{\mathrm{PR}^2\sin\theta}{\mathrm{EI}_\eta\cos^2 i},$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\mathrm{PR}\cos\theta}{\mathrm{EI}_\eta\cos i},$$

$$\delta\frac{1}{\tau} = \mathrm{PR}\left[\frac{(1-\cos\theta)\cos i}{\mu \mathrm{I}_\xi} + \frac{\cos\theta}{\mathrm{EI}_\eta\cos i}\right].$$

On déduit de là

$$\delta\frac{\rho}{\tau} = \rho_0\delta\frac{1}{\tau} - \frac{\rho_0^2}{\tau_0}\delta\frac{1}{\rho} = \frac{\mathrm{PR}^2}{\cos i}\left(\frac{1}{\mu \mathrm{I}_\xi} + \frac{\tang^2 i}{2\mathrm{EI}_\zeta}\right)$$
$$+ \frac{\mathrm{PR}^2}{\cos i}\left(\frac{1}{\mathrm{EI}_\eta\cos^2 i} - \frac{\tang^2 i}{\mathrm{EI}_\zeta} - \frac{1}{\mu \mathrm{I}_\xi}\right)\cos\theta.$$

Si nous posons

$$A = \frac{PR^2}{\cos i}\left(\frac{1}{\mu I_\xi} + \frac{\operatorname{tang}^2 i}{EI_\xi}\right),$$

$$B = \frac{PR^2}{\cos i}\left(\frac{1}{EI_\eta \cos^2 i} - \frac{\operatorname{tang}^2 i}{EI_\zeta} - \frac{1}{\mu I_\xi}\right)\cos\theta,$$

les trois premières des formules (5) donnent

$$\frac{d\delta a''}{d\theta} = \frac{d\delta a}{d\theta}\operatorname{tang} i - \left(A\cos\theta - \frac{B}{2}\cos 2\theta + \frac{B}{2}\right)\cos i,$$

$$\frac{d\delta b''}{d\theta} = \frac{d\delta b}{d\theta}\operatorname{tang} i - \left(A\sin\theta + \frac{B}{2}\sin 2\theta\right)\cos i,$$

$$\frac{d\delta c''}{d\theta} = \frac{d\delta c}{d\theta}\operatorname{tang} i.$$

On déduit de là, en remarquant que, en raison de l'accroissement, les variations sont nulles pour $\theta = 0$,

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &\delta a'' = \delta a \operatorname{tang} i - \left(A\sin\theta - \frac{B}{4}\sin 2\theta + \frac{B}{4}\theta\right)\cos i,\\ &\delta b'' = \delta b \operatorname{tang} i + \left(A\cos\theta + \frac{B}{4}\cos 2\theta - A - \frac{B}{4}\right)\cos i,\\ &\delta c'' = \delta c \operatorname{tang} i.\end{aligned}\right.$$

Posons encore $C = \frac{P}{EI_\zeta}\cos^4 i \sin i$.

La quatrième des équations (5′) et les équations (6′) deviennent

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\theta\frac{d\delta a}{d\theta} + \sin\theta\frac{d\delta b}{d\theta} &= + C(1-\cos\theta),\\ -\sin\theta\,\delta a + \cos\theta\,\delta b + \sin i\,\delta c &= 0,\\ \sin i \sin\theta\,\delta a'' - \sin i\cos\theta\,\delta b'' + \cos i\,\delta c'' &= 0.\end{aligned}\right.$$

En remplaçant dans la dernière de ces équations $\delta c''$ par sa valeur déduite de la troisième des équations (15), elle devient

$$(17)\qquad \delta c = -\sin\theta\,\delta a'' + \cos\theta\,\delta b'',$$

et, en portant cette valeur dans la seconde,

$$(\delta a + \sin i\,\delta a'')\sin\theta - (\delta b + \sin i\,\delta b'')\cos\theta = 0.$$

Si l'on remplace dans cette formule $\delta a''$ et $\delta b''$ par leurs valeurs (15), on trouve

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} \sin\theta\,\delta a - \cos\theta\,\delta b \\ \quad -\left[A + \frac{B}{4}\cos 3\theta + \frac{B}{2}\theta\sin\theta - \left(A + \frac{B}{4}\right)\cos\theta\right]\sin i\cos^2 i = 0. \end{array}\right.$$

Posons, pour simplifier,

$$f(\theta) = \left[A + \frac{B}{4}\cos 3\theta + \frac{B}{2}\theta\sin\theta - \left(A + \frac{B}{4}\right)\cos\theta\right]\sin i\cos^2 i;$$

nous aurons

$$(19)\qquad \sin\theta\,\delta a - \cos\theta\,\delta b - f(\theta) = 0,$$

et, en différentiant,

$$\cos\theta\,\delta a + \sin\theta\,\delta b + \sin\theta\frac{d\,\delta a}{d\theta} - \cos\theta\frac{d\,\delta b}{d\theta} - f'(\theta) = 0.$$

De cette équation et de la première des équations (16) on tire

$$(20)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{d\,\delta a}{d\theta} + \sin\theta\cos\theta\,\delta a + \sin^2\theta\,\delta b - f'(\theta)\sin\theta = C(1 - \cos\theta)\cos\theta, \\ \frac{d\,\delta b}{d\theta} - \cos^2\theta\,\delta a - \sin\theta\cos\theta\,\delta b + f'(\theta)\cos\theta = C(1 - \cos\theta)\sin\theta. \end{array}\right.$$

Les équations (19) et (20) permettent de séparer δa et δb, et donnent

$$\frac{d\,\delta a}{d\theta} + \delta a\tang\theta - f(\theta)\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} - f'(\theta)\sin\theta - C(1 - \cos\theta)\cos\theta = 0,$$

$$\frac{d\,\delta b}{d\theta} - \delta b\cot\alpha - f(\theta)\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} + f'(\theta)\cos\theta - C(1 - \cos\theta)\sin\theta = 0;$$

d'où

$$(21)\quad \begin{cases} \delta a = \cos\theta \displaystyle\int_0^\theta [f(\theta)\tang^2\theta + f'(\theta)\tang\theta + C(1-\cos\theta)]\,d\theta, \\ \delta b = \sin\theta \displaystyle\int_0^\theta [f(\theta)\cot^2\theta - f'(\theta)\cot\theta + C(1-\cos\theta)]\,d\theta. \end{cases}$$

En effectuant les intégrations, on trouve

$$(22)\quad \begin{cases} \delta a = \frac{1}{2}\sin 2i\cos i\Big[A(\sin\theta - \theta\cos\theta) - \frac{B}{4}\sin 2\theta \\ \qquad + \frac{B}{12}(\sin 4\theta - \sin 2\theta) + \frac{B\theta}{2}\Big] \\ \qquad + c(\theta - \sin\theta)\cos\theta, \\ \delta b = \frac{1}{2}\sin 2i\cos i\Big[-A(\theta\sin\theta + \cos\theta) - \frac{B}{4}(1-\cos 2\theta) \\ \qquad + \frac{B}{12}(\cos 2\theta - \cos 4\theta) + A\Big] \\ \qquad + c(\theta - \sin\theta)\sin\theta. \end{cases}$$

En portant ces valeurs dans la seconde des équations (16), on trouve

$$\delta c = \cos^2 i\Big[A(1-\cos\theta) + \frac{B}{12}(\cos 5\theta - \cos 3\theta)\Big].$$

On déduit de là

$$\delta z = R\cos i\Big[A(\theta - \sin\theta) + \frac{B}{12}\Big(\frac{1}{5}\sin 5\theta - \frac{1}{3}\sin 3\theta\Big)\Big].$$

Soit λ l'allongement du ressort ou la valeur de δx pour $\theta = 2n\pi$, on a

$$\lambda = R\cos i\, 2n\pi A,$$

ou, en remplaçant A par son expression (14),

$$\lambda = PR^3\Big(\frac{1}{\mu I_\xi} + \frac{\tang^2 i}{EI_\zeta}\Big)2n\pi,$$

formule dont on peut déduire des conséquences intéressantes quand la section du ressort est circulaire ou carrée.

Des formules (22) on déduit aussi

$$\begin{aligned}
\delta x = \frac{R}{2}\sin 2i\Big[& -A(2\cos\theta + \theta\sin\theta) + \frac{B}{8}\cos 2\theta \\
& - \frac{B}{24}\left(\frac{1}{2}\cos 4\theta - \cos 2\theta\right) + \frac{B\theta^2}{4} + 2A - \frac{7}{48}B\Big] \\
& + \frac{CR}{\cos i}\left(\theta\sin\theta + \cos\theta + \frac{1}{4}\cos 2\theta - \frac{5}{4}\right), \\
\delta y = \frac{R}{2}\sin 2i\Big[& -A\theta\cos\theta + \left(A - \frac{B}{4}\right)\theta + \frac{B}{8}\sin 2\theta + \frac{24}{B}\left(\sin 2\theta - \frac{\sin 4\theta}{2}\right)\Big] \\
& + \frac{CR}{\cos i}\left(-\theta\cos\theta + \sin\theta - \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right),
\end{aligned}$$

pour les variations qui caractérisent la déformation transversale.