JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE MATHIEU

Sur le problème des trois corps

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 3 (1877), p. 216-218.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1877_3_3__216_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Sur le problème des trois corps;

PAR M. ÉMILE MATHIEU.

(Extrait d'une Lettre à M. Resal.)

Le *Journal de Mathématiques* contient, dans le tome I (année 1875, p. 277-316), un Mémoire de M. Allégret *Sur le problème des trois corps*, dans lequel l'auteur pense avoir abaissé les équations du problème au quatrième ordre; mais la solution qu'il a donnée de cette question est tout à fait inexacte.

Ce Mémoire pourrait donner lieu à plusieurs observations; mais j'arrive tout de suite à la partie (p. 314-315) où se trouverait toute la force de la démonstration relative à l'abaissement du système des équations. L'auteur introduit dans l'expression de la force vive : 1° la vitesse de rotation d'une certaine droite dans le plan P des trois corps, vitesse qu'il représente par $\frac{d\chi}{dt}$; 2° une rotation du plan P autour du rayon vecteur s mené de l'origine au corps m, rotation qu'il représente par $\frac{d\rho}{dt}$; 3° une rotation $\frac{d\varpi}{dt}$ autour d'une droite située dans le plan P et perpendiculaire à s. Il remarque ensuite que la force vive 2T renferme $\frac{d\chi}{dt}$, $\frac{d\rho}{dt}$, $\frac{d\varpi}{dt}$, sans contenir χ, ρ, ϖ, puis il forme les quantités conjuguées des variables s, σ, ω, χ, ρ, ϖ, parmi lesquelles se trouvent celles qui ont pour valeurs

$$\frac{dT}{d\frac{d\rho}{dt}}, \quad \frac{dT}{d\frac{d\varpi}{dt}}, \quad \frac{dT}{d\frac{d\chi}{dt}},$$

et qu'il représente par ρ', ϖ', χ'. Il prend alors l'équation des forces vives

$$U - T = H,$$

où U est la fonction de forces et H une constante arbitraire; il remplace dans cette équation les quantités conjuguées aux variables s, σ, ω, χ, ρ, ϖ par les dérivées d'une fonction S par rapport à ces variables, et il forme ainsi l'équation aux différentielles partielles d'Hamilton. Il obtient, d'après cela, pour solution complète de cette équation, l'expression

$$S = C\chi + F\rho + G\varpi + V,$$

C, F, G étant trois constantes arbitraires et V une fonction indépendante de χ, ρ, ϖ.

L'erreur consiste à regarder $d\chi$, $d\rho$, $d\varpi$ comme de véritables différentielles et à introduire les variables χ, ρ, ϖ. En effet, conservant la caractéristique d pour indiquer les différentiations par rapport au temps t, représentons, suivant l'usage ordinaire, par la caractéristique δ les variations dans un déplacement virtuel; nous pouvons ainsi considérer les quantités $\delta\chi$, $\delta\rho$, $\delta\varpi$, mais on n'a pas

$$(a) \qquad \delta d\rho = d\delta\rho, \quad \delta d\varpi = d\delta\varpi, \quad \delta d\chi = d\delta\chi.$$

Or, si l'on se reporte à la démonstration des équations canoniques de la Dynamique, on verra qu'elle suppose que toutes les variables du problème satisfont à ce genre de conditions; par suite aussi, si ces conditions ne sont pas satisfaites par rapport à toutes les variables, on ne peut pas appliquer l'équation aux différences partielles d'Hamilton.

J'ai dit que les expressions $d\rho$, $d\varpi$, $d\chi$ ne satisfont pas aux équations (a); on a en effet, en désignant par $\frac{d\chi_1}{dt}$ la vitesse de rotation du rayon s,

$$\begin{aligned}
\delta d\rho &= d\delta\rho + d\varpi\,\delta\chi_1 - d\chi_1\,\delta\varpi,\\
\delta d\varpi &= d\delta\varpi + d\chi_1\,\delta\rho - d\rho\,\delta\chi_1,\\
\delta d\chi_1 &= d\delta\chi_1 + d\rho\,d\varpi - d\varpi\,\delta\rho,
\end{aligned}$$

comme on peut le reconnaître d'après ce qui se trouve dans la *Mécanique analytique* de Lagrange (t. II, section IX, n° 15).

M. Allégret remarque ensuite que les trois constantes C, F, G représentent les doubles des vitesses aréolaires prises autour de l'origine sur le plan P des trois corps et sur deux plans perpendiculaires à P et perpendiculaires entre eux, dont l'un est mené par le rayon s. Il trouve en effet, pour ces quantités, les valeurs suivantes :

$$F = \mu\sigma^2 \sin^2\omega \frac{d\rho}{dt},$$

$$C = (ms^2 + \mu\sigma^2)\frac{d\chi}{dt},$$

$$G = (ms^2 + \mu\sigma^2\cos^2\omega)\frac{d\varpi}{dt},$$

ω étant l'angle compris entre les deux rayons s et σ.

Le point d'analyse qui précède ayant échappé à l'auteur, ce dernier résultat aurait pu le prévenir qu'il n'était pas en bonne voie. En effet, ces trois équations, qu'il prend pour les intégrales des aires, n'ont plus lieu, parce que les plans qu'il considère sont mobiles et que les intégrales des aires ne doivent avoir lieu que pour des plans fixes. On peut, à la vérité, former encore trois équations équivalentes aux équations des aires par rapport à trois axes mobiles rectangulaires; mais alors il faut procéder ainsi : On considérera l'axe du plan invariable (ou l'axe du moment résultant des quantités de mouvement qui animent le système des corps), qui est constant en grandeur et en direction; on le projettera sur les positions qu'occupent ces trois axes mobiles au commencement d'un instant; on le projettera sur les mêmes positions à la fin de cet instant, et l'on exprimera que les trois dernières projections sont égales respectivement aux trois premières.