JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉDOUARD SELLING

Des formes quadratiques binaires et ternaires

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 3 (1877), p. 21-60.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1877_3_3__21_0>

Des formes quadratiques binaires et ternaires [*];

PAR M. ÉDOUARD SELLING,
à Würzbourg.

(Revu et augmenté par l'auteur.)

Le but final des présentes recherches est la solution du problème posé, III, article 278 des *Disquisitiones arithmeticæ* de Gauss : *Déterminer si des formes quadratiques ternaires sont équivalentes les unes aux autres et établir toutes les substitutions, au moyen desquelles dans ce cas elles se changent les unes en les autres.* En ce qui concerne les formes définies, la première partie de ce problème a d'abord reçu sa solution de Seeber (*Recherches sur les propriétés des formes quadratiques ternaires positives*, Fribourg, 1831). Après que Gauss (*Comptes rendus de l'Académie de Göttingue*, 1831, article réimprimé dans le *Journal de Crelle*, t. 20, et *OEuvres*, t. II) eut traité des rapports géométriques, une solution plus simple fut donnée par Dirichlet (*Journal de Crelle*, t. 40), et par M. Hermite (*ibid.*); quant à la deuxième partie, elle a été résolue par Eisenstein (*Journal de Crelle*, t. 41). Nous avons, pour les formes quadratiques ternaires indéfinies, les recherches de M. Hermite (*Journal de Crelle*, t. 47), recherches qui toutefois, comme on le verra aux détails, sont susceptibles de quelques compléments et développements.

Je donne un nouvel exposé relativement aux formes ternaires dé-

[*] Nous avons voulu, par la publication de ce travail, tiré du *Journal* de M. Borchardt (t. 77), donner un témoignage de l'importance que nous attachons aux études arithmétiques, en suivant ainsi l'exemple qui nous a été tracé par M. Liouville, dont de nombreux et importants travaux ont pour objet la théorie des formes quadratiques. Nous saisissons aussi l'occasion de recommander au lecteur de rapprocher des recherches de M. Selling le Mémoire de Bravais, publié dans le *Journal de l'École Polytechnique*, XXX[e] Cahier, sous ce titre : *Sur les systèmes formés par des points distribués régulièrement sur un plan ou dans l'espace.* (H. R.)

finies comme introduction à l'étude des formes ternaires indéfinies, et relativement aux formes binaires comme introduction et type pour la manière de traiter les formes ternaires en général.

I. — Formes binaires définies.

Nouvelles conditions de réduction. — Coefficients homogènes. — Rapports géométriques.

Dès que, dans une forme quadratique $\mathfrak{a}x^2 + 2\mathfrak{k}xy + \mathfrak{b}y^2$, que je désigne aussi par $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})(x, y)$ ou par $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ et dans laquelle $\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b}$, x et y doivent représenter des grandeurs réelles quelconques, l'invariant $\mathfrak{ab} - \mathfrak{k}^2$, que je remplace par I, est positif aussi bien qu'un des coefficients extrêmes, par exemple $\mathfrak{a}$, cette forme ne peut représenter que des valeurs positives; aussi prend-elle alors le nom de *forme positive*. Dans les substitutions $x = \alpha x' + \beta y'$, $y = \gamma x' + \delta y'$, au moyen desquelles une forme $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})(x, y)$ se change en $(\mathfrak{a}', \mathfrak{k}', \mathfrak{b}')(x', y')$, substitutions que je désigne par $\begin{vmatrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}$, les nombres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ seront réels et entiers; de plus, tant qu'une autre valeur n'aura pas été statuée formellement, le déterminant de la substitution $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ sera égal à 1. Le problème de délimiter une forme, prise dans les formes d'*une* classe, ou, ce qui est la même chose, dans toutes les formes équivalentes proprement dites, c'est-à-dire résultant l'une de l'autre au moyen des substitutions indiquées, a déjà reçu une solution satisfaisante de Lagrange (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1773) et la même de Gauss (*Disquisitiones arithmeticæ*) qui a introduit pour cette forme le nom de *forme réduite*. Les conditions établies par eux $-\mathfrak{a} \overset{=}{<} 2\mathfrak{k} \leqq \mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$ pour une pareille forme réduite $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ font que $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont les deux plus petits nombres que les formes peuvent représenter proprement, c'est-à-dire au moyen de nombres entiers premiers entre eux x et y. Il en résulte immédiatement que, parmi les formes d'*une* classe, il y a toujours une pareille forme réduite, une seule, quand l'inégalité existe dans les trois conditions, tandis qu'il y a deux de ces formes différant, en général, entre elles numériquement, qui résultent l'une de l'autre par l'une des deux substitutions $\begin{vmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, ou par les deux à la fois, quand l'égalité existe dans une ou dans deux des trois conditions.

Toutefois le problème indiqué n'est pas de nature à ne recevoir qu'une seule solution; je préférerai donc, pour mon objet particulier, *d'autres conditions de réduction,* savoir que $\mathfrak{k}$ *n'est pas positif, ni* $-\mathfrak{k}$ *plus grand que* $\mathfrak{a}$ *ou* $\mathfrak{b}$. Il est vrai que ces conditions sont réalisées dans chaque classe non-seulement par une forme, mais toujours par trois. Soit $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ l'une d'elles et posons $\mathfrak{a} + \mathfrak{h} + \mathfrak{k} = 0$, $\mathfrak{b} + \mathfrak{k} + \mathfrak{g} = 0$, $\mathfrak{c} + \mathfrak{g} + \mathfrak{h} = 0$, d'où $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + 2\mathfrak{g} + \mathfrak{c}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{c} + 2\mathfrak{h} + \mathfrak{a}$, $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + 2\mathfrak{k} + \mathfrak{b}$; elles seront $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$, $(\mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{c})$ et $(\mathfrak{c}, \mathfrak{h}, \mathfrak{a})$, et ces trois formes, à l'aide de la substitution $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$, résultent cycliquement l'une de l'autre. Mais l'inconvénient qui paraît exister ici disparaît si l'on exprime symétriquement les formes par $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ ou par $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}$; savoir, si l'on pose $y - z = u$, $z - x = v$, $x - y = w$, d'où il s'ensuit que $u + v + w = 0$, et si l'on admet préalablement $z = 0$, on aura

$$\mathfrak{a}x^2 + 2\mathfrak{k}xy + \mathfrak{b}y^2 = -\mathfrak{a}vw - \mathfrak{b}wu - \mathfrak{c}uv = -\mathfrak{g}u^2 - \mathfrak{h}v^2 - \mathfrak{k}w^2.$$

Comme toutefois les deux dernières expressions ne changent pas quand x, y et z sont augmentés ou diminués de la même quantité, et comme la substitution $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ produit simplement une permutation cyclique entre les nombres $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, et entre les nombres $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}$, il n'existe pas de différence essentielle entre les trois formes $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$, $(\mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{c})$, $(\mathfrak{c}, \mathfrak{h}, \mathfrak{a})$, qui réalisent en même temps mes *conditions de réduction*. Ces dernières consistent simplement en ce que *des trois nombres* $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ *aucun n'est positif,* ou, ce qui revient au même, que des trois nombres positifs $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, la somme de deux ne devient pas moindre que le troisième. Si l'on atteint à une limite de ces conditions et que l'on ait par exemple $\mathfrak{k} = 0$, les formes pareillement réduites $(\mathfrak{b}, \mathfrak{k}, \mathfrak{a})$, $(\mathfrak{a}, \mathfrak{h}, \mathfrak{c})$, $(\mathfrak{c}, \mathfrak{g}, \mathfrak{b})$, qui dans le cas général ne sont équivalentes aux formes $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$, $(\mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{c})$, $(\mathfrak{c}, \mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ qu'improprement, c'est-à-dire par une substitution ayant le déterminant -1, et qui en résultent par des permutations non cycliques entre $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ et entre $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}$, leur deviennent alors proprement équivalentes. Outre les formes réduites indiquées, il ne peut y en avoir d'autres pareilles dans la même classe : c'est ce qui résulte de ce que, si $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ est une forme réduite, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ sont les plus petites quantités qu'on puisse représenter proprement par les formes de la classe, c'est-à-dire par des nombres u, v, w, premiers entre eux. La plus grande d'entre elles peut être exprimée encore d'une autre manière dans un cas exceptionnel, savoir, lorsque l'on a atteint une limite des conditions de réduction. Car, si parmi les trois quantités u, v, w, dont la somme est nulle, l'une est égale à zéro, les deux autres ne peuvent être que 1 et -1, sans quoi elles auraient un diviseur commun; mais, si aucune n'est égale à zéro, alors $-\mathfrak{g}u^2-\mathfrak{h}v^2-\mathfrak{k}w^2$, où $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ sont négatifs, devient plus grand que dans les cas indiqués. Et pour le cas limite, quand une des quantités $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$ est égale à zéro, quand par exemple $\mathfrak{k}=0$, la quantité $\mathfrak{c}$ est, en outre, donnée par le système des valeurs $1, 1, -2$, ou $-1, -1, 2$, de u, v, w. De l'autre côté, il est facile de voir que, dans toutes les classes, il y a des formes réduites; on voit aussi comment on peut les trouver. Il est en effet impossible que plus d'une des quantités $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ soit positive ou nulle, la somme de deux quelconques étant toujours négative, et, pourvu que $\mathfrak{k}$ soit <0, ce qu'en cas de besoin on peut obtenir par l'emploi de la substitution $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, de toute forme non réduite $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$, on obtient finalement une réduite, si on lui applique, à elle comme à toutes les formes suivantes, la substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ ou $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, suivant que $\mathfrak{g}$ ou $\mathfrak{h}$ y est positif. En effet, au moyen de ces substitutions, $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ se changent respectivement en $\mathfrak{k}+2\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}+2\mathfrak{g}$, $-\mathfrak{g}$ et en $\mathfrak{g}+2\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}+2\mathfrak{h}$, $-\mathfrak{h}$, et tant qu'une des quantités nouvellement obtenues deviendra positive aussi, elle sera néanmoins, $\mathfrak{k}+\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}+\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}+\mathfrak{k}$ étant négatives, plus petite que la positive de la forme précédente, de sorte que finalement toutes les trois deviendront nécessairement négatives ou nulles. On peut en outre aisément prévoir combien de fois il faudra répéter la même d'entre les substitutions indiquées, jusqu'à ce que le nouveau coefficient, remplaçant celui qui était supposé positif, devienne nul ou négatif; en d'autres termes, quelles sont les différentes valeurs positives de γ et de β dans les substitutions $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ qu'il faudra employer alternativement. Ce sont, en effet, les plus petits nombres qui rendent respectivement nuls ou négatifs $\mathfrak{g}-\gamma\mathfrak{b}$, $\mathfrak{h}-\beta\mathfrak{a}$. Les valeurs correspondantes de $\mathfrak{k}$ sont d'ailleurs respectivement $\mathfrak{k}+\gamma\mathfrak{b}$, $\mathfrak{k}+\beta\mathfrak{a}$. On pourra ensuite déterminer chaque fois le troisième coefficient non-seulement d'une manière directe, mais encore d'après les deux autres, à l'aide de l'équation $\mathfrak{hk}+\mathfrak{kg}+\mathfrak{gh}=I$. A propos de cette équation et des deux suivantes :

$$\mathfrak{ag}+\mathfrak{bh}+\mathfrak{ck}=-2I$$

et

$$\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2+\mathfrak{c}^2-2(\mathfrak{bc}+\mathfrak{ca}+\mathfrak{ab})=(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}-\mathfrak{c})^2-4\mathfrak{ab}=-4I$$

remarquons encore qu'elles fournissent des conditions de limite pour les coefficients des formes réduites qui prouvent, s'ils sont entiers, que, l'invariant étant donné, le nombre des classes est fini.

Les formes binaires positives ne se changent en général en elles-mêmes que par la substitution $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$, mais il y a des exceptions, résultant de l'égalité entre deux des coefficients $\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}$ ou $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$; car alors les formes deviennent improprement équivalentes à elles-mêmes. Par exemple, $\mathfrak{a}$ étant égal à $\mathfrak{b}$, la forme $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ se change en elle-même au moyen de la substitution $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$. En cas de réunion de pareilles relations, qui ne peut avoir lieu que pour des formes réduites, c'est-à-dire quand $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}=\mathfrak{c}$, les formes réduites sont par conséquent encore une fois proprement équivalentes à elles-mêmes, savoir, au moyen de la substitution $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$, qui, trois fois employée, donne la substitution $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$. Si un des coefficients $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$ devient égal à zéro, ce qui ne peut non plus arriver que pour des formes réduites, les formes sont improprement équivalentes à elles-mêmes, par exemple, $\mathfrak{k}$ étant égal à zéro, la forme $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ au moyen de la substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$. Si ce cas se joint avec $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}$ ou $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$, la réunion des substitutions qui leur correspondent donne la substitution $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, au moyen de laquelle $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ devient proprement équivalente à elle-même.

La réduction des formes indéfinies, que je ramène à celle des formes positives, peut être exposée, ce qui à vrai dire n'acquiert une importance décisive qu'à propos des formes ternaires, d'une manière très-claire par l'emploi des considérations géométriques, telles que, pour les formes positives, elles ont été publiées pour la première fois par Gauss dans le Recueil cité plus haut. J'ai d'abord à faire ressortir la signification géométrique de mes conditions de réduction des formes binaires positives. Aux diverses valeurs entières x et y dans la forme $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})(x, y)$ répondent divers points d'intersection de deux systèmes illimités de lignes droites parallèles équidistantes placées dans un plan sur lesquelles les longueurs $\sqrt{\mathfrak{a}}$, $\sqrt{\mathfrak{b}}$ sont les distances de deux points consécutifs, tandis que le cosinus de l'angle compris entre les directions dans le sens positif de ces droites est égal à $\frac{\mathfrak{k}}{\sqrt{\mathfrak{a}}\sqrt{\mathfrak{b}}}$: donc l'aire des parallélogrammes formés par leurs intersections est égale à $\sqrt{I}$. Relativement à une forme $(\mathfrak{a}', \mathfrak{k}', \mathfrak{b}')$ provenant de $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ au moyen d'une substitution $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$, le système des points subsiste, mais les côtés des parallélogrammes se modifient. En effet, la droite $\sqrt{\mathfrak{a}'}$ est située de telle sorte que, d'une de ses extrémités à l'autre, on arrive en parcourant α fois la ligne $\sqrt{\mathfrak{a}}$ et γ fois la ligne $\sqrt{\mathfrak{b}}$; il en est de même de $\sqrt{\mathfrak{b}'}$, quand on change α, γ en β, δ. Comme il en est de même de $\sqrt{\mathfrak{c}'}$ quand on change α, γ en $-\alpha-\beta, -\gamma-\delta$, on reconnaît la signification de $\mathfrak{k}'$ analogue à celle de $\mathfrak{k}$. Comme la forme $(\mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{c})$ doit provenir de la forme $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$, par la substitution $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$, on revient au point de départ, quand on parcourt successivement chacune des distances $\sqrt{\mathfrak{a}}$, $\sqrt{\mathfrak{b}}$, $\sqrt{\mathfrak{c}}$, soit dans la direction positive, soit dans la direction négative. Telle est donc la signification géométrique de mes conditions de réduction $\mathfrak{g} \leqq 0$; $\mathfrak{h} \leqq 0$; $\mathfrak{k} \leqq 0$, que les angles extérieurs du triangle formé par les trois lignes $\sqrt{\mathfrak{a}}$, $\sqrt{\mathfrak{b}}$, $\sqrt{\mathfrak{c}}$ sont obtus, et que par conséquent ce triangle est acutangle, suivant l'expression usitée. Il suit de ce qui vient d'être dit qu'il n'existe qu'*un* système de trois pareilles lignes d'une grandeur parfaitement déterminée si, comme l'exige l'équivalence, ces trois lignes ne franchissent pas des points du système et n'en enferment pas dans l'intérieur du triangle. Le système des points coïncide avec lui-même non-seulement après tous les déplacements parallèles par lesquels deux points quelconques coïncident, mais aussi après des rotations dans le plan autour d'un point du système en autant de positions qu'il y a de substitutions différentes, au moyen desquelles les formes sont proprement équivalentes à elles-mêmes. Ainsi généralement deux positions, quand je compte la position primitive et la substitution $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$, dans le cas où l'on suppose $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}=\mathfrak{c}$ six positions, et dans les suivants, $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$, $\mathfrak{k}=0$ ou $\mathfrak{b}=\mathfrak{c}$, $\mathfrak{g}=0$ ou enfin $\mathfrak{c}=\mathfrak{a}$, $\mathfrak{h}=0$ quatre positions. Quand les formes sont improprement équivalentes à elles-mêmes, les coïncidences ont lieu pareillement après des mouvements de rotation du système autour de droites tracées sur son plan. On peut se figurer le passage d'un point du système à un autre par un parcours x fois répété de $\sqrt{\mathfrak{a}}$, y fois de $\sqrt{\mathfrak{b}}$ et z fois de $\sqrt{\mathfrak{c}}$; dans ce cas, si l'on modifie x, y et z en y ajoutant un seul et même nombre, cela n'exerce aucune influence sur la position du point final. Si l'on fait x, y ou z constamment égaux à zéro, cela correspond à la représentation ordinaire par les formes $(\mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{c})$, $(\mathfrak{c}, \mathfrak{h}, \mathfrak{a})$ ou $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$. Si l'on attribue aux lignes $\sqrt{\mathfrak{a}}$, $\sqrt{\mathfrak{b}}$, $\sqrt{\mathfrak{c}}$, outre la direction positive ou négative, un côté positif ou négatif et si l'on considère chaque fois comme positif le côté sur lequel est placé le triangle précité, quand les trois côtés sont parcourus dans l'ordre indiqué, suivant la direction positive, la différence $y-z$, désignée par u, indiquera dans laquelle des lignes parallèles à $\sqrt{\mathfrak{a}}$ se trouvera le point final en question, en commençant par la ligne qui passe par le point de départ et en marchant dans le sens positif; les différences $z-x$, $x-y$, représentées par v, w, donneront des indications analogues

II. — Formes binaires indéfinies.

a. — Les conditions de réduction ramenées à celles des formes positives.

Les résultats précédents se retrouvent en appliquant à l'un des facteurs complexes conjugués $\rho x+\sigma y$, $\rho' x+\sigma' y$ de la forme $\mathfrak{a}x^2+2\mathfrak{k}xy+\mathfrak{b}y^2$, la méthode de construction des quantités imaginaires données par Gauss lui-même en 1831, et antérieurement par Argand dès 1806. A l'égard de ces quantités $\rho=\xi+\xi_1 i$, $\sigma=\eta+\eta_1 i$, on aura

$$(1) \qquad \xi^2+\xi_1^2=\mathfrak{a}, \quad \xi\eta+\xi_1\eta_1=\mathfrak{k}, \quad \eta^2+\eta_1^2=\mathfrak{b};$$

et si l'on considère maintenant, au lieu de la forme positive $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$, une forme indéfinie (a, k, b), à la place de ξ_1, η_1 se présentent des quantités purement imaginaires, que je désignerai par $\xi_1 i$, $\eta_1 i$. Les équations (1) sont alors remplacées par celles-ci :

$$(2) \qquad \xi^2 - \xi_1^2 = a, \quad \xi\eta - \xi_1\eta_1 = k, \quad \eta^2 - \eta_1^2 = b.$$

De même donc que dans les équations (1), quand on donne $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{b}$, une des quatre inconnues, qui toutes doivent rester réelles, reste arbitraire dans certaines limites, et que quand par exemple le point initial de la ligne $\sqrt{\mathfrak{b}}$ est pris comme origine des axes coordonnés rectangulaires, son point final peut avoir une place arbitraire sur le cercle tracé autour de cette origine avec le rayon $\sqrt{\mathfrak{b}}$, de même en est-il des équations (2); ainsi, par exemple, le point déterminé par les coordonnées rectangulaires η, η_1 peut avoir une place arbitraire sur l'hyperbole équilatère déterminée par l'équation $\eta^2 - \eta_1^2 = b$. Je ramène maintenant la théorie des formes indéfinies à celle des formes positives en me figurant le système des variables réelles ξ, η, ξ_1, η_1 satisfaisant aux équations (2), introduit dans les équations (1) et en considérant la forme positive ainsi produite $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$, que je nomme *la forme positive correspondant à la forme* (a, k, b). Les conditions nécessaires et suffisantes, que leurs coefficients variables ont à remplir, sont obtenues immédiatement sous la forme la plus utile si, outre la circonstance que $\mathfrak{a}$ ne peut pas devenir négatif, on remarque que les invariants des formes $(\mathfrak{a} + a, \mathfrak{k} + k, \mathfrak{b} + b)$ et $(\mathfrak{a} - a, \mathfrak{k} - k, \mathfrak{b} - b)$ sont égaux à zéro. En effet, par l'addition et la soustraction des équations ainsi données, on obtient

$$(3) \qquad \mathfrak{a}\mathfrak{b} - \mathfrak{k}^2 = k^2 - ab$$

et

$$(4) \qquad b\mathfrak{a} - 2k\mathfrak{k} + a\mathfrak{b} = 0,$$

c'est-à-dire que *les deux formes ont des invariants égaux opposés et leur invariant simultané est égal à zéro*. Il s'ensuit que, lorsqu'on applique la même substitution $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ à une forme indéfinie et à la forme positive qui lui correspond, la nouvelle forme positive correspond, à son tour, à la nouvelle forme indéfinie. Au lieu de ξ, η, ξ_1, η_1, on obtient dans les nouvelles formes $\alpha\xi+\gamma\eta$, $\beta\xi+\delta\eta$, $\alpha\xi_1+\gamma\eta_1$, $\beta\xi_1+\delta\eta_1$. Maintenant, *sous la réserve d'une restriction ultérieure,* fondée sur une différence entre les trois formes (a, k, b), (b, g, c) et (c, h, a), je nomme *la forme indéfinie* (a, k, b) *réduite, quand la forme positive correspondante* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ *est réduite pour un système quelconque admissible de ses coefficients variables,* d'après la définition donnée plus haut. On reconnaît dès lors que, pour chaque forme indéfinie (a, k, b), on peut trouver une équivalente réduite, en supposant un système quelconque admissible de coefficients pour la forme positive correspondante $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$, si l'on détermine une substitution qui change cette forme positive en une réduite et en appliquant cette substitution pareillement à (a, k, b). Maintenant il s'agit de transformer les conditions de la réduction, de telle sorte que l'on soit dispensé de se reporter à la forme positive correspondante.

Désignant k^2-ab par I, je définis les trois quantités h, g, c par les équations

$$a+h+k=0,\quad b+k+g=0,\quad c+g+h=0,$$

au moyen desquelles, soit dit en passant, l'équation (4) peut aussi être remplacée par celles-ci :

$$g\mathfrak{a}+h\mathfrak{b}+k\mathfrak{c}=0,\quad \text{ou}\quad a\mathfrak{g}+b\mathfrak{h}+c\mathfrak{k}=0.$$

Je ne conserve que pour la représentation géométrique les quantités ξ, η, ξ_1, η_1 éliminées dans les équations (3) et (4), et je remarque qu'on obtiendra tous les systèmes admissibles de valeurs $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{b}$, en faisant parcourir au point η, η_1 une seule de ses deux branches hyperboliques. Ajoutons encore que des deux points ξ, ξ_1 y appartenants, dont chacun décrit complétement une branche hyperbolique, on peut ne faire attention qu'à un seul, ou, ce qui revient au même, n'admettre qu'un des deux signes dans l'équation $\xi\eta_1-\xi_1\eta=\pm\sqrt{I}$ résultant de l'équation (3); car le changement des signes de $\sqrt{I}$ n'aurait d'autre effet que de conduire simplement d'un système de valeurs de $\xi, \eta; \xi_1, \eta_1$

que je viens d'admettre, à un autre pareillement déjà admis. Je veux pour le moment excepter le cas où I sera un nombre carré. Comme coefficients des formes indéfinies, je n'admets que des nombres entiers; alors un coefficient extrême tel que b ne peut pas devenir égal à zéro. Maintenant $\sqrt{\mathfrak{b}}$ apparaît géométriquement d'une manière immédiate comme la ligne droite conduisant du point zéro au point η, η_1, $\sqrt{\mathfrak{a}}$ comme la ligne droite conduisant du point zéro au point ξ, ξ_1, ou mieux, du point $-\xi$, $-\xi_1$ au point zéro, $\mathfrak{k}$ est $\sqrt{\mathfrak{a}}\cdot\sqrt{\mathfrak{b}}$ multiplié par le cosinus de la différence des directions de ces deux lignes. En ajoutant les points d'intersection de deux rangées indéfinies de lignes parallèles équidistantes, on obtient le même système de points que ci-dessus; mais ce système de points est maintenant mobile, en ce sens que chaque point parcourt simultanément, de manière continue et dans une seule et même direction, une branche d'une hyperbole équilatère qui lui est propre, tandis que les parallélogrammes et autres figures rectilignes, que les points déterminent, conservent une aire constante. Dans toutes les positions, on peut d'une manière unique considérer les points comme les sommets de triangles, tous acutangles et congruents, ce qui détermine chaque fois une forme positive réduite, et la forme indéfinie correspondante, abstraction faite de la permutation cyclique encore possible entre $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ et entre a, b, c. Il faut maintenant énoncer les conditions sous lesquelles ($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{b}$) peut devenir une réduite, et qui rendront possible une position du système de points, dans laquelle aucune des trois quantités $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$ n'est positive. Simultanément avec l'une des trois quantités $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$, les deux autres aussi deviennent infinies; en même temps $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{k}$ ne peuvent pas être tous à la fois négatifs. C'est ce qui résulte immédiatement de l'étude du triangle en question, dont l'aire est $\pm\frac{1}{2}\sqrt{I}$, attendu que $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ne peuvent devenir plus petits que les valeurs absolues de a, b, c, respectivement, par conséquent pas plus petits que 1. S'il y a donc une position dans laquelle aucune de ces trois variables continues n'est positive, il faut qu'il y ait au moins deux positions, où l'une d'entre elles soit égale à zéro, ce qui entraîne que les deux autres sont négatives. Si, par exemple, $\mathfrak{k}$ devient égal à zéro, l'équation (4) donnera comme condition nécessaire que a et b aient des signes différents, et démontre, jointe avec l'équation (3), aussi que cette condition est suffisante. On obtient $\sqrt{\frac{-a}{b}I}$ et $\sqrt{\frac{-b}{a}I}$ pour les valeurs correspondantes de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$. D'après les mêmes équations, la variation continue de $\mathfrak{k}$ suit, en vertu de cette condition, toujours la même direction, puisque dans un maximum ou un minimum de $\mathfrak{k}$ le déterminant $\begin{vmatrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} \\ a & b \end{vmatrix}$ devrait être égal à zéro. En avançant donc dans une direction déterminée, $\mathfrak{k}$ devient et reste négatif, et, comme en outre $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$, partant des valeurs $-\mathfrak{b}$ et $-\mathfrak{a}$, ne deviennent pas positifs avant un changement fini, mais ne peuvent non plus rester l'un et l'autre négatifs à l'infini, il y aura pour les variables un intervalle qui ne sera ni infiniment petit ni infiniment grand, dans lequel $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{k}$ sont négatifs, et dans lequel par conséquent $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ est réduite. En vertu de la condition posée, une seule des quantités $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ passe par zéro : c'est ce qui ressort aussi de ce que, quand a et b ont des signes différents, ou b et c en ont aussi des différents, tandis que a et c ont le même, ou bien a et c en ont des différents, et b et c ont le même. Sous la condition que a et b ont des signes différents, on devrait donc, suivant la définition établie plus haut, donner à la forme (a, k, b) la dénomination de *forme réduite*, ainsi qu'aux formes (b, g, c) et (c, h, a), parce que les trois formes positives correspondantes sont réduites. Maintenant *je limite cette définition en ce sens que je ne donnerai plus la dénomination de* formes réduites *qu'à celles des formes indéfinies dans les formes positives correspondantes desquelles le coefficient du milieu peut devenir égal à zéro*, ce qui n'est possible que pour deux des trois formes indiquées. *Le critérium d'une forme indéfinie réduite* ainsi déterminée consiste donc simplement en ce que *les deux coefficients extrêmes ont des signes opposés*. L'équation $k^2 - ab = I$ montre alors que, étant donné un invariant, il ne peut y avoir qu'un nombre limité de formes indéfinies réduites, à coefficients entiers. Pour n'avoir à indiquer qu'une seule des deux formes (a, k, b) et $(b, -k, a)$ réduites et proprement équivalentes, j'ajoute une *nouvelle restriction* à la *définition des formes réduites*, c'est que *le premier coefficient* doit être *positif*; il s'ensuit que *des trois formes* (a, k, b), (b, g, c), (c, h, a), *il n'y en a jamais qu'une seule qui puisse être réduite*.

b. — Périodes. Réduites spéciales.

La question de savoir quelles formes indéfinies sont équivalentes entre elles se résout en quelque sorte d'elle-même, d'après ce qu'on vient de voir. Si, en effet, la forme indéfinie réduite (a, k, b) se change, par une substitution quelconque, en la forme réduite (a', k', b') et de même la forme positive $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$, moyennant la même substitution, en la forme $(\mathfrak{a}', \mathfrak{k}', \mathfrak{b}')$, les équations (3) et (4) sont réalisées par a', k', b'; $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{k}'$, $\mathfrak{b}'$, aussi bien que par a, k, b; $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{b}$, et elles sont les seules conditions à remplir par les quantités variables. De même donc que, parmi les positions admissibles du système des points, il devait s'en produire dans lesquelles $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ était réduit, de même il doit aussi s'en produire, parmi ces positions, d'autres dans lesquelles $(\mathfrak{a}', \mathfrak{k}', \mathfrak{b}')$ est réduit. Il suffit par suite de faire prendre successivement au système des points toutes les positions admissibles, de déterminer, dans chaque position, la forme positive réduite et la substitution au moyen de laquelle elle résulte de $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ et d'effectuer cette substitution dans (a, k, b). On obtient, en opérant ainsi, toutes les substitutions au déterminant 1, par lesquelles (a, k, b) se change en elle-même, car ce sont précisément les substitutions par lesquelles la forme réduite (a, k, b) se change en des formes réduites (a', k', b') dont les coefficients concordent numériquement avec ceux de (a, k, b). Pour trouver les réduites équivalentes à (a, k, b), admettons, par exemple, que a soit positif, b et c négatifs, alors (a, k, b) est réduite pour certaines positions du système des points ou, si je dois m'exprimer ainsi, pour un certain *intervalle* qui commence par $\mathfrak{k} = 0$ et se termine par $\mathfrak{h} = 0$. Si cette limite est franchie, si par conséquent $\mathfrak{h}$ devient > 0, ou, ce qui revient au même, $-\mathfrak{k} > \mathfrak{a}$, on pourra, à l'aide de la substitution $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, déduire de $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ une nouvelle forme réduite. Par la même substitution, on déduit de (a, k, b) la forme $(a, -h, c)$ ou $(a, a + k, a + 2k + b)$, qui est donc de même une forme réduite, et répond ainsi à un nouvel intervalle. Si, dans un deuxième et dernier cas à examiner, a et c étaient positifs, b négatif, (a, k, b)

serait réduite pour l'intervalle de $\mathfrak{k} = 0$ jusqu'à $\mathfrak{g} = 0$. Au delà de cette limite, $\mathfrak{g}$ deviendrait > 0, ou, ce qui revient au même, $-\mathfrak{k} > \mathfrak{b}$, et, à l'aide de la substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, on déduirait de $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ une nouvelle forme réduite. A l'aide de la même substitution, on déduirait de (a, k, b) la forme $(c, -g, b)$ ou $(a + 2k + b, k + b, b)$ qui serait donc alors la forme réduite consécutive à (a, k, b). Comme les nouvelles formes ont les mêmes propriétés que la forme (a, k, b), dans le premier ou dans le deuxième cas étudié, et que particulièrement aussi aux valeurs initiales des intervalles, pour lesquels elles sont réduites, le coefficient moyen des formes positives qui leur correspondent devient égal à zéro, on reconnaît que, de chaque forme réduite ainsi obtenue, on peut de nouveau en déduire une autre par l'emploi de telle ou telle des deux substitutions $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, suivant que le coefficient extérieur nouveau provenant de là est négatif ou positif; mais, comme il n'existe qu'un nombre fini de formes réduites d'un invariant donné, on reconnaît que, parmi les formes nouvellement obtenues, une doit une fois coïncider avec une forme qu'on a déjà vue, et comme les coefficients d'une forme déterminent complétement la substitution qu'on doit lui appliquer ultérieurement, et par là la forme suivante, on constate que *toute la série des formes réduites équivalentes consiste en un nombre fini de telles formes, se répétant périodiquement à l'infini.* Cette période se reproduit à l'infini non-seulement dans la direction que nous venons de suivre, mais encore dans la direction contraire: c'est ce qui résulte de ce que, dans cette dernière direction aussi, chaque forme réduite suivante n'est déterminée que par la précédente. La loi de la série des différentes formes réduites peut aussi s'exprimer, abstraction faite, pour abréger, de la fixation arbitraire $a > 0$, simplement comme il suit. Si des trois coefficients a, b, c, satisfaisant à l'équation

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2bc - 2ca - 2ab = 4I,$$

a et c ont le même signe, b le signe contraire, la forme réduite (a, b, c) est située entre deux autres formes réduites, dans l'une desquelles a et b sont les mêmes qu'auparavant, tandis que pour c on prend l'autre valeur satisfaisant de même à cette équation; dans la seconde, b et c

sont les mêmes, et pour a on emploie l'autre valeur satisfaisant à cette équation.

Méritent particulièrement d'être distinguées d'entre toutes les formes réduites et d'être appelées *réduites spéciales* celles des formes réduites qui, si l'on s'avance dans la direction étudiée en premier lieu, ne se changent pas en la subséquente, à l'aide de celle des deux substitutions $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ par laquelle elles sont nées de la précédente. Les autres réduites peuvent être nommées *réduites intermédiaires*, et je dis d'une réduite intermédiaire : elle est située dans l'*espace* de a ou dans l'espace de b, suivant que c'est le coefficient a ou le coefficient b qui paraît aussi dans la réduite précédente et dans la réduite subséquente, tandis que d'une réduite spéciale (a, k, b) je dis aussi bien : elle est située dans l'espace de a que : elle est située dans l'espace de b. La propriété caractéristique par laquelle (a, k, b), quand c'est une *réduite spéciale*, se distingue de réduites intermédiaires, consiste en ce que *non-seulement a et b, mais encore $a - 2k + b$ et $a + 2k + b$ ont des signes opposés*, ce qui peut encore s'exprimer ainsi : la valeur absolue de k est non-seulement plus petite que $\sqrt{I}$, mais encore plus grande que celle de $\frac{1}{2}(a + b)$. La seconde condition exprimée par I, a et k seuls devient, quand on indique par des parenthèses ou des crochets qu'il faut prendre de la quantité qui y est mise la valeur absolue, $2a(k) > a^2 + k^2 - I > -2a(k)$ ou $[a - (k)] < \sqrt{I} < a + (k)$. La condition $[a - (k)] < \sqrt{I}$, comparée à la condition $(k) < \sqrt{I}$, n'est à considérer que lorsque l'on a $a > \sqrt{I}$ et montre que, dans ce cas, si k est négatif, à côté de (a, k, b), est aussi la forme

$$(a,\ a + k,\ a + 2k + b)$$

résultant de (a, k, b) par la substitution $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, mais, si k est positif, la forme $(a, k - a, a - 2k + b)$, résultant de (a, k, b) par la substitution $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, est réduite, et même, comme $2a - (k)$ deviendrait $> \sqrt{I}$, réduite spéciale. La condition $\sqrt{I} < a + (k)$ n'acquiert de l'importance que quand a est $< \sqrt{I}$ et indique immédiatement la loi, valable aussi pour le cas précédent, d'après laquelle, si l'on donne une réduite quelconque dont le premier coefficient est a, on peut trouver immédiatement les deux réduites spéciales situées dans l'espace de a. Les coefficients moyens des réduites situées dans cet espace forment en effet une série arithmétique dont la raison est a, et deux d'entre eux au moins sont situés entre $+\sqrt{I}$ et $-\sqrt{I}$. Les coefficients moyens des deux réduites spéciales sont maintenant toujours le premier et le dernier des termes de cette série situés entre $+\sqrt{I}$ et $-\sqrt{I}$. De ces deux coefficients, aucun ne peut devenir égal à zéro; ils ont toujours des signes opposés. Inutile de dire que les mêmes conclusions sont valables pour les réduites situées dans l'espace d'un troisième coefficient négatif. Si (a, k, b) est une réduite spéciale au coefficient moyen négatif, ce que je viens de dire montre que la réduite spéciale, qui la suit dans la direction précédemment adoptée, résulte de (a, k, b) par une substitution $\begin{vmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, dans laquelle le nombre positif β est le nombre entier le plus grand qui soit contenu dans $\frac{\sqrt{I}-k}{a}$. Si, au contraire, dans une réduite spéciale (a, k, b), le coefficient moyen est positif, elle donne naissance à la réduite spéciale suivante au moyen d'une substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{vmatrix}$, dans laquelle le nombre positif γ est le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{\sqrt{I}+k}{-b}$.

Si, en joignant la substitution $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ à la suite des substitutions $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{vmatrix}$ et à celles-ci $\begin{vmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, je représentais mes réduites spéciales de telle sorte que leurs coefficients moyens fussent toujours positifs, ce que je m'abstiens de faire principalement à cause de l'application aux formes ternaires, elles seraient une à une, et dans l'ordre de la série, identiques avec les formes que Gauss appelle simplement *réduites* (*Disquisitiones arithmeticæ*, art. 183). Les conditions

$$0 < k < \sqrt{I} \quad \text{et} \quad [(a) - k] < \sqrt{I} < (a) + k,$$

en lesquelles se transformeraient alors celles qui ont été indiquées plus haut, apparaissent immédiatement comme identiques à celles de Gauss. L'exposé que Dirichlet (*Mémoires de l'Académie de Berlin* pour 1854, ou *Leçons sur la théorie des nombres,* publiées par Dedekind) a donné, pour les conditions en question, savoir que, des deux racines ω de l'équation $a + 2k\omega + b\omega^2 = 0$, l'une soit positive, l'autre négative, la valeur absolue de l'une < 1, de l'autre > 1, revient complétement à mes conditions purement arithmétiques, savoir que $a - 2k + b$ et $a + 2k + b$, ainsi que a et b, ont des signes opposés. Je dois ajouter ici que cet énoncé a été déjà publié par M. Lipschitz (*Comptes rendus mensuels de l'Académie de Berlin*, 1865, p. 184).

c. — Les réduites principales de M. Hermite.

A la place de mes réduites spéciales, M. Hermite arrive à d'autres formes qu'il appelle *réduites principales* et qui, par conséquent, diffèrent aussi des réduites de Gauss, précisément parce que M. Hermite prend pour base la définition des formes positives réduites donnée par Gauss. La forme positive φ employée par M. Hermite (t. XLI du *Journal de Crelle,* p. 204), concorde avec ma forme $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$, en ce qui concerne les rapports des coefficients, si l'on remplace son λ par $\left(\frac{\xi - \xi_1}{\xi + \xi_1}\right)^2$.

Toutes les formes réduites d'après ma définition appartiennent aussi à ce que M. Hermite appelle *réduites* (abstraction faite de la substitution $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$, que l'on devrait peut-être encore employer) parce que, si dans $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ le coefficient moyen est égal à zéro, $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ ou $(\mathfrak{b}, -\mathfrak{k}, \mathfrak{a})$, d'après la définition de Gauss, est aussi une réduite. L'inverse n'a point lieu. En effet, $\mathfrak{k}$ passe toujours par zéro, quand pour $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ les deux limites de la réduction de Gauss sont les valeurs : $\mathfrak{k} = -\frac{\mathfrak{a}}{2}$ et $\mathfrak{k} = \frac{\mathfrak{a}}{2}$; mais, si elles sont $\mathfrak{k} = \frac{-\mathfrak{a}}{2}$ et $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ ou $\mathfrak{k} = \frac{\mathfrak{a}}{2}$ et $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, dans lesquels cas (a, k, b) est nommée par M. Hermite *réduite principale*, on ne peut pas l'affirmer, et cela n'a pas lieu quand a et b ont les mêmes signes. Si alors a et b sont positifs, k négatif, la série des réduites devient, d'après M. Hermite,

$$(b, g, c)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}(b, -k, a)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}(a, k, b)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}(a, -h, c),$$

tandis que pour moi (b, g, c) se change immédiatement en $(a, -h, c)$ par la substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$. Dans ce cas, (b, g, c) et $(a, -h, c)$ sont des réduites spéciales, parce que, d'après la condition de M. Hermite pour les réduites principales qui résulte immédiatement de mon équation (4), $(k) > (a+b)$ ou plutôt $(k) \geqq (a+b)$, on a, dans ce cas, $a+k+b \leqq 0$; donc, *a fortiori*, $a+4k+4b < 0$ et $4a+4k+b < 0$; donc $b-2g+c < 0$ et $a-2h+c < 0$, tandis que $a = b+2g+c > 0$ et $b = a+2h+c > 0$. Mais, alors, (b, g, c) n'est généralement pas une réduite principale, car la valeur absolue du coefficient moyen $-k-b$ est plus petite que la somme des coefficients extérieurs, savoir $-k-b+(-a-k-b)$. Il en est de même pour $(a, -b, c)$. Toutefois, dans le cas de $a+k+b=0$, (b, g, c) et $(a, -h, c)$ sont aussi réduites principales. Le point de départ et le point final de l'intervalle pour lequel (a, k, b) est une réduite coïncident alors. Dans le cas de $a > 0$, $b > 0$, $k > 0$, tout ce qui vient d'être dit pour la forme (a, k, b) aurait lieu pour la forme $(b, -k, a)$. Si a et b étaient négatifs, l'analogie serait complète. Toutes les réduites principales (a, k, b), dans lesquelles $a > 0$, $b < 0$, sont aussi des réduites spéciales; les associées opposées $(b, -k, a)$ sont toutes celles dans lesquelles $a < 0$, $b < 0$; car de $(k) \geqq (a+b)$ résulte $(k) > \left(\frac{a+b}{2}\right)$. Les périodes de réduites principales de M. Hermite, parmi lesquelles donc, dans certaines circonstances, une seule forme tient lieu de deux réduites de Gauss, peuvent, d'après cela, renfermer moins de formes que les périodes de Gauss, de même qu'aussi, dans le développement en une fraction continue périodique, le nombre des dénominateurs partiels d'une période peut diminuer si l'on admet des restes de différents signes. Des conditions de M. Hermite, $-(k) \lesseqgtr a+b \leqq (k)$, l'une, quand a et b ont des signes différents, énonce que $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$, l'autre que $(\mathfrak{b}, -\mathfrak{k}, \mathfrak{a})$ peut devenir une réduite de Gauss; mais, quand a et b ont les mêmes signes, l'une énonce les deux choses et l'autre n'énonce rien. Si l'on modifie ces conditions de telle sorte qu'elles s'adaptent au calcul immédiat des déduites principales consécutives, savoir que, outre I et k, elles ne renferment qu'un des coefficients extrêmes, par exemple a, elles deviennent

$$a^2-(ak)+k^2 \overset{=}{<} I \leqq a^2+(ak)+k^2$$

au moyen de $a^2-(ak)\overset{=}{<}-ab\leqq a^2+(ak)$. D'après cela il est facile de déduire l'un de l'autre les coefficients moyens de deux réduites principales situées dans l'espace de a, ces réduites se changeant l'une dans l'autre au moyen de substitutions $\begin{vmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$. En effet, si l'on a $a^2>I$, l'un de ces coefficients se trouve

$$\text{entre } -\frac{a}{2}-\sqrt{I-\frac{3}{4}a^2} \quad \text{et} \quad -\frac{a}{2}+\sqrt{I-\frac{3}{4}a^2},$$

l'autre

$$\text{entre } \frac{a}{2}-\sqrt{I-\frac{3}{4}a^2} \quad \text{et} \quad \frac{a}{2}+\sqrt{I-\frac{3}{4}a^2},$$

d'où s'ensuit $(\beta)=1$. Mais, si $a^2<I$, l'un de ces coefficients se trouve

$$\text{entre } -\frac{a}{2}-\sqrt{I-\frac{3}{4}a^2} \quad \text{et} \quad \frac{a}{2}-\sqrt{I-\frac{3}{4}a^2},$$

et l'autre

$$\text{entre } -\frac{a}{2}+\sqrt{I-\frac{3}{4}a^2} \quad \text{et} \quad \frac{a}{2}+\sqrt{I-\frac{3}{4}a^2},$$

ce qui donne généralement à β une valeur, et, dans le cas où l'une des limites $a+b\pm k=0$ est atteinte, deux valeurs, qui diffèrent l'une de l'autre d'une unité. En effet, par exemple, si l'on suppose $a+b+k=0$, à côté de (a, k, b), la forme $(a, -h, c)$, en même temps que (b, g, c), $(b, -k, a)$, (c, h, a) et $(c, -g, b)$ est une réduite principale, cela résultant immédiatement de ce que les conditions $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}=-2\mathfrak{k}$ peuvent être remplies.

De mes réduites intermédiaires, une quelconque (a, k, b) est évidemment située dans l'espace de a ou de b, suivant que le signe de $a-2k+b$ et $a+2k+b$, par conséquent aussi de $a+b$, coïncide avec celui de b ou de a, suivant que, par conséquent, a est plus petit ou plus grand que $-b$. La même chose peut se dire, relativement aux valeurs absolues de a et b, des réduites intermédiaires de M. Hermite, comme le montre mon équation (4) jointe avec l'équation $\mathfrak{k} = 0$, toujours possible dans ces formes, d'après ce qui a été dit plus haut. Parmi les réduites intermédiaires situées dans l'espace de a, la forme (a, k, b), lorsque la valeur absolue de k devient $< \frac{a}{2}$, mérite particulièrement d'être distinguée; au lieu de cette réduite, si, dans un cas, on a $k = \frac{a}{2}$, par conséquent, dans un autre, $k = -\frac{a}{2}$, on peut à volonté prendre l'une ou l'autre. La forme positive correspondante $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ est une réduite de Gauss pour la valeur minimum de $\mathfrak{a}$. L'analogie est la même pour les réduites intermédiaires (a, k, b) situées dans l'espace de b. Les formes ainsi mises en évidence appartiennent à celles que Legendre appelle *réduites à la forme ordinaire* (*Théorie des nombres*, 3e édition, 1re Partie, § 13). Mais si, dans l'espace de a, il n'existe pas de réduites intermédiaires, si, par conséquent, une des réduites spéciales situées dans cet espace remplit la condition $(2k) < a$ ou que toutes deux remplissent la condition $(2k) = a$, il peut arriver que, pour la première ou les deux, on ait $-b < (2k)$. Legendre prescrit, afin d'obtenir une forme semblable pour un espace de ce genre, d'appliquer des substitutions ultérieures à la forme obtenue, jusqu'à ce que la valeur absolue du double coefficient moyen ne dépasse plus celle d'aucun coefficient extrême. Mais, à cet effet, une seule substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{vmatrix}$ suffit, parce que la diminution de (k) produit une augmentation correspondante de a. La forme à obtenir de la sorte devient donc évidemment la même que celle que l'on obtient pour l'espace de b. Ce n'est donc pas un effet du hasard si, dans l'exemple donné par Legendre, page 135, une forme se reproduit deux fois de suite.

C'est parmi les réduites dont j'ai parlé en dernier lieu qu'est choisie la forme désignée par Gauss (*Disquisitiones arithmeticæ*, art. 223), comme forme représentante de sa classe.

d. — L'invariant, nombre carré négatif.

Par chacune des formes indéfinies (a, k, b) exclues plus haut, à partir d'un certain point, dans lesquelles $I = k^2 - ab$ est un nombre

carré, zéro est susceptible d'une représentation propre; chacune de ces formes a donc des formes équivalentes, dans lesquelles le premier coefficient est $= 0$. Soit (a, k, b) une de ces formes, soit k la racine carrée positive du nombre carré I supposé différent de zéro, et supposons b non égal à zéro ni divisible par $2k$. En employant le signe inférieur dans l'équation précédemment donnée $\xi\eta_1 - \xi_1\eta = \pm\sqrt{I}$, on obtient alors $b\xi = k(\eta + \eta_1) = b\xi_1$. Tandis que le point (η, η_1) parcourt une branche de son hyperbole équilatère, le point (ξ, ξ_1) ne peut alors se mouvoir que sur l'une des deux lignes droites, en lesquelles dégénère son hyperbole équilatère, et cela seulement d'un côté du point zéro, attendu que la valeur absolue de celle des deux quantités η et η_1, qui ne change pas son signe, l'emporte toujours sur l'autre. Si η et η_1, ayant des signes opposés, deviennent infinis, l'équation $(\eta - \eta_1)(\eta + \eta_1) = b$ montre que ξ et ξ_1 approchent de la limite zéro, ainsi que $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$. Si maintenant $(0, k, b)$ doit être réduite, dans la forme positive correspondante $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$, les conditions $\mathfrak{k} < 0$, $-\mathfrak{k} < \mathfrak{a}$, $-\mathfrak{k} < \mathfrak{b}$ peuvent être remplies, et les nombres b et k devront, d'après l'équation $b\mathfrak{a} = 2k\mathfrak{k}$, résultant de l'équation (4), avoir des signes différents; en outre $\frac{-b}{2k}$ devra être < 1. Si $(0, k, b)$ ne remplit pas ces conditions, je considérerai, au lieu de cette forme, la nouvelle forme qui en provient par une substitution $\begin{vmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, et qui, désignée elle-même par $(0, k, b)$, remplit les conditions $-2k < b < 0$. La troisième condition est ensuite remplie d'elle-même, d'après ce qui vient d'être remarqué, par les points η, η_1, qui sont suffisamment éloignés sur leur branche hyperbolique dans une certaine direction, et cela à partir du point pour lequel $\mathfrak{g} = 0$; donc $\mathfrak{b} = k\sqrt{\frac{-b}{c}} = k\sqrt{\frac{-b}{2k+b}}$.
Si l'on franchit ce point dans la direction opposée, il faut d'abord employer une substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ pour déduire de nouveau de $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b})$ une réduite positive, et par là de $(0, k, b)$ une nouvelle réduite indéfinie. Le procédé développé plus haut, pour le cas où I ne serait pas un nombre carré pour faire dériver les réduites consécutives, peut maintenant s'appliquer, en vertu des mêmes motifs, aussi à cette forme $(2k + b, k + b, b)$ et aux formes qui les suivent par là jusqu'à ce

que l'on arrive ainsi à une forme (a', k', b'), dans laquelle $c' = 0$, pendant que les points positifs ξ, ξ_1 et η, η_1 continuent à se mouvoir sur leurs voies toujours dans la même direction. En tout cas, il faudrait qu'une pareille forme précédât immédiatement une forme (a'', k'', b'') dans laquelle a'' ou b'' serait égale à zéro, puisque, suivant que la seconde forme provient de la première, par la substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ ou $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, on obtient a'' ou b'' égal à c'. Il faut d'ailleurs qu'une pareille forme (a', k', b') apparaisse réellement; car, d'abord, les autres réduites dans lesquelles les coefficients extrêmes doivent avoir des signes opposés ne peuvent exister qu'en nombre fini; de plus, aucune d'elles ne peut se présenter plus d'une fois, parce que cela suffirait pour conclure qu'elles formeraient des périodes semblables non-seulement en avant, mais encore en arrière; enfin, par les mêmes motifs que plus haut, aucune de ces autres réduites n'est telle que sa forme positive correspondante puisse rester réduite si un de ses coefficients variables devenait infini. Or la dernière qualité appartient à la forme (a', k', b'), dans laquelle on a $a' + 2k' + b' = 0$. On a de plus $0 < a' < -2h'$. Donc la forme $(\mathfrak{c}', \mathfrak{h}', \mathfrak{a}')$ est réduite d'une manière analogue à ce qu'on a étudié relativement à la forme $(0, k, b)$, tandis que le sommet mobile $\xi'\xi'_1$ du triangle déterminé par $(\mathfrak{c}', \mathfrak{h}', \mathfrak{a}')$, à partir de la position définie par $\mathfrak{k}' = 0$, conséquemment par $-\mathfrak{h}' = \mathfrak{a}'$, s'avance toujours à l'infini, sur sa branche hyperbolique, dans la direction suivie jusqu'alors. En même temps les variables primitives ξ, ξ_1, η, η_1 deviennent aussi infinies, les deux dernières ayant des signes égaux. *A la place de la période répétée un nombre de fois infini, de formes réduites se trouve donc dans le cas où $k^2 - ab$ est un nombre carré, une série de formes réduites ne paraissant qu'une fois chacune;* dans la première (a, k, b) on a le coefficient $a = 0$, dans la dernière (a', k', b') le coefficient $c' = 0$. Comme $(\mathfrak{c}', \mathfrak{h}', \mathfrak{a}')$, est réduite en même temps que $(\mathfrak{a}', \mathfrak{k}', \mathfrak{b}')$, la forme indéfinie $(0, h', a')$ a aussi le caractère d'une réduite. La substitution $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$, au moyen de laquelle la forme $(0, h', a')$, qui ne diffère pas essentiellement de (a', k', b'), résulte de $(0, k, b)$, naît de la combinaison de la substitution, ne contenant que des coefficients positifs, au moyen de laquelle (a', k', b') résulte de $(0, k, b)$ par la substitution $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$. Il suit de là $-\alpha > \beta > 0$,

$-\gamma > \delta > 0$. De $(0, k, b)(\alpha, \gamma) = 0$ résulte de plus, quand m désigne le plus grand commun diviseur entre $2k$ et b, que $\alpha = \frac{b}{m}$, $\gamma = \frac{-2k}{m}$, et, eu égard à la remarque que je viens de faire, β et δ sont complétement déterminés par l'équation

$$\frac{b}{m}\delta + \frac{2k}{m}\beta = 1.$$

Si maintenant on exprime h' et a' par k, b, α, β, γ, δ, on obtient $h' = -k$ et $a' = m\delta$. Comme les formes $(0, k, 2kn)$ sont proprement équivalentes aux formes $(0, k, 0)$ et $(0, -k, 0)$, et que, dans les formes positives qui correspondent aux dernières, le coefficient moyen est constamment égal à zéro, on peut maintenant dire en général que, dans chaque classe de formes équivalentes appartenant à l'invariant $-k^2$, il y a une forme, une seule $(0, k, b)$, dans laquelle $2k > -b \geqq 0$, conjointe à une forme $(0, -k, a')$, dans laquelle $2k > a' \geqq 0$ et $\frac{b}{m} \cdot \frac{a'}{m} \equiv 1 \left(\text{mod. } \frac{2k}{m}\right)$. Gauss appelle réduite la forme $(a', k, 0)$ proprement équivalente à la dernière (*Disq. arith.*, 206). Comme elle a pour improprement équivalente la forme $(c, k, 0)$, dans laquelle je désigne $b + 2k$ par c la proposition $ca' \equiv m^2 (\text{mod. } 2mk)$, démontrée par Gauss (art. 210) pour deux réduites improprement équivalentes $(c, k, 0)$ et $(a', k, 0)$, est contenue immédiatement dans la congruence que je viens de noter. D'après la même considération qu'à l'egard des formes positives, on reconnaît que les formes $(0, k, b)$ et leurs équivalentes n'admettent aucune transformation en elles-mêmes au déterminant 1, outre $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$.

Si l'on a $I = 0$, les trois sommets η, η_1, $-\xi$, $-\xi_1$, $0, 0$ du triangle correspondant à une forme (a, k, b) sont toujours situés sur une ligne droite. Le triangle sera donc toujours obtusangle, à moins que deux des trois points ne coïncident, ce qui n'est possible que lorsque $a = 0$, ou $b = 0$, ou $c = 0$. Si donc on se borne à des formes primitives, c'est-à-dire à des formes dont les coefficients n'aient pas de commun diviseur, il n'y a que les formes $(0, 0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0, 0)$ $(\pm 1, \mp 1, \pm 1)$ qui puissent être des réduites, lesquelles ont la même relation entre elles que (a, k, b), (c, h, a), (b, g, c). On n'obtient ainsi que deux classes primitives; elles peuvent être représentées par les formes x^2 et $-x^2$.

III. — Formes ternaires définies.

a. — *Coefficients homogènes. Nouvelles conditions de réduction.*

Pour une forme quadratique ternaire quelconque

$$\mathfrak{a}x^2 + \mathfrak{b}y^2 + \mathfrak{c}z^2 + 2\mathfrak{g}yz + 2\mathfrak{h}zx + 2\mathfrak{k}xy,$$

j'emploierai, outre de nouvelles désignations à introduire, les désignations usuelles $\begin{pmatrix} \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c} \\ \mathfrak{g}, & \mathfrak{h}, & \mathfrak{k} \end{pmatrix}(x, y, z)$, ou $\begin{pmatrix} \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c} \\ \mathfrak{g}, & \mathfrak{h}, & \mathfrak{k} \end{pmatrix}$, ou $\mathfrak{f}(x, y, z)$, ou $\mathfrak{f}$. Aux coefficients $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, j'en ajoute quelquefois un quatrième, $\mathfrak{d}$; aux coefficients $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$, trois, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$. Ces dix coefficients doivent satisfaire aux quatre équations $\mathfrak{a} + \mathfrak{l} + \mathfrak{h} + \mathfrak{k} = 0$, $\mathfrak{b} + \mathfrak{m} + \mathfrak{k} + \mathfrak{g} = 0$, $\mathfrak{c} + \mathfrak{n} + \mathfrak{g} + \mathfrak{h} = 0$, $\mathfrak{d} + \mathfrak{l} + \mathfrak{m} + \mathfrak{n} = 0$, de sorte que $\mathfrak{d} = \mathfrak{f}(1, 1, 1)$. On se fera une idée des relations qui existent entre ces dix coefficients, quand on les réunit dans le système $\left|\begin{matrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{k} & \mathfrak{h} & \mathfrak{l} \\ & \mathfrak{b} & \mathfrak{g} & \mathfrak{m} \\ & & \mathfrak{c} & \mathfrak{n} \\ & & & \mathfrak{d} \end{matrix}\right|$, conformément à l'ordre $\left|\begin{matrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{k} & \mathfrak{h} \\ \mathfrak{k} & \mathfrak{b} & \mathfrak{g} \\ \mathfrak{h} & \mathfrak{g} & \mathfrak{c} \end{matrix}\right|$ des coefficients ordinaires, ou bien quand on emploie, au lieu de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, les désignations $[\mathfrak{bc}]$, $[\mathfrak{ca}]$, $[\mathfrak{ab}]$, $[\mathfrak{ad}]$, $[\mathfrak{bd}]$, $[\mathfrak{cd}]$, en quoi l'ordre de deux lettres placées entre les crochets est indifférent, de sorte que $[\mathfrak{bc}] = [\mathfrak{cb}]$. Les vingt-quatre formes, qui résultent de l'une d'entre elles, la forme $\mathfrak{f}$, par les permutations des coefficients $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ combinées avec les permutations respectives des coefficients $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, sont équivalentes entre elles; elles se changent les unes en les autres par les combinaisons d'une des deux substitutions $\left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right|$ et $\left|\begin{matrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}\right|$ avec une des trois $\left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right|$, $\left|\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}\right|$, $\left|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right|$, et une des quatre $\left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right|$, $\left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix}\right|$, $\left|\begin{matrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix}\right|$, $\left|\begin{matrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right|$.

Les relations entre ces vingt-quatre formes ressortent avec plus d'évidence encore quand on n'exprime ces formes que par $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$,

$\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$. En introduisant une quatrième variable, savoir t, qui d'abord doit être égale à zéro, on obtient

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{f} = &- \mathfrak{g}(y-z)^2 - \mathfrak{h}(z-x)^2 - \mathfrak{k}(x-y)^2 - \mathfrak{l}(x-t)^2 \\ &- \mathfrak{m}(y-t)^2 - \mathfrak{n}(z-t)^2. \end{aligned}\right.$$

Comme on peut augmenter ou diminuer d'un nombre quelconque la valeur de t partant de zéro, sans altérer la valeur de la forme, si l'on augmente ou diminue du même nombre x, y et z, les six coefficients sont homogènes entre eux. Les permutations qui résultent des vingt-quatre permutations des coefficients $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ et des variables respectives x, y, z, t, et qui changent simplement l'ordre des six termes, dans l'équation (5), peuvent être caractérisées ainsi : on réunit en couple deux coefficients qui, dans le premier énoncé ci-dessus, n'appartiennent pas à la même rangée horizontale ou verticale qu'un seul des nombres $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, ou, dans le deuxième énoncé, n'ont en commun aucun des éléments $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$; ce couple n'est désuni par aucune des permutations de $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$. Mais les trois couples de cette espèce qui, dans le système $\left\{\begin{matrix} \mathfrak{g}, & \mathfrak{h}, & \mathfrak{k} \\ \mathfrak{l}, & \mathfrak{m}, & \mathfrak{n} \end{matrix}\right\}$, forment les trois rangées verticales, peuvent être permutés à volonté entre eux, ce qui correspond aux permutations entre $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$; il peut aussi se présenter des permutations des deux éléments d'un couple, mais seulement en combinaison avec la même permutation dans un autre couple, ce qui correspond aux permutations de $\mathfrak{d}$ avec $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ou $\mathfrak{c}$, quand les deux couples se permutent simultanément entre eux.

Si l'on fixe l'ordre cyclique déterminé $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ pour ces coefficients avec celui de t, x, y, z, t pour les variables; si l'on désigne $(t-x)$, $(x-y)$, $(y-z)$, $(z-t)$ par u_1, u_2, u_3, u_4, puis $\mathfrak{a}$ par (34), $\mathfrak{b}$ par (41), $\mathfrak{c}$ par (12), $\mathfrak{d}$ par (23), l'ordre des chiffres étant indifférent, de plus $\mathfrak{b} + 2\mathfrak{g} + \mathfrak{c}$, ou, ce qui revient au même, $\mathfrak{d} + 2\mathfrak{l} + \mathfrak{a}$ par (13), et $\mathfrak{a} + 2\mathfrak{k} + \mathfrak{b}$ ou $\mathfrak{c} + 2\mathfrak{a} + \mathfrak{d}$ par (24), de telle sorte que de ces six quantités ayant un chiffre commun, comme par exemple (12), (13), (14), lorsqu'elles apparaissent comme coefficients extrêmes d'une des quatre formes binaires portant les numéros 1, 2, 3, 4, on obtient l'équation

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} -\mathfrak{f} = &(12)u_3u_4 + (23)u_4u_1 + (34)u_1u_2 + (41)u_2u_3 \\ &+ (24)u_1u_3 + (13)u_2u_4, \end{aligned}\right.$$

symétrique, comme la relation $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$, par rapport aux chiffres 1, 2, 3, 4.

Quant à la forme adjointe $\begin{pmatrix} \mathfrak{A}, & \mathfrak{B}, & \mathfrak{C} \\ \mathfrak{G}, & \mathfrak{H}, & \mathfrak{K} \end{pmatrix}$ ou $\mathfrak{F}$, dont les coefficients sont les premiers sous-déterminants de l'invariant I, c'est-à-dire du déterminant $\begin{vmatrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{k} & \mathfrak{h} \\ \mathfrak{k} & \mathfrak{b} & \mathfrak{g} \\ \mathfrak{h} & \mathfrak{g} & \mathfrak{c} \end{vmatrix}$, de sorte qu'il existe trois équations pareilles à $I = \mathfrak{a}\mathfrak{A} + \mathfrak{k}\mathfrak{K} + \mathfrak{h}\mathfrak{H}$ et six pareilles à $0 = \mathfrak{a}\mathfrak{K} + \mathfrak{k}\mathfrak{B} + \mathfrak{h}\mathfrak{G}$, et qu'on a $\mathfrak{F}(X, Y, Z) = I(xX + yY + zZ) = I\mathfrak{f}(x, y, z)$, si pour X, Y, Z on placé les demi-dérivées de $\mathfrak{f}(x, y, z)$ relativement à x, y, z, nous observerons qu'elle n'est symétrique ni par rapport avec $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, ni par rapport aux nombres introduits 1, 2, 3, 4, même après qu'elle a été complétée par les quatre coefficients $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, qui satisfont aux équations

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{L} + \mathfrak{H} + \mathfrak{K} = 0, \quad \mathfrak{B} + \mathfrak{M} + \mathfrak{K} + \mathfrak{G} = 0, \quad \mathfrak{C} + \mathfrak{N} + \mathfrak{G} + \mathfrak{H} = 0,$$
$$\mathfrak{D} + \mathfrak{L} + \mathfrak{M} + \mathfrak{N} = 0, \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{F}(1, 1, 1).$$

C'est la forme $\mathfrak{F}_1$, qui résulte de $\mathfrak{F}$ par la substitution $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ et dont les coefficients $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{D}_1$ sont les invariants des quatre formes binaires précitées portant les numéros 1, 2, 3, 4, qui est non-seulement symétrique par rapport à ces numéros, mais encore par rapport à $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, si l'on conserve un ordre cyclique, dans lequel $\mathfrak{a}$ reste séparé de $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{d}$. En faisant, pour abréger,

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_a &= \mathfrak{g}\mathfrak{n} + \mathfrak{n}\mathfrak{m} + \mathfrak{m}\mathfrak{g}, \\ \mathfrak{P}_b &= \mathfrak{n}\mathfrak{l} + \mathfrak{l}\mathfrak{h} + \mathfrak{h}\mathfrak{n}, \\ \mathfrak{P}_c &= \mathfrak{l}\mathfrak{k} + \mathfrak{k}\mathfrak{m} + \mathfrak{m}\mathfrak{l}, \\ \mathfrak{P}_d &= \mathfrak{k}\mathfrak{g} + \mathfrak{g}\mathfrak{h} + \mathfrak{h}\mathfrak{k}, \end{aligned}$$

on obtient l'expression suivante :

$$\mathfrak{F}_1 = \begin{vmatrix} \mathfrak{A} & -\mathfrak{P}_a - \mathfrak{h}\mathfrak{m} & -\mathfrak{k}\mathfrak{n} + \mathfrak{h}\mathfrak{m} & -\mathfrak{P}_d - \mathfrak{h}\mathfrak{m} \\ & \mathfrak{B} - 2\mathfrak{K} + \mathfrak{A} & -\mathfrak{P}_b - \mathfrak{h}\mathfrak{m} & -\mathfrak{g}\mathfrak{l} + \mathfrak{h}\mathfrak{m} \\ & & \mathfrak{C} - 2\mathfrak{G} + \mathfrak{B} & -\mathfrak{P}_c - \mathfrak{h}\mathfrak{m} \\ & & & \mathfrak{C} \end{vmatrix}.$$

Pour que $\mathfrak{f}$ soit une forme positive, en supposant les variables réelles aussi bien que les coefficients, il faut, quand I n'est point nul, que

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ et I soient positifs; mais il suffit déjà, d'après l'équation $\mathfrak{a}f = (\mathfrak{a}x + \mathfrak{k}y + \mathfrak{h}z)^2 + \mathfrak{C}y^2 - 2\mathfrak{G}yz + \mathfrak{B}z^2$, que $\mathfrak{a}$ et la forme binaire $(\mathfrak{C}, -\mathfrak{G}, \mathfrak{B})$ soient positifs; donc, $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{B}$ ou deux coefficients quelconques, ayant entre eux des relations pareilles, doivent être positifs en même temps que I.

A la place des conditions de Seeber pour une forme positive réduite, savoir, $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b} \leqq \mathfrak{c}$, $(2\mathfrak{g}) \leqq \mathfrak{b}$, $(2\mathfrak{h}) \leqq \mathfrak{a}$, $(2\mathfrak{k}) \leqq \mathfrak{a}$, auxquelles on joint, quand $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{k}$ sont négatifs : $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + 2\mathfrak{g} + 2\mathfrak{h} + 2\mathfrak{k} \geqq 0$, j'introduis, pour mon objet, *d'autres conditions de réduction*, qui ne concordent au fond avec les précédentes que lorsque le premier cas se réalise, et consistent toujours en ce que, *des nombres* $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}, \mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$, *aucun ne doit être positif*. Tandis qu'il résulte des conditions de Seeber, si $\mathfrak{f}'$ est une forme équivalente à $\mathfrak{f}$, dans laquelle on a pareillement $\mathfrak{a}' \leqq \mathfrak{b}' \leqq \mathfrak{c}'$, que $\mathfrak{a}'$ ne peut être $< \mathfrak{a}$, ni $\mathfrak{b}' < \mathfrak{b}$, ni $\mathfrak{c}' < \mathfrak{c}$, il résulte des miennes, que je dois maintenant justifier, et qui ne portent pas atteinte à la symétrie entre $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ et $\mathfrak{d}$, que $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d}$ et $-\mathfrak{g} - \mathfrak{h} - \mathfrak{k} - \mathfrak{l} - \mathfrak{m} - \mathfrak{n}$ ont des valeurs minima, pour toutes les formes équivalentes. Je désigne une substitution $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$, qui doit être employée pour la forme $\mathfrak{f}$, afin de pouvoir exprimer $\mathfrak{d}', \mathfrak{l}', \mathfrak{m}', \mathfrak{n}'$ d'une manière aussi immédiate que $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{g}', \mathfrak{h}', \mathfrak{k}'$, par $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \end{vmatrix}$, où $\delta, \delta_1, \delta_2$ sont tels, que la somme des coefficients rangés par quatre dans une ligne horizontale est égale à zéro, ou aussi par $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \end{vmatrix}$, $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \delta_3$ étant égaux à zéro. Toutefois, dans ce dernier système, on peut, pour rétablir la symétrie relativement à $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$, augmenter ou diminuer d'une seule et même grandeur tous les coefficients placés quatre par quatre dans une colonne, sans que par là le résultat de la substitution soit altéré, si l'on met, par exemple

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}\alpha^2 + \mathfrak{b}\alpha_1^2 + \mathfrak{c}\alpha_2^2 + \mathfrak{d}\alpha_3^2 + 2\mathfrak{g}\alpha_1\alpha_2$$
$$+ 2\mathfrak{h}\alpha_2\alpha + 2\mathfrak{k}\alpha\alpha_1 + 2\mathfrak{l}\alpha\alpha_3 + 2\mathfrak{m}\alpha_1\alpha_3 + 2\mathfrak{n}\alpha_2\alpha_3, \text{ etc.,}$$
$$\mathfrak{k}' = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathfrak{a}'}{\partial \alpha}\beta + \frac{1}{2}\frac{\partial \mathfrak{a}'}{\partial \alpha_1}\beta_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial \mathfrak{a}'}{\partial \alpha_2}\beta_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial \mathfrak{a}'}{\partial \alpha_3}\beta_3, \text{ etc.}$$

Car, par exemple, si $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ augmentent de 1, $\frac{1}{2}\frac{\partial \mathfrak{a}'}{\partial \alpha}$ n'augmente que de $\mathfrak{a}+\mathfrak{k}+\mathfrak{h}+\mathfrak{l}$, c'est-à-dire de zéro; il en est de même des dérivées semblables; de plus, on a

$$\frac{\partial \mathfrak{a}'}{\partial \alpha}+\frac{\partial \mathfrak{a}'}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial \mathfrak{a}'}{\partial \alpha_2}+\frac{\partial \mathfrak{a}'}{\partial \alpha_3}=0, \text{ etc.}$$

L'application, à f, de la substitution $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, produit la forme $\begin{vmatrix} \mathfrak{a}+2\mathfrak{h}+\mathfrak{c} & \mathfrak{k}+\mathfrak{g} & \mathfrak{n}+\mathfrak{g} & \mathfrak{l}-\mathfrak{g} \\ & \mathfrak{b} & -\mathfrak{g} & \mathfrak{m}+\mathfrak{g} \\ & & \mathfrak{c} & \mathfrak{h}+\mathfrak{g} \\ & & & \mathfrak{a}+2\mathfrak{k}+\mathfrak{b} \end{vmatrix}$.

A la place de $-\mathfrak{g}-\mathfrak{h}-\mathfrak{k}-\mathfrak{l}-\mathfrak{m}-\mathfrak{n}$ vient donc, dans celle-ci, un nombre plus petit de $\mathfrak{g}$, de sorte que cette somme peut toujours être diminuée par une substitution appropriée, toutes les fois que $\mathfrak{g}$ ou, comme on peut le conclure d'après la symétrie, un des coefficients $\mathfrak{h}, \mathfrak{k}, \mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ est positif. Si $\mathfrak{l}$ est positif, la substitution correspondante, par exemple, résulte de celle qui a été indiquée par l'échange de $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ contre $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{d}$. La substitution ci-dessus $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ devient ainsi $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, ou bien, si je modifie, de la même grandeur les termes d'une colonne, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

Enfin, en remettant à leur place primitive $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{d}$, qui reparaissent parmi $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}'$, j'obtiens $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, qui change f en

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{k}+\mathfrak{l} & \mathfrak{h}+\mathfrak{l} & -\mathfrak{l} \\ & \mathfrak{a}+2\mathfrak{h}+\mathfrak{c} & \mathfrak{g}-\mathfrak{l} & \mathfrak{n}+\mathfrak{l} \\ & & \mathfrak{a}+2\mathfrak{k}+\mathfrak{b} & \mathfrak{m}+ \\ & & & \mathfrak{d} \end{vmatrix}.$$

Il est, maintenant aussi, aisé de démontrer que, si $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ sont négatifs, toutes les substitutions effectuent une augmentation de la somme $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}$, excepté la substitution identique $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ ou $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, et celles qui effectuent de simples permutations entre $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{d}$. Ayant en effet, d'après (5),

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}' = &-\mathfrak{g}(\alpha_1-\alpha_2)^2-\mathfrak{h}(\alpha_2-\alpha)^2-\mathfrak{k}(\alpha-\alpha_1)^2-\mathfrak{l}(\alpha-\alpha_3)^2\\ &-\mathfrak{m}(\alpha_1-\alpha_3)^2-\mathfrak{n}(\alpha_2-\alpha_3)^2,\end{aligned}$$

et des expressions analogues pour $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$, on reconnaît que, dans la substitution identique et les vingt-trois autres mentionnées, chacun des nombres non négatifs $-\mathfrak{g}$, $-\mathfrak{h}$, $-\mathfrak{k}$, $-\mathfrak{l}$, $-\mathfrak{m}$, $-\mathfrak{n}$ entre deux fois dans la somme $\mathfrak{a}'+\mathfrak{b}'+\mathfrak{c}'+\mathfrak{d}'$, chaque fois multipliée par le nombre carré 1. Si, par conséquent, cette somme diminuait dans quelque forme équivalente, il faudrait qu'au moins un de ces six nombres y parût moins de deux fois. Si c'était le nombre $-\mathfrak{g}$, il faudrait, parmi les quatre différences $\alpha_1-\alpha_2$, $\beta_1-\beta_2$, $\gamma_1-\gamma_2$, $\delta_1-\delta_2$, que plus de deux fussent égales à zéro; leur somme étant égale à zéro, il s'ensuivrait que toutes les quatre seraient nulles, ce qui exigerait que le déterminant de la substitution fût égal à zéro. Cette somme-là ne peut donc être plus petite dans aucune forme équivalente; mais il nous reste encore à discuter les cas dans lesquels un ou plusieurs des nombres $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ sont égaux à zéro.

Si $\mathfrak{f}$ est réduite et si $\mathfrak{h}.\mathfrak{m}$ n'est pas plus grand que $\mathfrak{g}.\mathfrak{l}$ ou $\mathfrak{k}.\mathfrak{n}$, la forme précitée $\mathfrak{F}_1$, formée en ayant pour base la série cyclique $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, est aussi réduite, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{N}_1$ étant alors négatives ou nulles, comme on le reconnaît immédiatement d'après leurs expressions. Chaque permutation entre les nombres $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, dans laquelle restent séparés deux nombres qui ne se suivent pas immédiatement et restent unis deux nombres se suivant immédiatement, entraîne après elle simplement une permutation entre les coefficients $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{D}_1$. Le résultat est analogue pour les cas dans lesquels $\mathfrak{g}.\mathfrak{l}$ ou $\mathfrak{k}.\mathfrak{n}$ ne sont pas plus grands que les deux autres produits analogues, car on prend alors pour base la série $\mathfrak{dcabd}$ ou $\mathfrak{dbcad}$. Sur les vingt-quatre formes simultanément réduites, il y en a huit dans lesquelles la forme indiquée de la classe adjointe, basée sur la série $\mathfrak{abcd}$, est réduite; dans huit autres, c'est la forme basée sur la série $\mathfrak{cabd}$, et dans les huit dernières c'est la forme basée sur la série $\mathfrak{bcad}$, qui est réduite. Si l'on cherche des conditions propres à mettre en évidence comme forme représentante une des vingt-quatre formes simultanément réduites, ce qui, pour mon but, ne ferait que gêner, mais serait désirable pour des constructions de tables, les considérations précédentes font immédiatement ressortir huit formes sur les vingt-quatre. De la condition que $\mathfrak{d}$ ne doit pas être plus petit que $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ou $\mathfrak{c}$ résulte que, sur ces formes, deux sont mises en vue, qui se transforment l'une en l'autre à l'aide de la substitution $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ et pourraient être distinguées par la condition $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{c}$ ou $\mathfrak{g} < \mathfrak{k}$.

b. — Les transformations des formes en elles-mêmes.

Si la forme f, à l'aide de la substitution S, se transforme en la forme f', et si les coefficients $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$ coïncident numériquement avec les coefficients $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{h}'$, $\mathfrak{k}'$, rangés dans le même ordre, on dit : la forme f se transforme en elle-même par la substitution S. Je n'ai en vue que des substitutions au déterminant 1. Il suffit aussi de considérer ces substitutions pour des formes réduites, parce qu'elles s'en déduisent pour les autres. Si donc f est réduite et si, comme je vais premièrement le supposer, S est une des vingt-trois substitutions par lesquelles nos vingt-quatre formes résultent les unes des autres; si, de plus, x est le nombre de celles de ces vingt-quatre formes qui ont des coefficients coïncidant avec f, cette forme elle-même y compris, de sorte que x soit diviseur de 24, il faudra considérer les cas particuliers qui suivent et que l'on devra adopter comme types pour les cas analogues.

1. $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$, d'où résulte aussi que $\mathfrak{l} = \mathfrak{m}$. Alors f ne su-

bit aucune altération en permutant $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$; S est donc $= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ et $\varkappa = 2$. Ce cas est en même temps le type pour les cinq autres, dans lesquels d'autres combinaisons des quantités $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ jouent le rôle que jouent ici $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$.

2. $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{c} = \mathfrak{d}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{m}$. En ce cas, f ne subit aucun changement lors de la permutation de $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{d}$ jointe à la permutation de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$. S est alors $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ et $\varkappa = 2$. La réunion de deux tels cas, c'est-à-dire les conditions : $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{m}$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{n}$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = \mathfrak{c} = \mathfrak{d}$, donne $\varkappa = 4$.

3. $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{c} = \mathfrak{d}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} = \mathfrak{l} = \mathfrak{m}$. Alors, sans que f soit changé, $\mathfrak{a}$ peut se permuter avec $\mathfrak{b}$ et, indépendamment de cela, $\mathfrak{c}$ avec $\mathfrak{d}$. Les substitutions S résultent de celle qui est indiquée dans le premier cas et d'une analogue. On a $\varkappa = 4$.

4. $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} = \mathfrak{k}$, $\mathfrak{l} = \mathfrak{m} = \mathfrak{n}$; alors $\varkappa$ est égal à 6; analogues sont les cas $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = \mathfrak{d}$, etc.

5. $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = \mathfrak{c} = \mathfrak{d}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} = \mathfrak{k} = \mathfrak{l} = \mathfrak{m} = \mathfrak{n}$. Alors on a $\varkappa = 24$.

Mais, si S ne fait point partie de ces vingt-trois substitutions-là et que néanmoins f puisse se transformer par S en elle-même, c'est-à-dire en une forme pareillement réduite, il n'est pas possible que tous les nombres $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ soient différents de zéro; il y a donc plus de vingt-quatre formes réduites. Soit λ le nombre de celles d'entre elles dont les coefficients coïncident avec ceux de f. Si maintenant :

6. $\mathfrak{h}$ seul est égal à zéro, de sorte que vingt-quatre autres formes soient réduites, dont l'une, f', résulte de f par la substitution $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ et a $\begin{Bmatrix} \mathfrak{n}, & 0, & \mathfrak{k} \\ \mathfrak{l}, & \mathfrak{m}, & \mathfrak{g} \end{Bmatrix}$ à la place des coefficients homogènes $\begin{Bmatrix} \mathfrak{g}, & 0, & \mathfrak{k} \\ \mathfrak{l}, & \mathfrak{m}, & \mathfrak{n} \end{Bmatrix}$; alors on a $\lambda = \varkappa$, quand $\mathfrak{g}$ diffère de $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{k}$ de $\mathfrak{l}$; par contre, $\lambda = 2\varkappa$ si $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}$ ou $\mathfrak{k} = \mathfrak{l}$, cas dans lequel $\varkappa$ formes des vingt-quatre premières réduites coïncident avec $\varkappa$ des vingt-quatre autres. Des conditions symétriques entre $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ sont, par la condition que $\mathfrak{h}$ seul doit être égal à zéro, exclues les conditions symétriques entre $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$,

$\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{c}$. En revanche, f peut ne pas se modifier lors de la permutation de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{c}$ ou de celle de $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{d}$, ou des deux permutations qui le prescrit, quand on a respectivement $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}$, $\mathfrak{l} = \mathfrak{n}$ ou $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{l}$ ou $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{n}$ ou $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} = \mathfrak{l} = \mathfrak{n}$. Outre la valeur 1, $\varkappa$ peut donc aussi prendre les valeurs 2 et 4.

7. Si $\mathfrak{h} = \mathfrak{m} = 0$, de sorte que 3.24 formes soient réduites, dont trois, y compris f même, se transforment cycliquement en elles-mêmes par la substitution $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, par quoi les coefficients $\begin{Bmatrix} \mathfrak{g}, & 0, & \mathfrak{k} \\ \mathfrak{l}, & 0, & \mathfrak{n} \end{Bmatrix}$ se changent en $\begin{Bmatrix} \mathfrak{k}, & 0, & \mathfrak{l} \\ \mathfrak{g}, & 0, & \mathfrak{n} \end{Bmatrix}$ et $\begin{Bmatrix} \mathfrak{l}, & 0, & \mathfrak{g} \\ \mathfrak{k}, & 0, & \mathfrak{n} \end{Bmatrix}$, alors $\lambda = 1$, 2, 4, 6 ou 24, suivant que, parmi les nombres $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{n}$, il n'y a pas d'égaux, ou un couple d'égaux, ou deux couples d'égaux, ou trois égaux, ou que tous les quatre soient égaux entre eux.

8. Si $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} = 0$, il y a 6.24 formes réduites. Six d'entre elles, parmi lesquelles f, résultent cycliquement les unes des autres au moyen de la substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, que je désigne par S. Les coefficients homogènes $\begin{Bmatrix} \mathfrak{g}, & 0, & 0 \\ \mathfrak{l}, & \mathfrak{m}, & \mathfrak{n} \end{Bmatrix}$ restent invariables quand on emploie la substitution $S^3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$, et se transforment, par S et S^{-2}, en $\begin{Bmatrix} \mathfrak{n}, & 0, & 0 \\ \mathfrak{l}, & \mathfrak{g}, & \mathfrak{m} \end{Bmatrix}$, par S^2 et S^{-1} en $\begin{Bmatrix} \mathfrak{m}, & 0, & 0 \\ \mathfrak{l}, & \mathfrak{n}, & \mathfrak{g} \end{Bmatrix}$. On a donc $\lambda = 2$, s'il n'y a pas une condition ultérieure de remplie; $\lambda = 4$, pourvu qu'on ait seulement $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$, ou seulement $\mathfrak{g} = \mathfrak{m}$, ou seulement $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}$; $\lambda = 12$ quand $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} = \mathfrak{n}$. Enfin et en dernier lieu :

9. Il faut encore tenir compte des cas dans lesquels trois des nombres $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ sont égaux à zéro. Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} = \mathfrak{k} = 0$. Il y a alors 4 fois 4.24 formes de réduites. Au premier groupe de 4.24 appartiennent la forme f et celles qui en résultent par les substitutions $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, et dont les coefficients coïncident. Au deuxième groupe de 4.24 appartiennent les

quatre formes résultant de la forme f et des trois autres précitées par la substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ qui coïncident entre elles. Il en est de même des troisième et quatrième groupes de 4.24 si, dans la dernière substitution, on permute cycliquement les lignes horizontales. Pour toutes ces $4.4.24$ formes, on a $\lambda = 4$, 8 ou 24, suivant que $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ sont tous différents ou que deux d'entre eux ou tous les trois sont égaux entre eux. Comme dans les $3.4.24$ dernières formes, parmi les coefficients qui remplacent $\left\{\begin{matrix} \mathfrak{g}, & \mathfrak{h}, & \mathfrak{k} \\ \mathfrak{l}, & \mathfrak{m}, & \mathfrak{n} \end{matrix}\right\}$, deux, qui sont rangés verticalement, et un autre, deviennent égaux à zéro, tandis que les trois autres prennent les valeurs arbitraires $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$; j'ai tranché la question les concernant, ainsi que tous les cas exceptionnels possibles relativement à des formes positives. La simplification que j'ai obtenue, dans ce qui précède, comparativement à l'exposé d'Eisenstein, est due à ce que mes conditions de réduction sont plus conformes à la nature des choses.

c. — *Relations géométriques.*

Si l'on désigne symboliquement par $(\mathfrak{a})$, relativement à sa grandeur et à sa position, une longueur rectiligne dans l'espace, dont les projections soient sur trois axes rectangulaires ξ, ξ_1, ξ_2, et, semblablement, par $(\mathfrak{b})$ et $(\mathfrak{c})$ des longueurs dont les projections soient sur les mêmes axes η, η_1, η_2 et ζ, ζ_1, ζ_2, l'ensemble des extrémités des longueurs partant d'un même point initial et devant être désignées symboliquement par $x(\mathfrak{a}) + y(\mathfrak{b}) + z(\mathfrak{c})$, où x, y et z expriment tous des nombres entiers, représente un système de points ordonnés parallélépipédiquement. En entendant, par le produit de deux longueurs pareilles, le produit de leurs longueurs absolues multiplié par le cosinus de leur différence de direction, expression symbolique déjà employée dans les *OEuvres posthumes de Gauss* (t. II, p. 305), et qui peut aussi s'énoncer par les quaternions d'Hamilton, alors le carré de la longueur $x(\mathfrak{a}) + y(\mathfrak{b}) + z(\mathfrak{c})$, identique au carré de la longueur absolue, est égal à $\begin{pmatrix} \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c} \\ \mathfrak{g}, & \mathfrak{h}, & \mathfrak{k} \end{pmatrix}(x, y, z)$, si l'on désigne les carrés des longueurs

$(\mathfrak{a})(\mathfrak{b})(\mathfrak{c})$ par $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, et les produits de ces longueurs, prises deux à deux, par $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$. L'exactitude de cette assertion résulte des équations

$$(7)\ \begin{cases} \xi^2+\xi_1^2+\xi_2^2=\mathfrak{a}, \quad \eta^2+\eta_1^2+\eta_2^2=\mathfrak{b}, \quad \zeta^2+\zeta_1^2+\zeta_2^2=\mathfrak{c}, \\ \eta\zeta+\eta_1\zeta_1+\eta_2\zeta_2=\mathfrak{g}, \quad \zeta\xi+\zeta_1\xi_1+\zeta_2\xi_2=\mathfrak{h}, \quad \xi\eta+\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2=\mathfrak{k}, \end{cases}$$

qui, même non symboliquement, donnent le même résultat. On peut démontrer de la même manière que, $\begin{pmatrix}\mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c} \\ \mathfrak{g}, & \mathfrak{h}, & \mathfrak{k}\end{pmatrix}(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)$ étant désigné par $\mathfrak{a}'$, on a

$$[\alpha(\mathfrak{a})+\alpha_1(\mathfrak{b})+\alpha_2(\mathfrak{c})][\beta(\mathfrak{a})+\beta_1(\mathfrak{b})+\beta_2(\mathfrak{c})]=\frac{\partial\mathfrak{a}'}{\partial\alpha}\frac{\beta}{2}+\frac{\partial\mathfrak{a}'}{\partial\alpha_1}\frac{\beta_1}{2}+\frac{\partial\mathfrak{a}'}{\partial\alpha_2}\frac{\beta_2}{2}+\ldots,$$

et l'on reconnaît que, si la forme f se change en la forme f' par la substitution $\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\end{vmatrix}$, dont le déterminant est, comme toujours, supposé égal à 1, les coefficients de f' ont les mêmes relations avec le système des points que ceux de f, pourvu qu'on s'imagine ses points reliés par d'autres lignes. Il résulte, de l'équation $I=\begin{vmatrix}\mathfrak{a} & \mathfrak{k} & \mathfrak{h} \\ \mathfrak{k} & \mathfrak{b} & \mathfrak{g} \\ \mathfrak{h} & \mathfrak{g} & \mathfrak{c}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\xi & \eta & \zeta \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2\end{vmatrix}^2$, que six fois les volumes des trois tétraèdres déterminés par les arêtes consécutives $(\mathfrak{a})(\mathfrak{b})(\mathfrak{c})$, $(\mathfrak{b})(\mathfrak{c})(\mathfrak{a})$ et $(\mathfrak{c})(\mathfrak{a})(\mathfrak{b})$ sont $=\pm\sqrt{I}$; ceux des trois tétraèdres déterminés par les arêtes consécutives $(\mathfrak{a})(\mathfrak{c})(\mathfrak{b})$, $(\mathfrak{c})(\mathfrak{b})(\mathfrak{a})$ et $(\mathfrak{b})(\mathfrak{a})(\mathfrak{c})$ sont $=\mp\sqrt{I}$. Je pose toujours $\begin{vmatrix}\xi & \eta & \zeta \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2\end{vmatrix}=+\sqrt{I}$.

Je désigne les premiers sous-déterminants de ce déterminant par $\Xi, \Xi_1, \Xi_2, \mathrm{H}, \mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2, \mathrm{Z}, \mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_2$, de sorte que $\xi_s\Xi_s+\eta_s\mathrm{H}_s+\zeta_s\mathrm{Z}_s=\sqrt{I}$ et que $\begin{vmatrix}\Xi & \mathrm{H} & \mathrm{Z} \\ \Xi_1 & \mathrm{H}_1 & \mathrm{Z}_1 \\ \Xi_2 & \mathrm{H}_2 & \mathrm{Z}_2\end{vmatrix}=I$. Si l'on désigne symboliquement par $(\mathfrak{A})$ un fragment de plan, déterminé quant à son aire et à sa position, et dont les projections perpendiculaires aux trois axes sont Ξ, Ξ_1, Ξ_2; si l'on agit de même par analogie avec $(\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{C})$; si, de plus, on entend par produit de deux tels fragments de plan le produit de leur aire multiplié par le cosinus de leur différence de direction, on obtient

$$(\mathfrak{A}).(\mathfrak{A})=\mathfrak{A},\quad (\mathfrak{B}).(\mathfrak{B})=\mathfrak{B},\quad (\mathfrak{C}).(\mathfrak{C})=\mathfrak{C},\quad (\mathfrak{B}).(\mathfrak{C})=\mathfrak{G},$$
$$(\mathfrak{C}).(\mathfrak{A})=\mathfrak{H},\quad (\mathfrak{A}).(\mathfrak{B})=\mathfrak{K},$$

comme il résulte des équations

$$(8)\quad \begin{cases} \Xi^2+\Xi_1^2+\Xi_2^2=\mathfrak{A},\quad H^2+H_1^2+H_2^2=\mathfrak{B},\quad Z^2+Z_1^2+Z_2^2=\mathfrak{C},\\ HZ+H_1Z_1+H_2Z_2=\mathfrak{G},\quad Z\Xi+Z_1\Xi_1+Z_2\Xi_2=\mathfrak{H},\\ \Xi H+\Xi_1H_1+\Xi_2H_2=\mathfrak{K}.\end{cases}$$

Ces mêmes équations montrent que $\begin{vmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{K} & \mathfrak{H} \\ \mathfrak{K} & \mathfrak{B} & \mathfrak{G} \\ \mathfrak{H} & \mathfrak{G} & \mathfrak{C} \end{vmatrix} = I^2.$

Avec la substitution $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$, on a

$$\xi'_s=\alpha\xi_s+\alpha_1\eta_s+\alpha_2\zeta_s,\quad \eta'_s=\beta\xi_s+\beta_1\eta_s+\beta_2\zeta_s,$$
$$\zeta'_s=\gamma\xi_s+\gamma_1\eta_s+\gamma_2\zeta_s,$$

ou, sommairement,

$$(\mathfrak{a}')=\alpha(\mathfrak{a})+\alpha_1(\mathfrak{b})+\alpha_2(\mathfrak{c}),\quad (\mathfrak{b}')=\beta(\mathfrak{a})+\beta_1(\mathfrak{b})+\beta_2(\mathfrak{c}),$$
$$(\mathfrak{c}')=\gamma(\mathfrak{a})+\gamma_1(\mathfrak{b})+\gamma_2(\mathfrak{c}).$$

Si l'on met les expressions pour ξ'_s, η'_s, ζ'_s dans l'équation $\xi'_s\Xi'_s+\eta'_sH'_s+\zeta'_sZ'_s=\sqrt{I}$, la considération des expressions multipliées par ξ_s, η_s, ζ_s donnera les équations

$$\Xi_s=\alpha\Xi'_s+\beta H'_s+\gamma Z'_s,\quad H_s=\alpha_1\Xi'_s+\beta_1H'_s+\gamma_1Z'_s,$$
$$Z_s=\alpha_2\Xi'_s+\beta_2H'_s+\gamma_2Z'_s,$$

ou, sommairement,

$$(\mathfrak{A})=\alpha(\mathfrak{A}')+\beta(\mathfrak{B}')+\gamma(\mathfrak{C}'),\quad (\mathfrak{B})=\alpha_1(\mathfrak{A}')+\beta_1(\mathfrak{B}')+\gamma_1(\mathfrak{C}'),$$
$$(\mathfrak{C})=\alpha_2(\mathfrak{A}')+\beta_2(\mathfrak{B}')+\gamma_2(\mathfrak{C}').$$

La différence des directions de deux plans dépend des directions de circuits que l'on admet comme positives dans les plans. Si l'on admet ces directions comme telles, que la ligne commune à deux plans, considérée comme limite d'aires fermées situées toutes d'un seul côté de cette ligne dans les deux plans, fasse son parcours, dans les deux, en des sens opposés, l'angle cherché est celui qui est compris entre deux droites, dans l'intérieur des aires fermées, perpendiculaires à la ligne commune, desquelles droites l'une finit et l'autre commence à cette ligne. Pour tous les plans d'un polyèdre fermé, on peut admettre de telles directions de circuit qu'entre deux plans ayant une arête commune la condition indiquée soit remplie. C'est seulement en admettant cela que l'on trouve que la somme des projections de toutes ces positions de plans dans un plan quelconque est égale à zéro. Ainsi $\mathfrak{H}$ précité a le signe du cosinus de l'angle que forme le plan du triangle complétement déterminé par $[-(\mathfrak{a}), +(\mathfrak{b})]$ avec le plan du triangle $[-(\mathfrak{b}), +(\mathfrak{c})]$ quand, suivant l'usage, on fait partir du même point les lignes $+(\mathfrak{a})$, $+(\mathfrak{b})$ et $+(\mathfrak{c})$. Si $\mathfrak{f}$ est réduite, d'après ma définition, pour l'ordre $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, de sorte que les différences de directions de deux lignes tant adjacentes qu'opposées du quadrilatère non plan $(\mathfrak{a})(\mathfrak{b})(\mathfrak{c})(\mathfrak{d})$ sont des angles obtus ou droits et qu'en outre $\mathfrak{h}.\mathfrak{m}$ n'est pas plus grand que $\mathfrak{g}.\mathfrak{l}$ ou $\mathfrak{k}.\mathfrak{n}$, alors les différences de directions de deux plans de tétraèdres, sur lesquels se trouvent les côtés $(\mathfrak{d})$ et $(\mathfrak{a})$, $(\mathfrak{a})$ et $(\mathfrak{b})$, $(\mathfrak{b})$ et $(\mathfrak{c})$, $(\mathfrak{c})$ et $(\mathfrak{d})$, sont des angles obtus ou droits, parce que les coefficients $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{N}_1$ de la forme $\mathfrak{F}_1$ sont négatifs ou nuls. Les directions de circuit y sont déterminées, non par $[+(\mathfrak{a}), +(\mathfrak{b})]$, $[+(\mathfrak{b}), +(\mathfrak{c})]$, ..., mais d'après la règle donnée plus haut. Si par exemple ici, où toujours le point initial d'un côté coïncide avec le point final d'un autre, la face $(\mathfrak{C})$ est déterminée comme $[+(\mathfrak{a}), +(\mathfrak{b})]$, il faudra prendre, pour $(\mathfrak{A})$, $[-(\mathfrak{b}), +(\mathfrak{b})+(\mathfrak{c})]$, ou, ce qui donne le même résultat, $[-(\mathfrak{b}), +(\mathfrak{c})]$. Mais la projection de $(\mathfrak{a})$, perpendiculaire sur $(\mathfrak{b})$, a comme projections, sur les trois axes, $\xi - \frac{\mathfrak{k}}{\mathfrak{b}}\eta$, $\xi_1 - \frac{\mathfrak{k}}{\mathfrak{b}}\eta_1$, $\xi_2 - \frac{\mathfrak{k}}{\mathfrak{b}}\eta_2$; la projection de $(\mathfrak{c})$, perpendiculaire sur $(\mathfrak{b})$, celles de $\zeta - \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{b}}\eta$, $\zeta_1 - \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{b}}\eta_1$, $\zeta_2 - \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{b}}\eta_2$. Le cosinus de la différence des directions de ces deux lignes multiplié par le produit de leurs longueurs absolues est donc $\mathfrak{h} - \frac{\mathfrak{g}\mathfrak{k}}{\mathfrak{b}}$; le même cosinus, multiplié par le produit des valeurs absolues des deux aires, a pour valeur $-\mathfrak{H}$.

La propriété que possède le quadrilatère $(\mathfrak{a})(\mathfrak{b})(\mathfrak{c})(\mathfrak{d})$ appartient aussi au quadrilatère $(\mathfrak{c})(\mathfrak{b})(\mathfrak{a})(\mathfrak{d})$, qui lui est égal, mais non superposable. Les formes qui correspondent à deux quadrilatères, ayant les mêmes rapports que les deux précédents, se transforment l'une en l'autre à l'aide de la substitution $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ au déterminant -1; mais le déterminant -1 se change en déterminant $+1$, si l'on change dans leurs opposés les signes de tous les coefficients et les directions des longueurs, de sorte que cette différence essentielle pour les quadrilatères disparaît dans les formes. Les formes correspondant aux quadrilatères $(\mathfrak{b})(\mathfrak{c})(\mathfrak{a})(\mathfrak{d})$ et $(\mathfrak{c})(\mathfrak{a})(\mathfrak{b})(\mathfrak{d})$, ainsi qu'aux quadrilatères $(\mathfrak{a})(\mathfrak{c})(\mathfrak{b})(\mathfrak{d})$ et $(\mathfrak{b})(\mathfrak{a})(\mathfrak{c})(\mathfrak{d})$, qui leur sont égaux, mais non superposables, ne sont point réduites en ce qui regarde l'ordre des coefficients. Au moyen de trois plans, qui sont déterminés par la diagonale principale $(\mathfrak{d})$ et les sommets non reposant sur $(\mathfrak{d})$, d'un parallélépipède déterminé par les arêtes $(\mathfrak{a})$, $(\mathfrak{b})$, $(\mathfrak{c})$, ce parallélépipède est divisé en ces six tétraèdres précédemment indiqués et qui résultent les uns des autres par permutations entre $(\mathfrak{a})$, $(\mathfrak{b})$ et $(\mathfrak{c})$, et dont on voit que deux seulement, opposés l'un à l'autre, peuvent avoir toutes leurs arêtes saillantes. Quant aux six espèces de triangles, situés sur les faces des tétraèdres, aucun d'eux ne peut être obtusangle en cas de réduction, parce qu'alors aucun des nombres $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ n'est positif et que par conséquent $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ ne sont pas plus petits que $-k$, etc.

Pour la signification géométrique des équations (5) et (6), je dirai encore que l'on peut considérer la longueur déterminée par $x(\mathfrak{a})+y(\mathfrak{b})+z(\mathfrak{c})$, aussi bien que la longueur $x(\mathfrak{a})+y(\mathfrak{b})+z(\mathfrak{c})+t(\mathfrak{d})$, soit que l'on admette que $t=0$, soit que l'on augmente ou diminue d'un seul et même nombre x, y, z et t. Si l'on se figure les points du système rangés sur des plans parallèles à la face $[(\mathfrak{d}), (\mathfrak{a})]$ correspondante à l'indice 3 employé ci-dessus, le u_3, employé plus haut désignera le nombre des couches séparées par ces plans et coupées par la longueur $x(\mathfrak{a})+y(\mathfrak{b})+z(\mathfrak{c})+t(\mathfrak{d})$, ce nombre étant compté comme positif à partir de la face tétraédrique [($\mathfrak{d}$), ($\mathfrak{a}$)] vers le côté sur lequel est couché le tétraèdre lui-même. Comme, par analogie, la même chose est applicable à u_4 et que (12) désigne la distance des points sur la ligne d'intersection des plans 1 et 2, on reconnaît la signification du terme (12) $u_3 u_4$, comme aussi des autres termes de l'équation (6). Cette proposition géométrique se trouve dans des remarques posthumes de Gauss (*OEuvres*, t. II, p. 307).

Un rôle important est joué, dans la suite, par les cas particuliers étudiés dans la section précédente, alinéas 7 et 8. Dans le dernier, ($\mathfrak{a}$) est perpendiculaire sur ($\mathfrak{A}$); dans le premier, chaque côté du quadrilatère est perpendiculaire à son côté opposé; le tétraèdre a par conséquent la propriété, élucidée par Lagrange et plus récemment par M. Borchardt (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1865 et 1866; *Rapports mensuels de Berlin*, juin 1872) et par M. Kronecker (*Rapports mensuels de Berlin*, juin 1872), d'avoir le plus grand volume possible, étant données les aires des faces. La condition $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{M}_1 = 0$ indique, par analogie, que chaque face du tétraèdre est perpendiculaire à sa face opposée ou, suivant le langage usuel, que les angles dièdres sont droits à deux arêtes opposées; il en résulte pareillement que le tétraèdre a le plus grand volume possible, étant données les longueurs des quatre autres arêtes. Si l'on tient à ne pas quitter la configuration ordinaire des formes et cependant à ne pas détruire la symétrie entre $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, on peut appliquer à f la substitution $\left|\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right|$ au déterminant 2 qui, d'après ce qui précède, est identique avec la substitution $\left|\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{matrix}\right|$. Donc la permutation de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{d}$ n'effectue autre chose que l'application de la substitution $\left|\begin{matrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}\right|$ à la forme naissante. Ce changement a de l'analogie avec celui qu'a utilisé M. Borchardt (*Mémoires de Berlin*, 1865, p. 7), laquelle repose sur l'application de la substitution $\left|\begin{matrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{matrix}\right|$ à la forme f_1, et, conséquemment, de la substitution adjointe $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ à la forme adjointe $\mathfrak{F}_1$, et qui rétablit la même symétrie relativement aux chiffres 1, 2, 3, 4, utilisés plus haut. Dans la première transformation, les arêtes $(\mathfrak{a})$, $(\mathfrak{b})$, $(\mathfrak{c})$ d'un parallélépipède sont remplacées par les diagonales $(\mathfrak{b})+(\mathfrak{c})$, $(\mathfrak{c})+(\mathfrak{a})$, $(\mathfrak{a})+(\mathfrak{b})$ des faces latérales; dans la seconde, les arêtes $(\mathfrak{a}_1)$, $(\mathfrak{b}_1)$, $(\mathfrak{c}_1)$ d'un parallélépipède, parmi les principales diagonales duquel se trouve $(\mathfrak{d}_1)$, sont remplacées par les trois autres diagonales principales du même parallélépipède [*].

Comme l'équation fondamentale et les autres les plus simples de la Trigonométrie sphérique sont contenues dans celles-ci :

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{h}\mathfrak{k}-\mathfrak{a}\mathfrak{g},\quad I=\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{C}-\mathfrak{H}^2}{\mathfrak{b}}=\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\mathfrak{K}^2}{\mathfrak{c}},\quad \mathfrak{k}\mathfrak{H}+\mathfrak{b}\mathfrak{G}+\mathfrak{g}\mathfrak{C}=0,$$

de même les parties purement géométriques de la cristallographie sont contenues dans la théorie précédente, puisqu'on peut supposer, dans les substances cristallisées, des points parallélépipédiquement ordonnés, abstraction faite d'autres points pareils (*voir* Bravais, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XXIX; 1849). Si, suivant Miller, d'après les citations dans le *Manuel de Minéralogie* de Des Cloizeaux, u, v, w désignent les paramètres d'une face, tandis que les axes du type sont désignés, en direction et longueur, par $(\mathfrak{a})$, $(\mathfrak{b})$, $(\mathfrak{c})$, cette face sera représentée par $u(\mathfrak{A})+v(\mathfrak{B})+w(\mathfrak{C})$.

Si $\mathfrak{F}$ se change en $\mathfrak{F}'$ par une substitution dont les deux premières colonnes sont u, v, w et u_1, v_1, w_1, le cosinus de l'angle dièdre formé par $(\mathfrak{A}')$ et $(\mathfrak{B}')$ est $\dfrac{\mathfrak{K}'}{\sqrt{\mathfrak{A}'}\cdot\sqrt{\mathfrak{B}'}}$, la tangente de cet angle est $\dfrac{\sqrt{I'}}{\mathfrak{K}'}$, l'arête commune aux deux faces ou l'axe de la zone est

$$\begin{vmatrix} v & v' \\ w & w' \end{vmatrix}\cdot(\mathfrak{a})+\begin{vmatrix} w & w' \\ u & u' \end{vmatrix}\cdot(\mathfrak{b})+\begin{vmatrix} u & u' \\ v & v' \end{vmatrix}\cdot(\mathfrak{c}).$$

La relation posée par Carnot entre les cosinus des six angles dièdres

[*] L'article qui suit a été remis à la rédaction en juin 1875, et rien n'en a été changé depuis.

formés par quatre faces et dont cinq suffisent pour déterminer le type est donnée par $\begin{vmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{K} & \mathfrak{H} & \mathfrak{L} \\ \mathfrak{K} & \mathfrak{B} & \mathfrak{G} & \mathfrak{M} \\ \mathfrak{H} & \mathfrak{G} & \mathfrak{C} & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{L} & \mathfrak{M} & \mathfrak{N} & \mathfrak{D} \end{vmatrix} = 0$, de même que, pour les angles d'un quadrilatère non plan, par $\begin{vmatrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{k} & \mathfrak{h} & \mathfrak{l} \\ \mathfrak{k} & \mathfrak{b} & \mathfrak{g} & \mathfrak{m} \\ \mathfrak{h} & \mathfrak{g} & \mathfrak{c} & \mathfrak{n} \\ \mathfrak{l} & \mathfrak{m} & \mathfrak{n} & \mathfrak{d} \end{vmatrix} = 0$, si l'on divise les lignes et colonnes d'une part par $\sqrt{\mathfrak{A}}$, $\sqrt{\mathfrak{B}}$, $\sqrt{\mathfrak{C}}$, $\sqrt{\mathfrak{D}}$, et de l'autre par $\sqrt{\mathfrak{a}}$, $\sqrt{\mathfrak{b}}$, $\sqrt{\mathfrak{c}}$, $\sqrt{\mathfrak{d}}$. Les mineurs des déterminants ainsi obtenus donnent les rapports entre les quatre premières et entre les quatre secondes quantités. Si, en effet, il est vrai, comme je le lis dans les *Éléments de Cristallographie* de Naumann, Leipzig, 1856, p. 54 et suiv., qu'il serait pour toutes les formes cristallines *une loi générale confirmée par toutes les observations*, que les tangentes des angles dièdres formés par les faces d'une même zone soient en rapports rationnels, il devrait en être de même pour tous les coefficients des formes quadratiques ternaires correspondantes. Mais, abstraction faite du système cubique, si cette loi était rigoureusement exacte pour une température, elle ne pourrait pas l'être généralement pour les voisines, à cause de l'inégalité de la dilatation. La vraie loi est que tous les rapports anharmoniques pour lesdits angles dièdres sont rationnels. Il en est de même pour les angles plans qui sont possibles en une face, comme le dit Gauss en d'autres mots dans ses remarques posthumes (*OEuvres*, t. II, p. 308).

Les types cristallins peuvent être déterminés par les formes réduites $\mathfrak{f}$ ou $\mathfrak{F}_1$. Les tétraèdres correspondants, se changeant les uns en les autres par les substitutions $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$, ne représentent que des formes hémiédriques. Le nombre λ, identique à $\varkappa$ dans les cas 1 à 5 de III, *b*, indique le nombre de fois que ces tétraèdres coïncident avec eux-mêmes. Tandis que la forme générale correspond au système du prisme doublement oblique, on obtient, au cas 1 de III, *b*, comme type, un prisme rhomboïdal oblique, dont les arêtes sont $(\mathfrak{a})$ et $(\mathfrak{b})$ avec $(\mathfrak{c})$ ou $(\mathfrak{d})$, d'où résulte, pour $\mathfrak{F}_1$, le cas $\mathfrak{M}_1 = 0$, $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{K}_1$, appartenant à 6 de III, *b*, ou, si l'on avait $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}$, le cas $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{M}_1$,

$\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{N}_1$, appartenant à 2. On obtient le même système aux cas de 2, $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{m}$ ou $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{n}$ entraînant respectivement, pour $\mathfrak{f}_1$, les cas 1 ou 2. Le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{m}$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{n}$ offre trois axes rectangulaires moyennant la substitution $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. De même le cas 3, entraînant pour $\mathfrak{f}_1$ des cas mentionnés sous 6 et 2, donne un prisme rhomboïdal droit aux arêtes $(\mathfrak{a})$, $(\mathfrak{b})$ et $(\mathfrak{c}) - (\mathfrak{d})$. Les cas 4 et 5 entraînant, pour $\mathfrak{f}_1$, les deux derniers cas 7, conduisent au système rhomboédrique, $(\mathfrak{d})$ étant l'axe principal; et au cubique, $(\mathfrak{a})$, $(\mathfrak{b})$, $(\mathfrak{c})$, $(\mathfrak{d})$ étant les diagonales du cube. Les cas $\lambda = 2$, 4 et 12, compris dans 8, conduisent au système clinorhombique, le rhombique et l'hexagonal; enfin, les cas $\lambda = 4$, 8, 12 de 9 au système rhombique, quadratique, cubique. La condition $\mathfrak{h} = 0$, du cas 6, a été posée comme caractère d'un nouveau système *diclinique* par M. Schrauf (*Minéralogie physique*, I, Vienne, 1866), et la condition $\mathfrak{H}_1 = 0$ l'était par Mitscherlich et M. Naumann (au lieu cité et *Éléments de Minéralogie*, 9e éd., 1874); mais ni celles-ci, ni même les conditions de 7, $\mathfrak{h} = \mathfrak{m} = 0$ ou $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{M}_1 = 0$, ne donnent aucune symétrie ultérieure en espace si pour toutes ou pour une partie des réduites on a $\lambda = x$. Dans le cas $\mathfrak{h} = 0$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}$, on obtient comme type un prisme rhomboïdal oblique aux couples d'arêtes symétriques $(\mathfrak{b})$ et $(\mathfrak{b}) + (\mathfrak{c})$ ou $(\mathfrak{d})$ et $(\mathfrak{d}) + (\mathfrak{c})$, qui deviennent aussi symétriques entre eux et amènent le système rhombique ou quadratique si l'on a de plus $\mathfrak{l} = \mathfrak{k}$ ou $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} = \mathfrak{l} = \mathfrak{n}$. Le cas $\mathfrak{h} = \mathfrak{m} = 0$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} = \mathfrak{l}$ donne un rhomboèdre aux faces $(\mathfrak{A}_1)$, $(\mathfrak{B}_1)$, $(\mathfrak{C}_1)$, et un tétraèdre régulier pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} = \mathfrak{l} = \mathfrak{n}$.

(A suivre.)