JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

HALPHEN

Sur une série de courbes analogues aux développées

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 2 (1876), p. 87-144.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1876_3_2__87_0>

Sur une série de courbes analogues aux développées;

PAR M. HALPHEN.

L'étude des fonctions abéliennes et des théories géométriques qui s'y rattachent a fait accorder une attention particulière aux transformations *uniformes*. On entend par là les transformations qui changent une courbe algébrique en une autre lui correspondant *point par point*. Il en est qui jouissent d'une propriété spéciale et importante : elles conduisent d'une courbe ayant des singularités quelconques à une transformée qui ne possède que des singularités ordinaires (*). L'objet de ce Mémoire est l'étude d'une transformation uniforme particulière, de définition géométrique, jouissant de cette propriété.

Soit S une courbe plane et algébrique qu'il s'agit de transformer. Je prends une conique arbitraire, dans le même plan. Je considère un point de S, la tangente en ce point, et enfin la polaire du même point relativement à la conique. L'intersection de cette tangente et de cette polaire engendre une courbe S^1, qui est une transformée de S et lui correspond point par point. Par la même construction, on déduit de S^1 une nouvelle transformée S^2, et ainsi de suite. Une courbe quelconque S^i de cette série correspond point par point à la courbe initiale S. Je prouverai dans ce Mémoire que, quelle que soit la courbe S, il existe toujours un nombre fini et déterminé, tel que toutes les transformées S^i, de rang supérieur à ce nombre, ne possèdent que des singularités ordinaires. Ainsi la transformation géométrique très-simple, par laquelle on passe de S à S^1, répétée un nombre fini de fois, constitue une transformation uniforme jouissant de la propriété demandée.

La courbe S^1 a déjà été considérée à d'autres points de vue, notam-

(*) *Voir*, à ce sujet, deux Notes : l'une de M. Nöther (*Gœtt. Nachr.*, 1871), l'autre de l'Auteur du présent Mémoire (*Comptes rendus*, t. LXXX, p. 638).

ment par M. Laguerre. Au lieu de la figure formée par S et S', que l'on envisage une figure corrélative Σ, Σ^i. La courbe Σ^i comprend, comme cas particulier, la développée de Σ. Par là, l'étude des courbes S^i se rattache à celle des développées successives d'une même courbe. J'ai eu déjà, dans un *Mémoire sur les points singuliers* (*), l'occasion de m'occuper de ces développées, et j'ai obtenu le théorème suivant : *A partir d'un certain rang, les degrés et les classes des développées successives d'une courbe algébrique plane quelconque forment deux progressions arithmétiques de même raison*. On verra, dans le Mémoire actuel, que les courbes S^i jouissent de propriétés analogues.

Ce travail se rattache encore au Mémoire précité, en ce que je m'y appuie sur plusieurs propriétés des points singuliers. Dans le § I, je rappelle ces propriétés, et je donne quelques formules nécessaires pour la suite. Ces formules sont utiles dans un grand nombre de questions analogues.

Dans le § II, j'étudie les points singuliers des courbes S^i, et je parviens au théorème principal, consistant en ce que ces courbes n'ont que des singularités ordinaires, pourvu que leur indice soit supérieur à une certaine limite.

Dans le § III, je détermine les degrés et les classes des courbes S^i : j'obtiens incidemment plusieurs résultats déjà connus, entre autres la formule qui donne explicitement le *genre* d'une courbe quelconque (**). Je trouve enfin une loi uniforme à laquelle les degrés et les classes des courbes S^i obéissent toujours, quelle que soit la courbe initiale, pourvu que l'indice i soit supérieur à la limite ci-dessus.

Enfin, dans le § IV, j'étudie les modifications que subissent les résultats précédents dans un cas particulier. J'en déduis, en le précisant et le complétant, le théorème rappelé plus haut, et qui concerne les développées.

(*) Ce Mémoire sera inséré au *Recueil des Savants étrangers* (Voir *Comptes rendus*, t. LXXX, p. 97).

(**) Voir *Comptes rendus*, t. LXXVIII, p. 1833.

§ I.

1. Les considérations qui vont suivre ont pour point de départ une proposition relative aux fonctions algébriques, que l'on peut énoncer ainsi :

Soit y une fonction algébrique de x, et dont n valeurs s'évanouissent avec x : 1° pour une valeur infiniment petite de x, n valeurs de y sont infiniment petites ; 2° ces n valeurs de y se répartissent en groupes tels que, si Q est le nombre de ces valeurs contenues dans un quelcnoque de ces groupes, ces Q valeurs de y forment une seule et même fonction uniforme de $x^{\frac{1}{Q}}$ (*).

Ainsi s'introduit au sujet, soit des valeurs critiques des fonctions, soit des points singuliers des courbes algébriques, la considération de fonctions uniformes d'une puissance fractionnaire de la variable. C'est sur de telles fonctions que j'ai à donner ici quelques détails, en admettant comme connue la proposition ci-dessus.

Soit donc y une fonction uniforme de $x^{\frac{1}{Q}}$, s'évanouissant avec x. Pour de petites valeurs de x, y est développable en série suivant les puissances entières et positives de $x^{\frac{1}{Q}}$, c'est-à-dire suivant des puissances ascendantes et fractionnaires de x. Soit $\frac{p}{q}$ l'exposant de x dans le premier terme de la série, cet exposant étant réduit à sa plus simple expression : p et q sont deux entiers positifs, premiers entre eux, et qui peuvent être égaux à l'unité. En outre, q est un diviseur de Q. Je considère maintenant parmi les exposants suivants le premier de ceux qui, réduits à leur plus simple expression, n'aient pas pour dénominateurs q ou des diviseurs de q. Soit m_1 cet exposant ; je le mets sous la forme

$$m_1 = \frac{p}{q} + \frac{p_1}{qq_1},$$

(*) PUISEUX, *Mémoire sur les fonctions algébriques.* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 1re série, t. XV.)

où p_1 et q_1 sont des entiers positifs, premiers entre eux, et dont le second ne peut être l'unité. En outre qq_1 est un diviseur de Q, car qq_1 est le plus petit dénominateur commun à $\frac{p}{q}$ et m_1. Je considère ensuite, parmi les exposants suivants, le premier de ceux qui, réduits à leur plus simple expression, n'aient pas pour dénominateurs qq_1 ou des diviseurs de qq_1. Soit m_2 cet exposant; je le mets sous la forme

$$m_2 = \frac{p}{q} + \frac{p_1}{qq_1} + \frac{p_2}{qq_1q_2},$$

où p_2 et q_2 sont des entiers positifs, premiers entre eux, et dont le second ne peut être l'unité. En outre, qq_1q_2 est un diviseur de Q. En poursuivant de la sorte, je distingue une suite d'exposants de la forme

$$m_k = \frac{p}{q} + \frac{p_1}{qq_1} + \frac{p_2}{qq_1q_2} + \dots + \frac{p_k}{qq_1q_2\dots q_k},$$

où p_k et q_k sont deux entiers positifs, premiers entre eux, le second ne pouvant être l'unité; et, en outre, $qq_1q_2\dots q_k$ est toujours un diviseur de Q. Pour cette raison, le nombre de ces exposants est limité. Soit m_s le dernier d'entre eux. Les exposants de tous les termes suivants ont pour dénominateurs des diviseurs de $qq_1q_2\dots q_s = Q'$. Ainsi la série considérée est une fonction uniforme de $x^{\frac{1}{Q'}}$. On peut donc supposer $Q = Q'$. Les exposants $m_1, m_2, \dots, m_s$ jouent, dans beaucoup de questions, un rôle prépondérant. Souvent même ce sont les seuls éléments que l'on ait besoin de connaître relativement à la fonction y. Pour cette raison, j'emploie la notation suivante, qui m'a paru d'un usage commode. Par la relation

$$(1) \qquad y = \left[\frac{p}{q}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_s}{q_s}\right](x),$$

j'indique que les exposants *caractéristiques* $m_1, m_2, \dots, m_s$, du développement de y suivant les puissances croissantes de x, sont formés au moyen des deux séries de nombres $p, p_1, \dots$ et $q, q_1, \dots$, d'après la règle

$$m_k = \frac{p}{q} + \frac{p_1}{qq_1} + \frac{p_2}{qq_1q_2} + \dots + \frac{p_k}{qq_1q_2\dots q_k}.$$

Outre les exposants caractéristiques, on a parfois besoin de considérer aussi les coefficients correspondants. J'indique alors ces coefficients *caractéristiques* en écrivant

$$(2)\qquad y=\left[(a)\frac{p}{q},\ (a_1)\frac{p_1}{q_1},\ (a_2)\frac{p_2}{q_2},\dots,\ (a_s)\frac{p_s}{q_s}\right](x);$$

cette notation signifie que le terme d'exposant m_k est $a_k x^{m_k}$.

Si deux fonctions y et z de la variable x sont représentées par deux développements dont les exposants caractéristiques soient respectivement les mêmes, ainsi que les coefficients correspondants, je l'exprime abréviativement en écrivant $y \equiv z$.

2. Voici quelques formules relatives au calcul de l'algorithme (2), et dont il sera fait usage dans le cours de ce Mémoire. Je les donne sans démonstration ; le lecteur y suppléera sans difficulté. Ces formules sont relatives, les unes à une seule fonction, les autres à deux fonctions d'une même variable. Plusieurs d'entre elles sont susceptibles de généralisation ; il est entendu que je ne les donne ici que pour les cas dont j'ai besoin actuellement.

Soit y, représenté par la formule (2); on en déduit

$$(3)\qquad x\frac{dy}{dx}=\left[\left(\frac{p}{q}a\right)\frac{p}{q},\ (m_1a_1)\frac{p_1}{q_1},\ (m_2a_2)\frac{p_2}{q_2},\dots,\ (m_sa_s)\frac{p_s}{q_s}\right](x),$$

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} y^m = x^{(m-1)\frac{p}{q}}\Big[&(a^m)\frac{p}{q},\ (ma^{m-1}a_1)\frac{p_1}{q_1},\\ &(ma^{m-1}a_2)\frac{p_2}{q_2},\dots,\ (ma^{m-1}a_s)\frac{p_s}{q_s}\Big](x),\end{aligned}\right.$$

$$(5)\qquad \frac{1}{1-y}\equiv 1+y,$$

$$(6)\qquad x=\left[(b)\frac{q}{p},\ (b_1)\frac{p_1}{q_1},\ (b_2)\frac{p_2}{q_2},\dots,\ (b_s)\frac{p_s}{q_s}\right](y),$$

avec les relations suivantes entre les coefficients $a,\dots$ et $b,\dots$:

$$(7)\qquad a^q b^p = 1,\quad \frac{pab_k}{qba_k}=a^{\frac{n_k}{p}},\quad (k=1,2,\dots,s),$$

formule où l'on a posé

$$(8)\qquad R_k = \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_1 q_2} + \ldots + \frac{p_k}{q_1 q_2 \ldots q_k}.$$

Les formules suivantes sont relatives à deux fonctions, y et z. La fonction y est toujours représentée par la formule (2); la fonction z est représentée par

$$(9)\qquad z = \left[(\alpha)\frac{\pi}{q}, (\alpha_1)\frac{\pi_1}{q_1}, (\alpha_2)\frac{\pi_2}{q_2}, \ldots, (\alpha_s)\frac{\pi_s}{q_s}\right](x).$$

Il s'agit de mettre sous une forme analogue la somme, le produit et le quotient des deux fonctions; je ne considère ici que des cas particuliers :

1° Si l'on a

$$\pi > p, \quad \pi_1 \geqq p_1, \quad \pi_2 \geqq p_2, \quad \ldots, \quad \pi_s \geqq p_s,$$

il en résulte

$$(10)\qquad y + z \equiv y.$$

2° Si l'on a

$$\pi = p, \quad \pi_1 = p_1, \quad \pi_2 = p_2, \quad \ldots, \quad \pi_s = p_s,$$

il en résulte

$$(11)\quad y + z = \left[(a+\alpha)\frac{p}{q}, (a_1+\alpha_1)\frac{p_1}{q_1}, (a_2+\alpha_2)\frac{p_2}{q_2}, \ldots, (a_s+\alpha_s)\frac{p_s}{q_s}\right](x),$$

sous la condition

$$\alpha_k + a_k \gtrless 0, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, s).$$

3° Si l'on a

$$\pi_1 > p_1, \quad \pi_2 \geqq p_2, \quad \pi_3 \geqq p_3, \quad \ldots, \quad \pi_s \geqq p_s,$$

il en résulte

$$(12)\qquad x^{-\frac{\pi}{q}} yz \equiv \alpha y,$$

$$(13)\qquad \alpha x^{\frac{\pi}{q}} \frac{y}{z} \equiv y.$$

4° Si l'on a

$$\pi_1 = p_1, \quad \pi_2 = p_2, \quad \pi_3 = p_3, \quad \ldots, \quad \pi_s = p_s,$$

il en résulte

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} x^{-\frac{\pi}{q}} yz = \Big[& (a\alpha)\frac{p}{q}, \ (\alpha_1\alpha + a\alpha_1)\frac{p_1}{q_1}, \\ & (a_2\alpha + a_2\alpha)\frac{p_2}{q_2}, \ldots, (a_s\alpha + a\alpha_s)\frac{p_s}{q_s}\Big](x), \end{aligned} \right.$$

sous la condition

$$a_k\alpha + a\alpha_k \gtrless 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, s).$$

On a, en outre, pour le quotient des deux fonctions,

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha^2 x^{\frac{\pi}{q}} \frac{y}{z} = \Big[& (a\alpha)\frac{p}{q}, \ (a_1\alpha - a\alpha_1)\frac{p_1}{q_1}, \\ & (a_2\alpha - d\alpha_2)\frac{p_2}{q_2}, \ldots, (a_s\alpha - a\alpha_s)\frac{p_s}{q_s}\Big](x), \end{aligned} \right.$$

sous la condition

$$a_k\alpha - a\alpha_k \gtrless 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, s).$$

Les formules suivantes se rapportent au problème de l'élimination de x entre les équations (2) et (9), de manière à obtenir une relation entre y et z. Je ne considère que des cas particuliers.

1° Si l'on a

$$\pi_1 < p_1, \quad \pi_2 \leqq p_2, \quad \ldots, \quad \pi_s \leqq p_s$$

il en résulte

$$(16) \quad z = \left[\left(\alpha a^{-\frac{\pi}{p}}\right)\frac{\pi}{p}, \ (\alpha_1 a^{-t_1})\frac{\pi_1}{q_1}, \ (\alpha_2 a^{-t_2})\frac{\pi_2}{q_2}, \ldots, (\alpha_s a^{-t_s})\frac{\pi_s}{q_s}\right](y)$$

avec

$$t_k = \frac{\pi}{p} + \frac{\pi_1}{pq_1} + \frac{\pi_2}{pq_1q_2} + \ldots + \frac{\pi_k}{pq_1q_2\ldots q_k}, \quad (k = 1, 2, \ldots, s).$$

2° Le cas où l'on a

$$\pi_1 > p_1, \quad \pi_2 \geqq p_2, \quad \ldots, \quad \pi_s \geqq p_s$$

se traitera aisément par l'emploi de la formule (16), en intervertissant les deux variables y et z.

3° Si l'on a

$$\pi_1 = p_1, \quad \pi_2 = p_2, \quad \ldots, \quad \pi_s = p_s,$$

il en résulte

$$(17) \qquad z = \left[\left(\alpha a^{-\frac{\pi}{p}}\right)\frac{\pi}{p}, (\mathrm{A}_1)\frac{p_1}{q_1}, (\mathrm{A}_2)\frac{p_2}{q_2}, \ldots, (\mathrm{A}_s)\frac{p_s}{q_s}\right](y),$$

formule dans laquelle on a posé

$$(18) \qquad \mathrm{A}_k = \frac{a^{-t_k}}{pa}(pa\alpha_k - \pi\alpha a_k), \quad (k = 1, 2, \ldots, s).$$

L'exactitude de la formule (17) est d'ailleurs subordonnée à la condition

$$pa\alpha_k - \pi\alpha a_k \gtrless 0.$$

Enfin, si l'on considère une autre fonction u, qui ne diffère de y que par une fonction uniforme de x, commençant par un terme du premier degré

$$u = y - cx + \ldots,$$

et que l'on ait

$$\pi_1 \leqq p_1, \quad \pi_2 \leqq p_2, \quad \ldots, \quad \pi_s \leqq p_s,$$

il en résulte

$$(19) \qquad z = \left[\left(\alpha c^{-\frac{\pi}{q}}\right)\frac{\pi}{q}, \quad (\alpha_1 c^{-t_1})\frac{\pi_1}{q_1}, \quad (\alpha_2 c^{-t_2})\frac{\pi_2}{q_2}, \ldots, \quad (\alpha_s c^{-t_s})\frac{\pi_s}{q_s}\right](u).$$

5. Au point de vue algébrique, quand on considère la fonction y de la variable x comme une racine d'une équation algébrique dont les coefficients sont rationnels en x, un développement, tel que celui qui est représenté par la relation (2), s'applique à un groupe de racines. Un tel groupe est désigné habituellement sous le nom de *système circulaire*.

Au point de vue géométrique, quand on considère x et y comme les coordonnées rectilignes d'un point d'une courbe, un développement, tel que celui qu'on vient d'envisager, s'applique à un groupe de branches de la courbe. Si le premier exposant $\frac{p}{q}$ est supérieur à l'unité, ces branches ont pour tangente commune, à l'origine, la droite $y=0$, et ont toutes avec cette droite des contacts d'ordre $\frac{p-q}{q}$. Le nombre de ces branches est $qq_1q_2\ldots q_s = \mathrm{Q}$. Ce groupe de branches peut être appelé, comme je l'ai déjà fait en d'autres occasions, *système circulaire de branches*. Le nombre Q est l'*ordre de multiplicité* de ce système circulaire. On peut aussi, comme le fait M. Cayley, employer le nom de *branche superlinéaire*, en remplaçant cette désignation par celle de *branche linéaire* pour le cas où Q est l'unité. Le point aux environs duquel le développement (2) est applicable, et qui est ici l'origine des coordonnées, sera dit l'*origine* du système circulaire. On démontre aisément que les nombres caractéristiques de (2) restent les mêmes si l'on change l'axe des y. Ils seront dits les *nombres caractéristiques* du système circulaire de branches.

Si le premier exposant $\frac{p}{q}$ est inférieur à l'unité, l'équation

$$y=\left[\frac{p}{q},\ \frac{p_1}{q_1},\ldots,\ \frac{p_s}{q_s}\right](x) \tag{20}$$

représente des branches dont la tangente est l'axe des x. J'applique la formule (6), et j'ai

$$x=\left[\frac{q}{p},\ \frac{p_1}{q_1},\ldots,\ \frac{p_s}{q_s}\right](y). \tag{21}$$

L'équation (20), donnant lieu à (21), où $\frac{q}{p}$ est supérieur à l'unité, représente elle-même un système circulaire de $pq_1q_2\ldots q_s$ branches, dont les nombres caractéristiques sont $\frac{q}{p}, \frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_s}{q_s}$.

Enfin il reste à examiner le cas où $\frac{p}{q}$ est égal à l'unité, c'est-à-dire $p=q=1$. Soit a le coefficient du premier terme du développement (20), et changeons de variable en posant

$$y-ax=y'.$$

Le développement de y' suivant les puissances ascendantes de x commence par un terme de degré supérieur à l'unité. Pour connaître ce terme, il faudrait connaître dans (20) le second terme effectif.

D'une manière générale, on voit qu'il peut se présenter deux cas : 1° au second terme du développement (20), l'exposant de x est entier. Soit $n+1$ cet entier; on aura alors, pour le développement de y', la forme

$$(22) \qquad y' = \left[\frac{n+1}{1}, \ \frac{p_1 - nq_1}{q_1}, \ \frac{p_2}{q_2}, \dots, \ \frac{p_s}{q_s}\right](x).$$

Il est clair d'ailleurs que l'entier n est nécessairement inférieur à $\frac{p_1}{q_1}$; par suite, ce cas ne peut se présenter si $\frac{p_1}{q_1}$ est inférieur à l'unité.

2° Au second terme du développement (20), l'exposant de x est fractionnaire. Cet exposant est alors $1 + \frac{p_1}{q_1}$, et l'on a

$$(23) \qquad y' = \left[\frac{p_1 + q_1}{q_1}, \ \frac{p_2}{q_2}, \dots, \ \frac{p_s}{q_s}\right](x).$$

Les équations (22) et (23) représentent toutes deux des systèmes circulaires de branches, dont l'ordre de multiplicité est le même, à savoir $Q = q_1 q_2 \dots q_s$.

§ II.

4. Soient $S = 0$ et $C = 0$ les équations d'une courbe S et d'une conique C. Soit m un point de S. On considère la polaire de m relativement à C, et l'intersection m_1 de cette polaire et de la tangente à S en m. Le point m_1 engendre une transformée $S^{(1)}$ de S, dont l'étude fait l'objet de ce Mémoire.

Je cherche les expressions des coordonnées du point m_1. J'emploie des coordonnées homogènes x, y, z, les minuscules désignant les coordonnées de m, et les majuscules, les coordonnées courantes. En figurant les dérivées partielles par des indices, suivant l'usage, j'ai, pour les équations de la polaire de m et de la tangente en m à S

$$XC_1 + YC_2 + ZC_3 = 0,$$
$$XS_1 + YS_2 + ZS_3 = 0,$$

en sorte que les coordonnées de m_1, intersection de ces deux droites, sont proportionnelles aux déterminants du tableau

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 \end{vmatrix}.$$

A cause de

$$S_1 x + S_2 y + S_3 z = 0,$$
$$S_1 dx + S_2 dy + S_3 dz = 0,$$

S_1, S_2, S_3 sont proportionnels aux déterminants du tableau

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix}.$$

En observant, en outre, que l'on a

$$C_1 x + C_2 y + C_3 z = 2C,$$
$$C_1 dx + C_2 dy + C_3 dz = dC,$$

on peut transformer les déterminants (1) comme il suit. On a

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix} = \frac{\lambda}{S_3} \begin{vmatrix} x & y \\ dx & dy \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} dC & 2C \\ dz & z \end{vmatrix},$$

où λ désigne le rapport commun de S_1, S_2, S_3 aux déterminants (1).

Je dis qu'il résulte de là, pour les coordonnées de m_1,

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \frac{x\,dC - 2C\,dx}{dC}, \\ y_1 &= \frac{y\,dC - 2C\,dy}{dC}, \\ z_1 &= \frac{z\,dC - 2C\,dz}{dC}. \end{aligned} \right.$$

En effet, d'après (2), ces coordonnées sont proportionnelles aux seconds membres de (3). Pour qu'elles leur soient égales, il suffit donc que ces seconds membres satisfassent à la relation linéaire qui lie les coordonnées homogènes x, y, z : c'est ce qu'il est très-aisé de vérifier.

Je transforme les numérateurs des seconds membres de (3) en prenant pour variable indépendante $\frac{x}{z}$, que je désigne par ξ, et, en même temps, $\frac{y}{z}$ par η. Posant

$$(4)\qquad \frac{x_1\, dC}{z^3\, d\xi} = \alpha, \quad \frac{y_1\, dC}{z^3\, d\xi} = \beta, \quad \frac{z_1\, dC}{z^3\, d\xi} = \gamma,$$

$$(5)\qquad 2C = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy,$$

on obtient aisément, en dénotant les dérivées par des accents,

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha &= -(a'' + b'\xi + b\eta) \quad + \xi^2(b + b''\xi + a'\eta)\left(\frac{\eta}{\xi}\right)', \\ \beta &= -(a'' + b'\xi + b\eta)\eta' - \xi^2(b' + a\xi + b''\eta)\left(\frac{\eta}{\xi}\right)', \\ \gamma &= \quad b' + a\xi + b''\eta \quad + \quad (b + b''\xi + a'\eta)\eta'. \end{aligned}\right.$$

Je vais faire usage des équations (6) de la manière suivante :

Je considérerai un système circulaire (S) de branches de la courbe S et j'étudierai le système circulaire (S'), qui lui correspond sur la transformée S'. A cet effet, je prendrai pour côté $y = 0$ et pour sommet $y = 0$, $x = 0$ du triangle de référence, la tangente et l'origine de (S). Le système circulaire (S) sera alors représenté par un développement tel que celui qui a été considéré plus haut (§ I, n° **1**); ce développement sera celui de η suivant les puissances de ξ. Je disposerai des autres indéterminées du triangle de référence de manière à simplifier les calculs. Pour cette raison, si la droite $y = 0$ n'est pas tangente à la conique de transformation C, et si, en outre, le point $y = 0$, $x = 0$ n'est pas sur cette conique, je prendrai pour triangle de référence le triangle conjugué relativement à C, qui est déterminé par les données précédentes. De cette façon l'origine du système circulaire (S') est au sommet $y = 0$, $z = 0$. Pour étudier ce système circulaire, on aura donc à considérer le développement d'un des rapports $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$, suivant les puissances ascendantes de l'autre. A cet effet, au moyen des formules (6), on calculera, suivant les formules données plus haut (§ I, n° **2**), et au moyen du développement de η, les termes caractéristiques des développements de $\frac{\beta}{\alpha}$ et $\frac{\gamma}{\alpha}$, suivant les puissances de ξ; puis, au moyen de l'une de ces formules, on en déduira les termes caractéristiques du développement cherché.

Dans les cas où le triangle de référence, assujetti aux premières conditions, ne peut être conjugué relativement à C, je le déterminerai de telle sorte que les calculs soient analogues. Je vais d'abord traiter le cas précédent.

5. Le triangle de référence étant conjugué relativement à la conique C, les coefficients b, b', b'' sont nuls. Les formules (6) se réduisent à

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha &= -a'' + a'\xi^2\eta\left(\frac{\eta}{\xi}\right)', \\ \beta &= -a''\eta' - a\,\xi^2\left(\frac{\eta}{\xi}\right)', \\ \gamma &= \quad a\,\xi + a'\eta\eta'. \end{aligned}\right.$$

Soit maintenant l'équation du système circulaire considéré

$$(8)\qquad \eta = \left(\frac{p}{q}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_s}{q_s}\right)(\xi), \quad \frac{p}{q} > 1.$$

Pour calculer les termes caractéristiques des développements de α, β, γ, suivant les puissances ascendantes de ξ, on aura à appliquer quelques-unes des formules du n° **2**. On en déduira les développements des rapports de β et γ à α, et l'on obtiendra les résultats suivants :

$$(9)\qquad \frac{\beta}{\alpha} = \eta' = \left(\frac{p-q}{q}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_s}{q_s}\right)(\xi),$$

$$(10)\qquad \frac{\gamma}{\alpha} = -\frac{a}{a''}\xi + \xi^{\frac{p}{q}}\left(\frac{p-q}{q}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_s}{q_s}\right)(\xi).$$

Dans les formules (8), (9) et (10) je n'ai fait figurer que les nombres caractéristiques, en omettant les coefficients. On remarquera en effet, en effectuant les calculs, que, dans le cas actuel, il est inutile de considérer ces coefficients. La même circonstance a lieu dans l'opération qui reste à faire. On a, en dernier lieu, à déduire de (9) et (10) le développement de $\frac{\beta}{\alpha}$ suivant les puissances ascendantes de $\frac{\gamma}{\alpha}$, ou, du moins, les nombres caractéristiques de ce développement. Pour le faire, on n'a qu'à appliquer la formule (19) du n° **2**, et l'on obtient

$$(11)\qquad \frac{\beta}{\alpha} = \left(\frac{p-q}{q}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{p_s}{q_s}\right)\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right).$$

Cette dernière formule permet d'étudier le système circulaire de branches (S^1) correspondant au système circulaire (S), représenté par la formule (8). Je veux, de cette formule, tirer des conséquences non-seulement pour la courbe S^1, mais encore pour les transformées successives S^2, S^3,..., que l'on obtient en appliquant successivement la même transformation à S^2, S^3,.... Je désignerai par (S^2,) (S^3),... les systèmes circulaires qui correspondent à (S), et qui sont sur ces courbes.

On passe de la formule (8) à la formule (11) en supposant que (S) n'a ni son origine ni sa tangente en commun avec la conique C de transformation. Je supposerai que la même condition soit remplie constamment pour (S^1), (S^2), ..., me réservant d'examiner plus loin le cas opposé. J'ai donc à appliquer plusieurs fois de suite le résultat contenu dans la formule (11).

Conformément aux résultats du n° **3** (§ I), les nombres caractéristiques du système circulaire (S^1), représenté par (11), sont

1° Si $\frac{p-q}{q} > 1$ ou $p > 2q$,

$$\frac{p-q}{q},\quad \frac{p_1}{q_1},\quad \frac{p_2}{q_2},\quad \ldots,\quad \frac{p_s}{q_s};$$

2° Si $\frac{p-q}{q} < 1$ ou $p < 2q$,

$$\frac{q}{p-q},\quad \frac{p_1}{q_1},\quad \frac{p_2}{q_2},\quad \ldots,\quad \frac{p_s}{q_s};$$

3° Si $\frac{p-q}{q} = 1$ ou $p = 2, q = 1$,

$$\frac{n+1}{1},\quad \frac{p_1 - nq_1}{q_1},\quad \frac{p_2}{q_2},\quad \ldots,\quad \frac{p_s}{q_s},\quad \text{ou}\quad \frac{p_1+q_1}{q_1},\quad \frac{p_2}{q_2},\quad \ldots,\quad \frac{p_s}{q_s};$$

dans le troisième cas, n est un entier inférieur à $\frac{p_1}{q_1}$.

Je suppose, en premier lieu, $q = 1$ et $p > 2$. Alors le tableau des nombres caractéristiques de (S^1) ne diffère de celui de (S) qu'en ce que le premier de ces nombres est $(p-1)$ au lieu de p. En poursuivant, on parvient, pour $(S^{(p-2)})$, au tableau

$$\frac{2}{1},\quad \frac{p_1}{q_1},\quad \frac{p_2}{q_2},\quad \ldots,\quad \frac{p_s}{q_s}.$$

Je vais montrer qu'on obtient un résultat analogue, si q diffère de l'unité. Pour fixer les idées, je suppose $p > 2q$. Le tableau des nombres caractéristiques de (S^1) ne diffère de celui de (S) que par le premier nombre qui, de $\frac{p}{q}$, devient $\frac{p-q}{q}$. Soit t l'entier contenu dans $\frac{p}{q}$; en poursuivant, on parvient, pour $(S^{(t-1)})$, au tableau

$$\frac{p-(t-1)q}{q},\quad \frac{p_1}{q_1},\quad \frac{p_2}{q_2},\quad \ldots,\quad \frac{p_s}{q_s}.$$

Le premier nombre caractéristique est ici inférieur à 2; donc, comme on l'a vu plus haut, le tableau des nombres caractéristiques de (S^t) est

$$\frac{q}{p-tq},\quad \frac{p_1}{q_2},\quad \frac{p_2}{q_3},\quad \ldots,\quad \frac{p_s}{q_s}.$$

En répétant le même raisonnement, je forme une nouvelle suite analogue. J'observe maintenant que l'on a

$$\frac{p}{q} = t + \cfrac{1}{\cfrac{q}{p-tq}}.$$

Soit donc

$$\frac{p}{q} = t + \cfrac{1}{t' + \ddots + \cfrac{1}{t^r + \cfrac{\alpha}{\beta}}},$$

$t, t', \ldots, t^r$ étant des entiers positifs et $\frac{\alpha}{\beta}$ une fraction plus petite que l'unité. Il est clair que l'on trouve, pour le système circulaire correspondant à (S) et appartenant à la transformée de rang $(t + t' + \ldots + t^r)$, le tableau des nombres caractéristiques suivants :

$$\frac{\beta}{\alpha},\quad \frac{p_1}{q_1},\quad \frac{p_2}{q_2},\quad \ldots,\quad \frac{p_s}{q_s}.$$

Enfin, soit le développement de $\frac{p}{q}$ en fraction continue ordinaire

$$\frac{p}{q} = t + \cfrac{1}{t' + \cfrac{1}{t'' + \ddots + \cfrac{1}{t^{k-1} + \cfrac{1}{t^k}}}};$$

$$t + t' + t'' + \ldots + t^{k-1} = \tau.$$

On a, pour (S^τ) le tableau

$$(12)\qquad \frac{t^{(k)}}{1},\quad \frac{p_1}{q_1},\quad \frac{p_2}{q_2},\quad \ldots,\quad \frac{p_s}{q_s};$$

d'où je conclus, conformément à ce qui a été dit pour le cas où q est l'unité, que le tableau des nombres caractéristiques de $(S^{\tau+t^k-2})$ est

$$(13)\qquad \frac{2}{1},\quad \frac{p_1}{q_1},\quad \frac{p_2}{q_2},\quad \ldots,\quad \frac{p_s}{q_s}.$$

Je pose $\tau + t^k = T$, et j'ai cette conclusion : *Si le premier nombre caractéristique* $\frac{p}{q}$ *de* (S) *est différent de* 2, *et que* T *soit la somme des quotients incomplets de la fraction continue ordinaire égale à* $\frac{p}{q}$, *le système circulaire correspondant à* (S) *dans la transformée de rang* (T − 2) *a les mêmes nombres caractéristiques que* (S), *sauf que* $\frac{p}{q}$ *est remplacé par le nombre* 2. Je n'ai pas fait figurer, dans cet énoncé, la supposition $q > 1$, attendu que cet énoncé comprend le résultat acquis plus haut pour le cas où $q = 1$. Il comprend évidemment aussi le cas où $\frac{p}{q}$ est inférieur à 2, bien qu'on ait supposé d'abord $\frac{p}{q} > 2$.

Pour être à même de poursuivre cette étude, il faut maintenant s'occuper du cas où le premier nombre caractéristique est égal à 2; ce cas se présente pour (S^{T-2}), quand $\frac{p}{q}$ est différent de 2. Quand $\frac{p}{q}$ est égal à 2, il se présente pour (S); mais je puis encore employer la notation (S^{T-2}), puisque alors T est aussi égal à 2, et que, par suite, l'indice (T — 2) est égal à zéro.

Soit donc (13) le tableau des nombres caractéristiques de (S^{T-2}). Comme on l'a vu, celui de (S^{T-1}) sera de l'une des formes

$$\frac{p_1+q_1}{q_1},\quad \frac{p_2}{q_2},\quad \dots,\quad \frac{p_s}{q_s},$$

$$(14)\qquad \frac{n+1}{1},\quad \frac{p_1-nq_1}{q_1},\quad \frac{p_2}{q_2},\quad \dots,\quad \frac{p_s}{q_s},$$

n étant un entier inférieur à $\frac{p_1}{q_1}$. Je suppose qu'il soit de la forme (14). Alors on parvient, pour le rang $(T-1)+(n+1)-2=T+n-2$, au tableau

$$(15)\qquad \frac{2}{1},\quad \frac{p_1-nq_1}{q_1},\quad \dots,\quad \frac{p_s}{q_s}.$$

Je suppose encore que, au rang suivant, on obtienne un tableau analogue à (14), savoir :

$$\frac{n'+1}{1},\quad \frac{p_1-nq_1-n'q_1}{q_1},\quad \frac{p_2}{q_2},\quad \dots,\quad \frac{p_s}{q_s},$$

où n' est un entier inférieur à $\frac{p_1}{q_1}-n$. On trouvera, au rang $(T+n+n'-2)$, le tableau

$$(16)\qquad \frac{2}{1},\quad \frac{p_1-(n+n')q_1}{q_1},\quad \frac{p_2}{q_2},\quad \dots,\quad \frac{p_s}{q_s}.$$

Les mêmes choses se reproduiront de la sorte, tant qu'une fraction de dénominateur égal à q_1 ne passera pas au premier rang du tableau; mais ce fait se produira forcément. Le type des tableaux (15) et (16) est, en effet,

$$(17)\qquad \frac{2}{1},\quad \frac{p_1-\nu q_1}{q_1},\quad \frac{p_2}{q_2},\quad \dots,\quad \frac{p_s}{q_s},$$

où ν est un entier inférieur à $\frac{p_1}{q_1}$ et qui croît constamment. Soit donc t, l'entier contenu dans $\frac{p_1}{q_1}$. Le nombre ν ne peut dépasser t_1. S'il l'atteint, on a, au rang $(T + t_1 - 2)$, le tableau

$$\frac{2}{1}, \quad \frac{p_1 - t_1 q_1}{q_1}, \quad \frac{p_2}{q_2}, \quad \dots, \quad \frac{p_s}{q_s},$$

et, comme $\frac{p_1 - (t_1 - 1) q_1}{q_1}$ est inférieur à l'unité, il en résulte, pour (S^{T+t_1-1}), le tableau

$$(18) \qquad \frac{p_1 - (t_1 - 1) q_1}{q_1}, \quad \frac{p_2}{q_2}, \quad \dots, \quad \frac{p_s}{q_s}.$$

Si, au contraire, ν n'atteint pas la valeur t_1, il arrive que, d'un tableau tel que (17), relatif à $(S^{T+\nu-2})$, on déduit, pour $(S^{T+\nu-1})$, le tableau

$$\frac{p_1 - (\nu - 1) q_1}{q_1}, \quad \frac{p_2}{q_2}, \quad \dots, \quad \frac{p_s}{q_s}:$$

mais, de ce dernier, on déduira, en suivant une des règles ci-dessus, le tableau (18) pour le rang $T + \nu - 1 + (t_1 - \nu) = T + t_1 - 1$, c'est-à-dire pour le même rang que précédemment. Par conséquent, *dans tous les cas,* du tableau (13), relatif à (S^{T-2}), on est conduit au tableau (18) relatif à (S^{T+t_1-1}).

Mais maintenant le premier nombre caractéristique est différent de 2, puisque son dénominateur est différent de l'unité. On peut donc appliquer la proposition énoncée plus haut. Soit

$$\frac{p_1}{q_1} = t_1 + \cfrac{1}{t'_1 + \cdots + \cfrac{1}{t_1^{(k_1)}}}, \qquad t_1 + t'_1 + \dots + t_1^{(k_1)} = T_1;$$

il en résulte

$$\frac{p_1 - (t_1 - 1) q_1}{q_1} = 1 + \cfrac{1}{t'_1 + \cdots + \cfrac{1}{t_1^{k_1}}}, \qquad 1 + t'_1 + \dots + t_1^{k_1} = T_1 + 1 - t_1.$$

Par suite, au rang $(T + t_1 - 1) + (T_1 + 1 - t_1) - 2 = T + T_1 - 2$, on parviendra au tableau

$$\frac{2}{1},\quad \frac{p_2}{q_2},\quad \ldots,\quad \frac{p_s}{q_s}.$$

Il n'y a plus qu'à répéter les mêmes raisonnements pour parvenir à la conclusion suivante :

Si T, T_1, $T_2, \ldots$, T_s sont les sommes des quotients incomplets des fractions continues ordinaires égales à $\frac{p}{q}$, $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_2}{q_2}, \ldots$, $\frac{p_s}{q_s}$, le tableau des nombres caractéristiques relatifs à la transformée de rang

$$(T + T_1 + T_2 + \ldots + T_s - 2)$$

se réduit à $\frac{2}{1}$, c'est-à-dire que, sur cette transformée, au système circulaire considéré correspond une branche simple, ayant avec sa tangente un contact du premier ordre.

Mais il n'est pas nécessaire d'aller jusqu'à ce rang pour obtenir une branche simple. Soit, en effet, b le dernier quotient incomplet de $\frac{p_s}{q_s}$; on voit aisément qu'au système circulaire de rang $(T+T_1+\ldots+T_s-b)$ correspond un tableau réduit au seul nombre b. Ce système circulaire se réduit donc à une branche simple qui toutefois a, avec sa tangente, un contact d'ordre $(b-1)$, c'est-à-dire supérieur à l'unité si b est supérieur à 2.

En résumé, j'ai les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Le nombre nécessaire et suffisant des transformations successives qui changent un système circulaire de branches en une branche simple est égal à la somme des quotients incomplets des fractions continues égales respectivement aux différents nombres caractéristiques de ce système circulaire, sauf toutefois le dernier quotient incomplet de la fraction continue égale au dernier nombre caractéristique.*

Théorème II. — *Le nombre nécessaire et suffisant des transformations successives qui changent un système circulaire de branches en une branche simple ayant avec sa tangente un contact du premier ordre est égal à la somme de tous les quotients incomplets des fractions continues précédentes, diminuée de deux unités.*

6. Ainsi que je l'ai fait observer au commencement du numéro précédent, l'exactitude des deux derniers théorèmes est soumise à une restriction. Les raisonnements qui y ont conduit et les théorèmes eux-mêmes cessent d'être exacts si, sur une des transformées considérées, le système circulaire correspondant à (S) a, soit son origine, soit sa tangente en commun avec la conique de transformation. On peut envisager la formation de ces courbes successives à deux points de vue différents : on peut employer, pour chaque nouvelle opération, une conique nouvelle, ou bien employer toujours la même. Dans le premier cas, on doit simplement compléter les théorèmes ci-dessus par cette restriction, que chaque conique doit être prise de manière à n'avoir en commun avec le système circulaire à transformer ni l'origine, ni la tangente. Dans le second cas, il faut examiner ce qui a lieu.

La condition restrictive étant supposée remplie pour (S), on a pris plus haut, pour triangle de référence, le triangle conjugué par rapport à C, dont le sommet $y = 0$, $x = 0$, et le côté $y = 0$ sont l'origine et la tangente de (S). Cela étant, on a trouvé pour (S') l'équation (11). D'après cette équation, l'origine de S' est, dans tous les cas, le point $y = 0$, $z = 0$, qui n'est pas situé sur C. Donc, en premier lieu, l'origine de (S') n'est pas sur C. En outre, toujours d'après (11), si $\frac{p}{q}$ est différent de 2, la tangente de (S') est l'une des droites $y = 0$ ou $z = 0$, qui ne sont pas tangentes à C. Mais, si $\frac{p}{q}$ est égal à 2, la tangente de (S') peut être une droite quelconque passant en $y = 0$, $z = 0$, et cette droite peut être tangente à C. Ainsi la condition restrictive peut n'être pas satisfaite pour une transformée, si, dans la précédente, le système circulaire considéré a pour premier nombre caractéristique le nombre 2. Si cette circonstance se présente, on ne peut plus appliquer aux transformées suivantes les raisonnements du numéro précédent. Ces transformées obéissent alors à une loi que l'on trouvera dans la suite; mais il importe d'observer que, si l'on se propose d'obtenir au moyen de la transformation dont nous nous occupons, et avec l'emploi d'une seule conique, la réduction d'un système circulaire à une branche simple, on peut toujours y parvenir. Il suffit, en effet, de choisir la conique de manière qu'elle ne remplisse pas certaines conditions bien déterminées, et dont le nombre est limité.

Outre les résultats acquis au sujet des systèmes circulaires, et renfermés dans les théorèmes I et II, il est encore une conséquence simple, mais importante à tirer de l'équation (11), à savoir :

THÉORÈME III. — *A toute branche simple dont ni l'origine ni la tangente n'appartient à la conique de transformation correspond, dans la transformée, une branche simple.*

Par suite des théorèmes I et III, on voit que, dans les transformées de rang supérieur à une certaine limite, il ne peut exister de branches superlinéaires que celles dont les correspondantes, dans quelques-unes des transformées précédentes, ont soit l'origine, soit la tangente en commun avec la conique de transformation. Je vais étudier maintenant ce qui est relatif à de telles branches.

Je prends toujours, pour le sommet $y = 0$, $x = 0$ et pour la droite $y = 0$, l'origine et la tangente du système circulaire (S), dont je veux étudier les transformées. Comme, par hypothèse, cette origine ou cette tangente appartient à la conique C, le triangle de référence ne peut être conjugué relativement à C. Je distinguerai trois cas :

PREMIER CAS : *L'origine est sur la conique, et la tangente ne touche pas cette conique.* — Je complète le triangle de référence par les tangentes à C aux extrémités de la corde $y = 0$. J'ai alors

$$2C = a'y^2 + 2b'zx.$$

DEUXIÈME CAS : *L'origine n'est pas sur la conique, et la tangente touche la conique.* — Je complète le triangle de référence par la seconde tangente à C, issue de l'origine, et la polaire de ce point. J'ai alors

$$2C = a''z^2 + 2c''xy.$$

TROISIÈME CAS : *L'origine et la tangente appartiennent à la conique.* — Je peux, d'une infinité de manières, mettre C sous la forme

$$2C = ax^2 + 2byz.$$

7. J'étudie successivement ces trois cas.

PREMIER CAS : $2C = a'y^2 + 2b'zx$

Soit

$$(19)\qquad \eta = \left[(A)\frac{p}{q},\ (A_1)\frac{p_1}{q_1},\ (A_2)\frac{p_2}{q_2},\ \ldots,\ (A_s)\frac{p_s}{q_s}\right](\xi),\quad \frac{p}{q} > 1$$

le système circulaire considéré sur la courbe S. Un calcul facile permettra de déduire des formules (**6**), et au moyen des formules du n° **2** (§ I), les résultats suivants :

$$(20)\left\{\begin{aligned}
\frac{\alpha}{\gamma} &= -\xi + \frac{a'}{b'}\xi\left[\left(\frac{2p-q}{q}A^2\right)\frac{p}{q},\ \left(2\frac{2p-q+R_1}{q}AA_1\right)\frac{p_1}{q_1},\ldots,\right.\\
&\qquad\qquad\left.\left(2\frac{2p-q+R_s}{q}AA_s\right)\frac{p_s}{q_s}\right](\xi),\\
\frac{\beta}{\gamma} &= -\left[\left(\frac{2p-q}{q}A\right)\frac{p}{q},\ \left(\frac{2p-q+R_1}{q}A_1\right)\frac{p_1}{q_1},\ldots,\ \left(\frac{2p-q+R_s}{q}A_s\right)\frac{p_s}{q_s}\right](\xi),
\end{aligned}\right.$$

formules où l'on a posé, comme au n° **2** [formule (8)],

$$R_k = \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_1q_2} + \ldots + \frac{p_k}{q_1q_2\ldots q_k}.$$

De (20) je déduis, d'après la formule (19) du n° **2** (§ I),

$$\frac{\beta}{\gamma} = \left[\frac{p}{q},\ \frac{p_1}{q_1},\ \ldots,\ \frac{p_s}{q_s}\right]\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right).$$

Cette dernière formule se traduit par le théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *A un système circulaire de branches de la courbe initiale, ayant pour origine un point de la conique de transformation et pour tangente une droite non tangente à cette conique, correspond, dans la transformée, un système circulaire, de même origine, de même tangente, et dont les nombres caractéristiques sont les mêmes.*

COROLLAIRE. — *Il en sera de même pour toutes les transformées successives obtenues avec la même conique.*

DEUXIÈME CAS : $2C = a''z^2 + 2b''xy$.

Supposant η donné par la formule (19), on trouve

$$\frac{\beta}{\alpha} = \left[\left(\frac{p}{2}\,A\right)\frac{p-q}{q},\ \left(\frac{p+R_1}{q}\,A_1\right)\frac{p_1}{q_1},\ldots,\ \left(\frac{p+R_s}{q}\,A_s\right)\frac{p_s}{q_s}\right](\xi),$$

$$\frac{\gamma}{\alpha} = -\frac{b''}{a''}\left[\left(\frac{p+q}{q}\,A\right)\frac{p}{q},\ \left(\frac{p+q+R_1}{q}\,A_1\right)\frac{p_1}{q_1},\ldots,\ \left(\frac{p+q+R_s}{q}\,A_s\right)\frac{p_s}{q_s}\right](\xi),$$

d'où l'on déduit, conformément à la formule (17) du n° **2** (§ I)

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \left[\frac{p}{p-q},\ \frac{p_1}{q_1},\ldots,\ \frac{p_s}{q_s}\right]\left(\frac{\beta}{\alpha}\right). \tag{21}$$

On voit que l'origine du système circulaire (S^1) est le point $z = 0$, $y = 0$, lequel est sur C, et que sa tangente est la droite $z = 0$, polaire de l'origine du système circulaire primitif. Donc, sur les transformées qui suivent, les systèmes circulaires correspondants obéissent à la loi indiquée au théorème IV.

Il est utile de remarquer que ce deuxième cas rentre dans le précédent. La construction de la transformée S^1 est, en effet, symétrique par rapport à la courbe S et à sa polaire réciproque Σ relativement à C. Or à un système circulaire de S, placé dans le deuxième cas, correspond sur Σ un système circulaire, placé dans le premier cas. Donc, d'après le théorème IV, le système circulaire correspondant, sur S^1, a l'origine, la tangente et les nombres caractéristiques de celui de Σ.

Ayant fait ici la recherche directe des nombres caractéristiques de (S^1), je puis en conclure que ces nombres, donnés par (21), sont ceux qui conviennent au système circulaire (Σ), ainsi qu'on peut s'en assurer aussi par un calcul direct.

TROISIÈME CAS : $2C = ax^2 + 2byz$.

8. En partant toujours de la formule (19), on trouve

$$(22)\left\{\begin{aligned}
\alpha &= b\left[\left(\frac{p-2q}{q}\mathrm{A}\right)\frac{p}{q}, \left(\frac{p-2q+\mathrm{R}_1}{q}\mathrm{A}_1\right)\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \left(\frac{p-2q+\mathrm{R}_s}{q}\mathrm{A}_s\right)\frac{p_s}{q_s}\right](\xi)\\
\gamma &= a\xi + b\left[\left(\frac{p}{q}\mathrm{A}\right)\frac{p-q}{q}, \left(\frac{p+\mathrm{R}_1}{q}\mathrm{A}_1\right)\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \left(\frac{p+\mathrm{R}_s}{q}\mathrm{A}_s\right)\frac{p_s}{q_s}\right](\xi),\\
\beta &= -b\xi^{\frac{p}{q}}\left[\left(\frac{p}{q}\mathrm{A}^2\right)\frac{p-q}{q}, \left(\frac{2p+\mathrm{R}_1}{q}\mathrm{A}\mathrm{A}_1\right)\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \left(\frac{2p+\mathrm{R}_s}{q}\mathrm{A}\mathrm{A}_s\right)\frac{p_s}{q_s}\right](\xi)\\
&\quad - a\left[\left(\frac{p-q}{q}\mathrm{A}\right)\frac{p+q}{q}, \left(\frac{p-q+\mathrm{R}_1}{q}\mathrm{A}_1\right)\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \left(\frac{p-q+\mathrm{R}_s}{q}\mathrm{A}_s\right)\frac{p_s}{q_s}\right](\xi).
\end{aligned}\right.$$

Il suffit de jeter un coup d'œil sur ces formules pour apercevoir la nécessité de distinguer plusieurs cas. En effet, l'expression de β se compose de la somme de deux séries, et les termes caractéristiques de cette somme sont ceux de la première ou de la seconde de ces séries, suivant que p est inférieur ou supérieur à $2q$. J'ai donc à distinguer les cas suivants :

$$\frac{p}{q} < 2, \quad \frac{p}{q} > 2, \quad \frac{p}{q} = 2.$$

Soit d'abord $\frac{p}{q} < 2$; on trouve sans peine

$$\frac{\beta}{\gamma} = \left[\frac{p}{q}, \frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_s}{q_s}\right]\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right).$$

Cette formule contient le théorème suivant :

THÉORÈME V. — *A un système circulaire de la courbe initiale, ayant pour origine et pour tangente un point et une tangente de la conique de transformation, et composé de branches ayant avec la tangente des contacts d'ordre inférieur à l'unité, correspond, dans la transformée, un système circulaire de même origine, de même tangente, et dont les nombres caractéristiques sont les mêmes.*

En second lieu, soit $\frac{p}{q} > 2$. Ce cas peut être immédiatement ramené au précédent. En effet, la polaire réciproque de S a pour système circulaire correspondant à (S) un système (Σ), dont l'origine et la tangente sont les mêmes que pour (S) et dont le tableau des nombres caractéristiques est

$$\frac{p}{p-q}, \quad \frac{p_1}{q_1}, \quad \ldots, \quad \frac{p_s}{q_s}.$$

Comme $\frac{p}{p-q}$ est inférieur à 2, on en conclura, d'après le théorème, que ce tableau est aussi celui des nombres caractéristiques de (S'). C'est aussi ce que l'on trouvera aisément par un calcul direct.

En troisième lieu, j'ai à considérer le cas où l'on a $p = 2$, $q = 1$. Ici se présentent les circonstances suivantes, dans les formules (22) :

Le premier terme de l'expression de α disparaît: la série qui figure au second membre de l'expression de γ commence par un terme du premier degré, qui vient se réunir au terme $a\xi$; enfin les deux séries dont la somme compose β ont les mêmes nombres caractéristiques; par suite, dans la somme, des termes caractéristiques peuvent se détruire. Pour ces raisons, on ne peut, dans le cas actuel, obtenir des conclusions complètes aussi aisément que dans les autres cas. Il me suffira, pour mon objet, de trouver le premier terme caractéristique du système circulaire (S').

Le premier terme de η (19) est $A\xi^2$; son second terme caractéristique est $A_1\xi^{2+\frac{p_1}{q_1}}$. Je supposerai, pour faire encore usage des formules (22), que ce soit, non plus le second terme caractéristique, mais le second terme absolu du développement de η. D'après cette convention, q_1 peut être égal à l'unité. Le premier terme de α est alors

$$\alpha = R_1 A_1 \xi^{2+\frac{p_1}{q_1}} + \ldots.$$

Ceux de β et γ sont respectivement

$$(23)\left\{\begin{aligned} \beta &= -A(2Ab+a)\xi^3 - A_1\left[(4+R_1)Ab + (1+R_1)a\right]\xi^{3+\frac{p_1}{q_1}} + \ldots,\\ \gamma &= (2Ab+a)\xi + (2+R_1)A_1\xi^{1+\frac{p_1}{q_1}} + \ldots. \end{aligned}\right.$$

A cause de ces dernières relations, on aperçoit que les résultats sont différents suivant que l'on a

$$(24) \qquad 2Ab + a \gtrless 0,$$

ou que cette quantité est nulle. Il est aisé de voir que le sens de cette condition est le suivant : si l'inégalité (24) a lieu, c'est que chaque branche du système circulaire (S) a, avec C, un contact du premier ordre. Dans le cas opposé, l'ordre du contact s'élève.

Je suppose d'abord que l'inégalité (24) ait lieu. Alors le développement de $\frac{\alpha}{\gamma}$ suivant les puissances ascendantes de $\frac{\beta}{\gamma}$ commence par un terme de degré $\frac{p_1+q_1}{2q_1}$. Par suite, en premier lieu, si p_1 est égal ou supérieur à q_1, l'origine de (S') est le point $y=0$, $x=0$, mais la tangente diffère de $y=0$. Donc les transformées suivantes, en ce qui concerne les systèmes circulaires correspondants, sont régies par le théorème IV.

En second lieu, si p_1 est inférieur à q_1, l'origine et la tangente de (S') sont les mêmes que pour (S); mais le premier nombre caractéristique $\frac{2q_1}{p_1+q_1}$ est inférieur à 2. Donc les systèmes circulaires correspondants, dans les transformées suivantes, sont régis par le théorème V.

Soit maintenant le cas où l'inégalité (24) n'a pas lieu, c'est-à-dire supposons

$$(25) \qquad 2Ab + a = 0.$$

Les premiers termes de β et γ sont alors, en vertu de (23) et de (25),

$$\beta = A_1 A b (R_1 - 2)\xi^{3+\frac{p_1}{q_1}} + \ldots,$$
$$\gamma = A_1 (R_1 + 2)\xi^{1+\frac{p_1}{q_1}} + \ldots.$$

Il faut observer que R_1 n'est autre chose que $\frac{p_1}{q_1}$, c'est-à-dire un nombre positif. Le premier terme de β peut ainsi être nul, mais non celui de γ. Je suppose d'abord $R_1 \lesseqgtr 2$. On a alors, pour le premier terme du développement de $\frac{\beta}{\gamma}$ suivant les puissances ascendantes de $\frac{\alpha}{\gamma}$

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{A(R_1^2-4)}{R_1^2}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2 + \ldots$$

Ainsi, pour (S'), l'origine et la tangente restent les mêmes que pour (S), et de plus on se trouve dans le cas où le premier nombre caractéristique est égal à 2. Soit maintenant

$$A' = \frac{A(R_1^2 - 4)}{R_1^2},$$

on a, en vertu de (25),

$$2A'b + a = -\frac{8Ab}{R_1^2}.$$

Cette quantité n'est donc pas nulle. Donc (S') se trouve dans le cas où l'inégalité (24) a lieu, et l'on peut par là connaître la loi des transformées suivantes.

Je suppose enfin $R_1 = 2$. Alors $\frac{\beta}{\gamma}$, développé suivant les puissances croissantes de $\frac{\alpha}{\gamma}$, commence par un terme de degré supérieur à 2; par conséquent, (S') se trouve dans le cas où le premier nombre caractéristique est supérieur à 2.

Tous les résultats précédents, relatifs à un système circulaire de branches tangentes à la conique de transformation, peuvent se résumer comme il suit :

THÉORÈME VI. — *A un système circulaire tangent à la conique de transformation correspond, dans la suite des transformées successives, construites au moyen de la même conique, une suite de systèmes circulaires ayant tous même origine, même tangente et mêmes nombres caractéristiques; et cela à partir de la courbe initiale elle-même, de la première ou de la seconde transformée, suivant que l'ordre de contact des branches du système initial avec la conique est inférieur, égal ou supérieur à l'unité.*

Dans cette suite de systèmes circulaires, l'origine commune est sur la conique, et, suivant le cas, la tangente commune est aussi tangente à la conique, ou ne l'est pas. Si elle lui est tangente, le premier nombre caractéristique commun est inférieur à 2.

9. Je vais maintenant, de l'ensemble des résultats précédents, tirer

des conséquences, en envisageant d'abord les transformées que l'on obtient par l'emploi d'une seule conique.

D'après les numéros 5 et 6, un système circulaire (S) donne lieu à une branche simple, dans la transformée dont le rang est donné par le théorème I, à moins que, dans une des précédentes, le système circulaire correspondant n'ait pour tangente une tangente de la conique de transformation. Si ce cas se produit, le système circulaire suivant a son origine sur cette conique (n° 7), et il en est de même de tous ceux qui lui correspondent sur toutes les transformées suivantes (théorème IV). Rapprochant ce résultat des théorèmes III, IV et VI, j'en conclus :

Théorème VII. — *A partir d'un certain rang, les transformées successives d'une courbe algébrique quelconque, obtenues au moyen d'une seule conique, ne contiennent aucune branche superlinéaire dont l'origine ne soit sur la conique de transformation.*

D'après le numéro 7, si une courbe S ne rencontre la conique C qu'en des points simples, sans avoir avec C aucun contact ; si, de plus, toutes les tangentes communes à S et à C sont des tangentes simples de S, toutes les branches de S^1 dont l'origine est sur C sont des branches simples. Il est aisé, d'après cette observation, de tirer la conclusion suivante :

Théorème VIII. — *Étant donnée une courbe* S, *il est toujours possible de choisir une conique de transformation, de telle sorte que la transformée de* S, *obtenue à un rang donné par l'emploi continu de cette conique, ne contienne aucune branche superlinéaire, sous la condition que le rang donné soit supérieur à une limite déterminée qui dépend de* S.

Remarque. — *Cette limite n'est autre chose que le plus grand des nombres que l'on obtient en appliquant le théorème I à toutes les branches superlinéaires de* S.

J'envisage, en second lieu, les transformées que l'on obtient au moyen de diverses coniques. Si l'on a soin de prendre ces coniques de telle manière que chacune d'elles ne rencontre la courbe à transformer qu'en des points simples, sans la toucher, et que les tangentes communes soient des tangentes simples de cette courbe, on a, *sous cette réserve*, la proposition suivante :

THÉORÈME IX. — *A partir d'un certain rang, toutes les transformées successives d'une courbe algébrique quelconque, obtenues avec diverses coniques, ne contiennent aucune branche superlinéaire. Ce rang se détermine conformément à la remarque ci-dessus.*

§ III.

10. Je m'occupe maintenant de déterminer le degré et la classe de la transformée S' d'une courbe S. A cet effet, je vais établir quelques formules, qui feront l'objet de ce numéro et du suivant. La construction de la transformée, telle qu'elle est indiquée au n° **4** (§ II), est susceptible d'être généralisée, par la substitution d'une courbe quelconque à la conique C. Je ferai, pour les calculs actuels, cette généralisation, qui n'y apporte, pour ainsi dire, aucun changement; mais je n'appliquerai ensuite ces calculs qu'au cas simple considéré précédemment.

Soient $S = 0$, $C = 0$ les équations de deux courbes, de degrés m, n, la seconde étant la courbe de transformation. Soit (x, y, z) un point de S; on prend la droite polaire de ce point relativement à C; l'intersection de cette droite et de la tangente à S, en (x, y, z), engendre la transformée S'.

Les deux droites ont pour équations

$$XC_1 + YC_2 + ZC_3 = 0,$$
$$XS_1 + YS_2 + ZS_3 = 0.$$

Pour que le point (X, Y, Z) où elles se rencontrent soit sur une droite D

$$D = MX + NY + PZ = 0,$$

on a la condition

$$(1) \qquad A = \begin{vmatrix} M & N & P \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Les intersections de la courbe A et de S sont les points de cette dernière auxquels correspondent des points de la transformée situés sur la droite D. Le nombre de ces intersections donnera ainsi le degré de cette transformée, et fera l'objet d'une étude ultérieure. J'aurai aussi recours à une autre forme de A, que j'obtiens comme il suit. J'ai identiquement

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ dx & dy & dz \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} A = \begin{vmatrix} D & dD \\ nC & dC \end{vmatrix} S_2,$$

en posant

$$D = Mx + Ny + Pz,$$
$$dD = Mdx + Ndy + Pdz.$$

De la relation (2) je conclus

$$A = S_2 \frac{nCdD - DdC}{z^2 d\left(\frac{x}{z}\right)}$$

ou, en posant $\frac{x}{z} = \xi$, et $C^{\frac{1}{n}} = U$,

$$(3) \qquad A = \frac{nC^{\frac{n+1}{n}} S_2}{z^2} \frac{d}{d\xi}\left(\frac{D}{U}\right).$$

Dans cette dernière formule, il faut entendre que la dérivée qui figure au second nombre n'est pas une dérivée partielle. Au contraire, $\frac{D}{U}$ étant une fonction homogène et de degré zéro des variables x, y, z est simplement une fonction de deux variables ξ et $\eta = \frac{y}{z}$. Ces deux variables sont liées par l'équation $S = 0$. En prenant la dérivée indiquée dans l'équation (3), il faut considérer η comme fonction de ξ.

L'équation (1) est susceptible d'une interprétation géométrique simple. Je considère la courbe K

$$(4) \qquad K = D^n - \lambda C = 0,$$

λ étant une constante, déterminée de manière que l'équation (4) soit vérifiée par les coordonnées du point (x, y, z) de S, c'est-à-dire que la courbe K passe en ce point, lequel est d'ailleurs censé vérifier l'équation (1). Mais, d'après l'équation (3), l'équation (1) peut s'écrire $d\left(\frac{D}{U}\right) = 0$; ce que l'on transforme aisément en $dK = 0$. Donc la courbe K est tangente à S. Ainsi :

Soit D *une droite passant à l'intersection* m_1 *d'une tangente à une courbe* S *et de la droite polaire du point de contact* m, *relativement à une courbe* C, *de degré* n : *les courbes* K *qui ont avec* C *des contacts d'ordre* $n-1$ *aux* n *points d'intersection de* D *et de* C, *et qui passent au point* m, *y sont tangentes à* S.

L'équation $d\left(\frac{D}{U}\right) = 0$ exprimant que D contient un point m_1 de la transformée, on exprimera que D est tangente à cette transformée en m_1, en joignant l'équation $d^2\left(\frac{D}{U}\right) = 0$. Cette dernière équation étant supposée satisfaite, on en déduira $d^2K = 0$. Donc :

Celle des courbes K *de l'énoncé précédent que l'on obtient en prenant, pour la droite* D, *la tangente au lieu du point* m_1, *a avec* S *un contact du second ordre*.

Je n'indique cette propriété qu'en passant; on pourra reconnaître que c'est une extension d'une propriété connue du cercle osculateur.

11. Les calculs du numéro précédent sont relatifs à la détermination du degré de la transformée S' d'une courbe S. Ceux qui suivent ont trait à la détermination de la classe de cette transformée. La question est d'obtenir l'équation de la tangente à cette transformée sous une forme appropriée au problème dont il s'agit.

Comme on vient de le voir, les équations qui expriment que la droite D est une tangente de la transformée sont les suivantes :

$$d\left(\frac{D}{U}\right) = 0, \quad d^2\left(\frac{D}{U}\right) = 0.$$

On déduit aisément de là, pour l'équation d'une tangente, la forme suivante, où les majuscules désignent les coordonnées courantes :

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} X & Y & Z & 0 \\ x & y & z & U \\ dx & dy & dz & dU \\ d^2x & d^2y & d^2z & d^2U \end{vmatrix} = 0.$$

Les différentielles sont prises le long de la courbe S. On fera disparaître ces différentielles par des transformations dont je me contente de donner ici le résultat. Je pose

$$V = C_{11}(S_{23}^2 - S_{22}S_{33}) + \ldots + 2C_{12}(S_{12}S_{33} - S_{13}S_{23}) + \ldots,$$
$$W = C_1^2\,(S_{23}^2 - S_{22}S_{33}) + \ldots + 2C_1C_2(S_{12}S_{33} - S_{13}S_{23}) + \ldots.$$

Dans ces expressions, les termes non écrits, et suppléés par des points, sont ceux que l'on déduit des termes écrits par la permutation des indices. Soit, en outre

$$H = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix}.$$

L'équation (5) se met sous la forme

$$(6)\qquad G = [nCV - (n-1)W]\sum S_1X + nCH\sum C_1X = 0.$$

Cette dernière équation, si l'on y considère X, Y, Z comme données, et x, y, z comme des coordonnées courantes, est celle d'une courbe G, dont les intersections avec S sont les points tels que les tangentes à la transformée S', aux points correspondants, passent par le point X, Y, Z.

Je ferai, en outre, usage d'une autre forme de la même équation. Je pose

$$x = z\xi, \quad y = z\eta, \quad U = zu.$$

Comme U est une fonction homogène et du premier degré de x, y, z, la fonction u ne dépend que de ξ et de η. Je désigne les dérivées, prises par rapport à ξ le long de la courbe S, par des accents. En partant de l'équation (6), on parvient aisément à la mettre sous la nouvelle forme

$$(7)\qquad E = \eta''(Zu + Xu' - Z\xi u') + u''(Y - X\eta' + Z\xi\eta' - Z\eta) = 0.$$

Cette nouvelle forme est d'ailleurs reliée à (6) par la relation

$$(8)\qquad G = \frac{(m-1)^2}{n^2 z^3} C^{\frac{2n-1}{2n}} S_2^3 E.$$

Telles sont les formules dont je ferai usage.

12. Avant d'appliquer les formules ci-dessus, il convient de rappeler quelques propositions de la théorie des points singuliers. Voici la première :

Étant données deux courbes, le nombre de leurs intersections qui sont confondues en un point est égal au produit des ordres de multiplicité de ce point sur chacune des deux courbes, augmenté de la somme des ordres des contacts des branches de l'une des courbes avec les branches de l'autre, en ce même point.

Étant donnés une courbe et un système circulaire ayant son origine en un point de cette courbe, j'appelle, par définition, *nombre des intersections de la courbe et du système circulaire* le produit des ordres de multiplicité du système circulaire et du point considéré sur la courbe, augmenté de la somme des ordres des contacts des branches du système circulaire avec les branches de la courbe. Grâce à cette définition, la proposition précédente s'énonce ainsi :

THÉORÈME X. — *Étant données deux courbes, le nombre de leurs intersections qui sont confondues en un point est égal à la somme des nombres des intersections de l'une des courbes avec les systèmes circulaires de l'autre, qui ont leurs origines en ce point.*

La proposition suivante donne le moyen de calculer directement le nombre des intersections d'une courbe et d'un système circulaire.

THÉORÈME XI. — *Soit $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe sous forme entière. Supposez que x et y soient les coordonnées d'un point* *d'un système circulaire, et à distance infiniment petite du premier ordre de l'origine de ce système. L'ordre de l'infiniment petit $f(x, y)$, multiplié par l'ordre de multiplicité du système circulaire, est égal au nombre des intersections de la courbe et de ce système circulaire.*

Il est clair que cette proposition n'est pas troublée par l'emploi de coordonnées homogènes. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de déterminer le nombre des intersections d'une courbe $f(x, y, z) = 0$, passant au point $x = 0$, $y = 0$, avec un système circulaire dont l'origine soit en ce point.

Je désigne, comme précédemment, par ξ et η le rapport $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$. Le système circulaire est défini par le développement d'une de ces variables, soit η, suivant les puissances ascendantes et fractionnaires de l'autre, ξ. Si la tangente de ce système circulaire n'est pas la droite $x = 0$, on aura un point à distance infiniment petite du premier ordre de l'origine, et appartenant au système circulaire, en donnant à ξ une valeur infiniment petite du premier ordre, et à η une des valeurs correspondantes. Soit m le degré de $f(x, y, z)$. On a

$$f(x, y, z) = z^m f(\xi, \eta, 1).$$

Par suite, pour le point considéré, comme z a une valeur finie, l'ordre de l'infiniment petit $f(x, y, z)$ est le même que celui de $f(\xi, \eta, 1)$. Soit ω l'ordre de cette quantité, et μ l'ordre de multiplicité du système circulaire. D'après le théorème XI, le produit $\mu\omega$ est le nombre des intersections de la courbe et du système circulaire.

Si la tangente du système circulaire est $x = 0$, on peut intervertir, dans le calcul que je viens d'indiquer, le rôle des variables ξ, η. On peut aussi s'en dispenser, par une très-petite modification du résultat, sur laquelle je n'insiste pas, n'en devant pas faire usage ici.

13. Il me reste à expliquer maintenant, en peu de mots, l'usage que l'on peut faire de ces résultats dans un grand nombre de questions, et, en particulier, dans la question qui fait l'objet de ce Mémoire.

Étant donnée une courbe $S = 0$, je suppose que l'on cherche le nombre de ses points satisfaisant à une condition donnée. J'admets que cette condition puisse être exprimée par une équation entière $f(x, y, z) = 0$. Les points cherchés sont alors les intersections des courbes S et f. Le produit des degrés de ces courbes est donc le nombre cherché; mais ce n'est là le plus souvent qu'une limite supérieure, et, pour obtenir le nombre précis, il faut tenir compte des solutions étrangères ou multiples. C'est alors qu'on est conduit à examiner l'ordre de multiplicité de chaque solution. A cet effet, on fait usage des théorèmes X et XI, en considérant successivement chaque système circulaire de la courbe S, à l'origine duquel passe la courbe f. On est donc conduit ainsi à calculer des nombres ω, comme je l'ai expliqué à la fin du numéro précédent.

Si $f(x, y, z)$ est un covariant, circonstance qui se présente chaque fois que la condition donnée est indépendante du triangle de référence, on pourra supposer, sans modifier $f(x, y, z)$, que l'origine et la tangente du système circulaire que l'on considère soient le point $x = 0$, $y = 0$ et la droite $y = 0$. Cette supposition facilite souvent le calcul. En voici un exemple simple, et dont le résultat sera utile pour la suite.

Soit à trouver la classe d'une courbe $S = 0$, c'est-à-dire le nombre des tangentes qu'on peut lui mener d'un point arbitraire X, Y, Z. L'équation de condition est

$$f(x, y, z) = XS_1 + YS_2 + ZS_3 = 0.$$

Soit m le degré de S; celui de f est $m - 1$. La limite supérieure de la classe est donc $m(m - 1)$. Les solutions étrangères sont fournies par les points dont les coordonnées annulent à la fois les dérivées partielles de S, c'est-à-dire par les points multiples. Il s'agit de trouver l'ordre de multiplicité d'une telle solution. Comme $f(x, y, z)$ est un covariant, je puis faire la supposition ci-dessus, pour calculer le nombre des intersections de f avec un système circulaire de la courbe S. Des relations

$$\frac{S_1}{y\,dz - z\,dy} = \frac{S_2}{z\,dx - x\,dz} = \frac{S_3}{x\,dy - y\,dx}$$

je tire, en posant

$$\frac{x}{z} = \xi, \quad \frac{y}{z} = \eta,$$

prenant ξ pour variable indépendante et dénotant les dérivées par des accents,

$$(9)\qquad \begin{cases} S_1 = -S_2\eta', \\ S_3 = S_2\xi^2\left(\dfrac{\eta}{\xi}\right)'. \end{cases}$$

D'après la supposition que l'origine et la tangente du système circulaire sont le point $x=0$, $y=0$, et la droite $y=0$, je dois supposer ξ infiniment petit du premier ordre, et alors η est infiniment petit d'ordre supérieur. Les équations (9) prouvent alors que S_1 et S_3 sont infiniment plus petits que S_2. L'ordre de l'infiniment petit $f(x, y, z)$ est donc le même que celui de l'infiniment petit S_2. Ainsi :

Théorème XII. — *Soit* O *un point multiple d'une courbe algébrique* $S=0$, *comprenant en* O *plusieurs systèmes circulaires de branches. Considérez l'un de ces systèmes, placez le sommet* $x=0$, $y=0$ *du triangle de référence en* O, *et faites coïncider la droite* $y=0$ *avec la tangente de ce système circulaire. Soit* ω *l'ordre de la quantité infiniment petite* S_2 *quand on met, pour les coordonnées, celles d'un point du système circulaire considéré, à distance infiniment petite du premier ordre de* O. *Soit, en outre,* μ *l'ordre de multiplicité de ce système circulaire. Répétez la même opération pour chacun des systèmes circulaires de la courbe* S, *ayant leur origine en* O. *La somme des nombres analogues à* $\mu\omega$ *est l'abaissement que le point singulier* O *produit dans la classe de la courbe* S.

Par suite, si A est la somme des nombres ainsi calculés pour tous les points multiples de S, la classe c est

$$(10)\qquad c = m(m-1) - A.$$

14. J'applique actuellement les principes précédents à la détermination du degré de la transformée S' d'une courbe S. L'équation de condition est (n° **10**)

$$A = \begin{vmatrix} M & N & P \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 \end{vmatrix} = 0.$$

A cause de la simplicité du résultat, je fais encore ce calcul pour le cas général où C est une courbe de degré n.

Le degré de S étant m, celui de A est $(m+n-2)$. Le degré de S' a donc pour limite supérieure $m(m+n-2)$. J'étudie maintenant l'ordre de multiplicité de chaque solution.

Comme A est un covariant, je puis faire la supposition indiquée plus haut (nº **13**). Alors, comme on vient de le voir, S_1 et S_3 sont infiniment plus petits que S_2; donc, si C_1 et C_3 ne sont pas infiniment petits tous deux, A est un infiniment petit du même ordre que S_2. Il n'en est plus de même si C_1 et C_3 sont infiniment petits tous deux. Pour ce dernier cas, employons la seconde forme de A [nº **10**, formule (3)]

$$A = \frac{nC^{\frac{n+1}{n}}}{z^2} S_2 \left(\frac{D}{C^{\frac{1}{n}}}\right)'. \tag{11}$$

A cause de

$$nC = C_1 x + C_2 y + C_3 z = z(C_1 \xi + C_2 \eta + C_3),$$

on voit que, si C_3 est infiniment petit, il en est de même de C. Comme C est entier et que η est infiniment petit par rapport à ξ, supposé du premier ordre, C est au moins du premier ordre. Soit i cet ordre égal ou supérieur à l'unité. Il résulte de l'équation (11) que l'ordre de A surpasse celui de S_2 précisément de $(i-1)$. Ainsi, pour $i=1$, le résultat est le même que précédemment. Le résultat diffère dans le cas opposé. Le cas où $i=1$ est celui où, au point considéré, passe une seule branche de la courbe C, ayant une tangente différente de $y=0$. Alors C_3 est nul, mais C_1 ne l'est pas, pour $x=0$, $y=0$. On voit donc que ce cas rentre dans le précédent. Si, au contraire, i est supérieur à l'unité, c'est que la courbe C se compose, en ce point, de plusieurs branches ou est tangente à $y=0$; ces deux circonstances peuvent d'ailleurs se réunir. Soit r la multiplicité du système circulaire considéré sur S, ri est (théorème XI) le nombre des intersections de C et de ce système circulaire. Soit enfin R la multiplicité totale du point $x=0, y=0$ sur S, et I le nombre total des intersections de C et de S, réunies en ce point. L'abaissement que ce point produit dans le degré de S' surpasse l'abaissement qu'il produit dans la classe de $(I-R)$ (théorème XII).

Soit maintenant Λ l'abaissement total produit dans la classe de S par tous ses points multiples, le degré de S' est

$$(12) \qquad m_1 = m(m+n-2) - \Lambda - \sum(\mathrm{I}-\mathrm{R}).$$

Soit maintenant c la classe de S; on déduit de (12), en vertu de (10):

$$(13) \qquad m_1 = (n-1)m + c - \sum(\mathrm{I}-\mathrm{R}).$$

On peut encore mettre cette relation sous la forme

$$(14) \qquad m_1 = c - m + \sum \mathrm{R},$$

car $\sum \mathrm{I} = nm$.

La forme (14) du résultat donne lieu à cet énoncé remarquable en ce sens que le degré de la courbe de transformation n'y apparaît pas explicitement.

Théorème XIII. — *Le degré de la transformée d'une courbe* S, *obtenue au moyen d'une courbe quelonque, est égal à la classe de* S, *diminuée de son degré, et augmentée de la somme des ordres de multiplicité, sur la courbe* S, *des points où cette courbe rencontre la courbe de transformation.*

Il ne faut pas perdre de vue que cet énoncé s'applique, quelle que soit la nature des points d'intersection des deux courbes, sur la courbe de transformation. Quant à la forme (13) du même résultat, on peut remarquer que $\Sigma(\mathrm{I}-\mathrm{R})$ est la somme des ordres des contacts des diverses branches des deux courbes S et C; on a, par suite, le théorème suivant, que je borne au cas où C est une conique ($n = 2$).

Théorème XIV. — *Le degré de la transformée d'une courbe* S, *obtenue au moyen d'une conique, est égal à la somme du degré et de la classe de* S, *diminuée de la somme totale des ordres des contacts de cette courbe et de la conique.*

On a déjà fait la remarque que la transformée de S, au moyen d'une conique, est la même que la transformée, au moyen de la même conique, de la courbe Σ, polaire réciproque de S par rapport à cette conique. Comme le degré et la classe de S sont la classe et le degré de Σ, il en résulte que les sommes totales des ordres des contacts des courbes S et Σ avec la conique doivent être les mêmes. C'est, en effet, un cas particulier de cette proposition, que j'ai donnée dans mon *Mémoire sur les points singuliers*.

La somme des ordres des contacts des branches de deux courbes en un point est égale à la même somme, relativement à deux courbes corrélatives des premières, aux points correspondants.

15. Je m'occupe maintenant de la détermination de la classe de la courbe transformée S^1. Je me borne ici au cas où $n = 2$, c'est-à-dire où la courbe de transformation est une conique. L'équation de condition est l'équation (6) du n° **11**, $G = 0$. Pour $n = 2$, le degré de G est $3(m-1)$, en sorte que la limite supérieure de la classe de S^1 est $3m(m-1)$. J'étudie maintenant l'ordre de multiplicité de chaque solution. Comme G est un covariant, je puis encore faire la supposition indiquée plus haut. Je ferai usage de la formule (8) du n° **11**, qui, pour $n = 2$, devient

$$G = \frac{(m-1)^2}{4z^3} C^{\frac{3}{2}} S_2^3 E, \tag{15}$$

E étant toujours [n° **11**, formule (7)]

$$E = \eta''(Zu + Xu' - Z\xi u') + u''(Y - X\eta' + Z\xi\eta' - Z\eta).$$

Pour cette étude, comme pour celle qui a fait l'objet du § II, je distinguerai quatre cas, répondant à quatre formes de l'équation de la conique de transformation.

PREMIER CAS : $2C = ax^2 + a'y^2 + a''z^2$.

Je forme u et les premiers termes de son développement suivant les puissances ascendantes de ξ :

$$u = \frac{1}{z} C^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a\xi^2 + a'\eta^2 + a'')^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{a''}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{a}{a''}\xi^2 + \ldots\right).$$

J'en déduis, pour $\xi = 0$,

$$u = \left(\frac{a''}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad u' = 0, \quad u'' = \frac{a}{\sqrt{2a''}}.$$

Il résulte de là que, pour ξ infiniment petit, la partie principale de E est celle de l'un ou l'autre des deux termes $Zu\eta''$ ou Yu'', dont le second est fini.

Soit r l'ordre de multiplicité du système circulaire considéré, et $\frac{\rho}{r}$ l'ordre du contact de la tangente $y = 0$ avec chaque branche de ce système. On voit aisément que η'' est d'ordre $\left(\frac{\rho}{r} - 1\right)$. Par suite, si $\frac{\rho}{r} \geqslant 1$, E est fini; si $\frac{\rho}{r} < 1$, E est infini et d'ordre $\frac{\rho}{r} - 1$.

Par suite, l'ordre de G est le triple de celui de S_2 si $\frac{\rho}{r} \geqslant 1$, ou lui est inférieur de $\left(\frac{r-\rho}{r}\right)$ si $\rho < r$.

D'une manière générale, soit λ le produit, par la multiplicité r, de l'ordre infinitésimal de S_2 pour un système circulaire de la courbe S. Nous avons, pour l'abaissement produit, dans la classe de S', par un système circulaire, le plus petit des deux nombres

$$3\lambda \quad \text{ou} \quad 3\lambda + \rho - r,$$

dans le cas considéré.

Deuxième cas : $2C = a'y^2 + 2b'zx$.

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(2b'\xi + a'\eta^2)^{\frac{1}{2}} = b'^{\frac{1}{2}}\xi^{\frac{1}{2}} + \ldots,$$

$$u' = \tfrac{1}{2}b'^{\frac{1}{2}}\xi^{-\frac{1}{2}} + \ldots,$$

$$u'' = -\tfrac{1}{4}b'^{\frac{1}{2}}\xi^{-\frac{3}{2}} + \ldots.$$

La partie principale de E est celle de u''. Donc E est d'ordre $-\frac{3}{2}$.

Mais $C^{\frac{3}{2}}$ est de l'ordre $\frac{3}{2}$. Donc C est de l'ordre de $S_2^{\frac{3}{2}}$. Donc, dans le deuxième cas, l'abaissement de la classe de S^1 est 3λ.

TROISIÈME CAS : $2C = a''z^2 + 2b''xy$.

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(a'' + 2b''\xi\eta)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{a''}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{b''}{a''}\xi\eta + \ldots\right),$$

$$u' = \left(\frac{a''}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(\xi\eta)' + \ldots,$$

$$u'' = \left(\frac{a''}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(\xi\eta)'' + \ldots.$$

La partie principale de E est celle de $Zu\eta''$, d'ordre $\frac{\rho}{r} - 1$; par suite, l'abaissement est, dans ce cas, $3\lambda + \rho - r$.

QUATRIÈME CAS : $2C = ax^2 + 2byz$.

Ce cas est celui du contact de C et du système circulaire considéré. Soit h l'ordre du contact de C avec chaque branche. L'ordre de u est $\frac{1+h}{2}$, celui de u' est $\frac{h-1}{2}$.

Si $h \gtrless 1$, l'ordre de u'' est alors $\frac{h-3}{2}$. D'autre part, l'ordre de $Xu'\eta''$ est $\frac{\rho}{r} - 1 + \frac{h-1}{2}$, nombre supérieur au précédent. Donc l'ordre de E est $\frac{h-3}{2}$. Si l'on ajoute l'ordre $\frac{3}{2}(1+h)$ de $C^{\frac{3}{2}}$, on a, pour l'ordre de G, le triple de celui de S_2, augmenté de $2h$.

L'abaissement est donc $3\lambda + 2rh$.

Si $h = 1$, ce raisonnement ne s'applique pas. Ce cas peut se présenter de deux manières : 1° si $\frac{\rho}{r} > 1$; 2° si $\frac{\rho}{r} = 1$.

1° $\frac{\rho}{r} > 1$. Comme $\frac{\eta}{\xi^2}$ commence par un terme de degré positif en ξ, on peut écrire

$$u = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \xi \left(1 + \frac{2b}{a}\frac{\eta}{\xi^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\xi + \frac{b}{a}\frac{\eta}{\xi} + \ldots\right),$$

$$u' = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{b}{a}\left(\frac{\eta}{\xi}\right)' + \ldots,\right]$$

$$u'' = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{b}{a}\left(\frac{\eta}{\xi}\right)'' + \ldots.$$

On voit aisément, d'après ces résultats, que la partie principale de E est celle de u'', d'ordre $\frac{\rho}{r} - 2$. D'ailleurs l'ordre de $C^{\frac{3}{2}}$ est 3; donc on a pour résultat

$$3\lambda + \rho + r.$$

2° $\frac{\rho}{r} = 1$. Ici $\frac{\eta}{\xi^2}$ se réduit à une constante pour $\xi = 0$; mais, l'ordre du contact de la conique avec la branche, dont les coordonnées sont η et ξ, étant par hypothèse égal à l'unité, il en résulte aisément que $a + 2b\frac{\eta}{\xi^2}$ ne s'évanouit pas pour $\xi = 0$. Soit $\frac{s}{r}$ le degré du second terme du développement de $\frac{\eta}{\xi^2}$ suivant les puissances croissantes de ξ, on a, pour u, un développement tel que

$$u = \mathrm{A}\xi + \mathrm{B}\xi^{1+\frac{s}{r}} + \ldots;$$

d'où

$$u' = \mathrm{A} + \left(1 + \frac{s}{r}\right)\xi^{\frac{s}{r}} + \ldots,$$

$$u'' = \frac{s}{r}\left(1 + \frac{s}{r}\right)\xi^{\frac{s}{r}-1} + \ldots.$$

Il en résulte que $\eta'' u'$ est d'ordre zéro, tandis que u'' est d'ordre $\left(\frac{s}{r} - 1\right)$. D'ailleurs, l'ordre de $C^{\frac{3}{2}}$ est égal à 3; donc l'abaissement est ici le plus petit des deux nombres $3\lambda + 3r$ ou $3\lambda + 2r + s$. Je dirai que cet abaissement est $3\lambda + 2r + \sigma$, σ étant le plus petit des deux nombres r ou s.

16. Je résume maintenant les résultats du numéro précédent comme il suit :

THÉORÈME XV. — *Sur la courbe initiale, distinguez cinq catégories de systèmes circulaires, savoir :*

1° *Ceux dont ni l'origine ni la tangente n'appartiennent à la conique de transformation, et qui, en outre, sont composés de branches ayant avec leurs tangentes des contacts d'ordre inférieur à l'unité;*

2° *Ceux dont les tangentes touchent la conique, et dont les origines ne sont pas sur cette conique;*

3° *Ceux qui touchent la conique et qui sont, en outre, composés de branches ayant avec leurs tangentes des contacts d'ordre supérieur à l'unité;*

4° *Ceux qui touchent la conique et qui sont, en outre, composés de branches ayant avec leurs tangentes des contacts d'ordre inférieur à l'unité;*

5° *Ceux qui touchent la conique et qui sont composés de branches ayant avec leur tangente et avec la conique des contacts d'ordre égal à l'unité.*

Soient maintenant R *la somme des ordres de multiplicité des systèmes circulaires d'une même catégorie, et* $\mathfrak{R}$ *la somme des ordres des contacts des branches de ces systèmes avec leurs tangentes* (ces lettres étant affectées d'indices correspondant à chaque catégorie); Σ *la somme des nombres analogues à* σ (n° **15**, 4ᵉ cas) *pour la cinquième catégorie; et enfin, pour les branches de la courbe initiale qui ont avec la conique des contacts d'ordre supérieur à l'unité,* J *la somme des ordres de ces contacts.*

On a, en désignant par c *la classe de la courbe initiale, et par* c_1 *celle de la transformée,*

$$(16)\quad c_1 = 3c + R_1 + R_2 - R_3 - 2R_5 - \Sigma - 2J - (\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3 + 2\mathfrak{R}_4).$$

Ce résultat se simplifie beaucoup dans le cas particulier où la conique de transformation ne rencontre la courbe qu'en des points simples, sans avoir avec elle aucun contact, et n'a en commun avec la même courbe que des tangentes simples de cette dernière. Il n'y a plus alors à distinguer que la première catégorie de systèmes circulaires de l'énoncé précédent, et la formule (16) se réduit à

$$c_1 = 3c + R_1 - \mathfrak{R}_1. \tag{17}$$

Soit r la multiplicité d'un des systèmes circulaires de la première catégorie, et $\frac{\rho}{r}$ l'ordre des contacts de ses branches avec la tangente; on a

$$\rho < r, \quad R_1 = \Sigma r, \quad \mathfrak{R}_1 = \Sigma \rho.$$

Soient maintenant r' et ρ' les nombres analogues pour un autre système circulaire, mais dans lequel on a $\rho' > r'$, et posons

$$R'_1 = \Sigma r', \quad \mathfrak{R}'_1 = \Sigma \rho'.$$

On sait que, si l'on passe d'une courbe à une corrélative, les nombres r et ρ s'échangent entre eux. Donc, pour une courbe corrélative de S, les nombres analogues à R_1 et $\mathfrak{R}_1$ sont $\mathfrak{R}'_1$ et R'_1. D'ailleurs, comme on l'a déjà observé, la transformée S^1 est la même, si on la construit au moyen de la courbe Σ, polaire réciproque de S, relativement à la conique de transformation. On a donc aussi

$$c_1 = 3m + \mathfrak{R}'_1 - R'_1. \tag{18}$$

De (17) et (18) on conclut

$$3(c - m) = \mathfrak{R} - R, \tag{19}$$

les lettres R et $\mathfrak{R}$ s'appliquant maintenant à tous les systèmes circulaires. La relation (19), que l'on rencontre ici d'une manière incidente, a été démontrée directement, de deux manières différentes, dans mon *Mémoire sur les points singuliers*. Elle donne notamment le nombre des points d'inflexion d'une courbe dont on connaît les singularités, le degré et la classe. En effet, dans le second membre, chacun des points d'inflexion figure pour une unité. Si donc on les met à part, on trouve pour leur nombre N

$$N = 3(c - m) + R - \mathfrak{R},$$

le nombre R et $\mathfrak{R}$ ne s'appliquant plus qu'aux points multiples.

Pour faire cette dernière vérification, j'ai supposé le cas simple où la formule (16) se réduit à (17). Il n'y aurait point de difficulté à la répéter pour le cas général, mais je crois inutile de le faire.

Je vais encore tirer de la formule (17) une autre conséquence, relative au *genre*. Eu égard à la supposition faite pour cette formule, on a, pour le degré de la transformée S^1 (théorème XIV),

$$m_1 = m + c.$$

De cette dernière formule et de (17) je conclus

$$c_1 - 2m_1 = c - 2m + R_1 - \mathcal{R}_1. \tag{20}$$

Je conserve à R'_1 le même sens que précédemment, et je désigne, en outre, par R'' la somme des ordres de multiplicité des systèmes circulaires de S, dont les branches ont avec leurs tangentes des contacts du premier ordre, et j'écris, au lieu de (20),

$$c_1 - 2m_1 + \mathcal{R}_1 + R'_1 + R'' = c - 2m + R_1 + R'_1 + R''. \tag{21}$$

Dans le second membre, la somme des trois derniers termes désigne la somme des multiplicités de tous les systèmes circulaires de la courbe S. Soit M cette somme. Dans le premier membre, la somme des trois derniers termes désigne la somme des multiplicités des systèmes circulaires correspondants sur S^1 (n° 5, § II). Or S^1 ne possède, en dehors de ces derniers, aucun système circulaire propre (de multiplicité supérieure à l'unité); mais, parmi ces derniers, il peut s'en trouver dont la multiplicité soit l'unité. Pour les faire disparaître, retranchons dans les deux membres le nombre T de tous les systèmes circulaires considérés sur S. Alors, si M_1 est la somme de tous les systèmes circulaires propres sur S^1, et T_1 leur nombre, on a

$$\mathcal{R}_1 + R'_1 + R'' - T = M_1 - T_1;$$

donc, de (21), je déduis

$$c_1 - 2m_1 + M_1 - T_1 = c - 2m + M - T,$$

c'est-à-dire que l'expression qui figure au second membre de cette dernière formule se conserve dans la transformation considérée.

D'après le théorème IX, en répétant la même transformation un nombre fini de fois, on parvient à une courbe n'ayant aucun système circulaire propre. Soient γ et μ la classe et le degré de cette courbe. On aura

$$c - 2m + \mathrm{M} - \mathrm{T} = \gamma - 2\mu.$$

Mais, pour une pareille courbe, ne contenant aucune branche superlinéaire, on sait que $(\gamma - 2\mu)$ est égal à $2(p-1)$, p étant le *genre* de cette courbe. D'ailleurs cette courbe et la courbe initiale se correspondent *point par point;* donc leur genre est le même; donc p est le genre de la courbe initiale, et l'on obtient la formule

$$c - 2m + \mathrm{M} - \mathrm{T} = 2(p-1),$$

qui donne explicitement le genre d'une courbe quelconque, et que j'ai déjà démontrée de deux manières différentes en d'autres occasions.

17. Si l'on considère la suite des transformées $S^1, S^2, \ldots$ d'une courbe quelconque S, obtenues au moyen de coniques choisies chaque fois de manière à se trouver dans le cas simple considéré déjà, on parvient toujours, d'après le théorème IX, à une transformée de rang fini k, telle que cette courbe et toutes les suivantes ne possèdent plus aucun système circulaire propre. Soient c_k et m_k la classe et le degré de cette courbe S^k. On aura, pour les suivantes,

$$\begin{aligned} m_{k+1} &= m_k + c_k, & c_{k+1} &= 3c_k, \\ m_{k+2} &= m_{k+1} + c_{k+1}, & c_{k+2} &= 3c_{k+1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots; & &\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

d'où

$$(22) \quad \begin{cases} c_{k+i} = 3^i c_k, \\ m_{k+i} = m_k + c_k(1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{i-1}) = m_k + \dfrac{3^i - 1}{2} c_k. \end{cases}$$

Théorème XVI. — *Quelle que soit la courbe initiale, les degrés et* *les classes des transformées successives suivent, à partir d'un certain rang, la loi marquée par les équations* (22).

Il n'en est pas de même si l'on conserve toujours la même conique de transformation. A partir d'un certain rang, les catégories 1°, 3°, 5° de l'énoncé XV disparaissent, il est vrai, et les formules se réduisent à

$$m_1 = m + c - \mathfrak{R}_4,$$
$$c_1 = 3c + \mathrm{R}_2 - \mathfrak{R}_2 - 2\mathfrak{R}_4;$$

et, si l'on observe que l'on a

$$\mathfrak{R}_2 + 2\mathfrak{R}_4 = 2c,$$

on peut réduire ces formules à

$$m_1 = m + \tfrac{1}{2}\mathfrak{R}_2,$$
$$c_1 = c + \mathrm{R}_2.$$

D'ailleurs, à partir du rang considéré, les courbes n'ont aucun système circulaire propre dont l'origine ne soit sur la conique de transformation (théorème VII, § II). Par suite, R_2 marque simplement le nombre des points en lesquels la tangente de la courbe est aussi tangente à la conique, tandis que $\mathfrak{R}_2$ marque le nombre des tangentes communes pour lesquelles ces tangentes doivent être comptées. Par conséquent, si une de ces tangentes est, pour la courbe, une tangente d'inflexion, elle figure pour deux unités dans $\mathfrak{R}_2$ et pour une seule dans R_2. Pour cette raison, il ne paraît pas possible de trouver, dans le cas actuel, une proposition analogue au théorème XVI.

§ IV.

18. J'ai, dans ce qui précède, étudié les courbes que l'on obtient en transformant une courbe au moyen d'une conique. Si cette conique dégénère en deux droites, les résultats subissent d'assez notables modifications. C'est ce cas particulier qui va faire l'objet de la dernière partie de ce travail.

Aux transformées particulières que l'on obtient ainsi je donne le nom d'*adjointes*. Voici donc la construction de l'adjointe d'une courbe S. On donne deux droites P, Q, dans le plan de S. Soient m un point de S et T la tangente en ce point. L'intersection de T et de la polaire de m, relativement aux droites P, Q, engendre l'*adjointe* de S. Soit S^1 cette adjointe. Si l'on répète la même construction en conservant les mêmes droites P, Q, et substituant à S l'adjointe S^1, on engendre l'adjointe S^2 de S^1, ou *deuxième adjointe* de S, et ainsi de suite. Ce qui donne un intérêt particulier à la considération de ces courbes, c'est que, si l'on prend, d'une manière convenable, une figure corrélative, l'ensemble de S et de ses adjointes successives se change en l'ensemble d'une courbe Σ et de ses développées successives. Pour cette raison, les résultats que l'on obtiendra ici fourniront des démonstrations nouvelles des propriétés des développées successives, que j'ai déjà données dans mon *Mémoire sur les points singuliers*.

Pour l'objet actuel, on n'a pas à faire de nouveaux calculs, mais seulement à reprendre ceux qui précèdent, en examinant les modifications qu'ils subissent. J'examine d'abord les calculs du § II : leur objet était l'étude du système circulaire qui, sur une transformée, correspond à un système circulaire donné de la courbe initiale.

Le côté $y=0$ et le sommet $y=0$, $x=0$ du triangle de référence sont toujours la tangente et l'origine du système circulaire initial considéré. Cette condition remplie, on a considéré, pour le cas d'une conique de transformation, quatre formes distinctes de l'équation $C=0$ de cette conique, savoir :

$$\begin{aligned}2C &= ax^2 + a'y^2 + a''z^2,\\ 2C &= a'y^2 + 2b'zx,\\ 2C &= a''z^2 + 2b''xy,\\ 2C &= ax^2 + 2byz.\end{aligned}$$

La première de ces formes, dans le cas où C se réduit à deux droites, P, Q, donne lieu à trois formes distinctes

$$2C = ax^2 + a''z^2,\quad 2C = a'y^2 + a''z^2,\quad 2C = ax^2 + a'y^2;$$

les trois autres donnent lieu à

$$2C = 2b'zx,\quad 2C = 2b''xy,\quad 2C = 2byz.$$

J'ai donc en tout six formes distinctes. Elles répondent à six cas distincts, savoir :

Pour la première forme, l'origine et la tangente du système circulaire sont placées d'une manière entièrement quelconque par rapport aux droites P, Q.

Pour les deux suivantes, il existe une particularité relativement à l'intersection Ω des droites P, Q : dans l'une, Ω est sur le droit $y=0$; dans l'autre, Ω est au point $y=0$, $x=0$.

Pour les trois dernières, il existe une particularité relativement à une des droites P, Q, par exemple P. Dans l'une, P passe au point $y=0$, $x=0$; dans l'autre, P est la droite $y=0$ elle-même, et, en outre, le point Ω coïncide avec $y=0$, $x=0$; dans le dernier enfin, P est la droite $y=0$, sans que Ω coïncide avec l'origine du système circulaire.

On voit que toutes les positions particulières sont comprises dans ces six cas.

Première forme : $2C = ax^2 + a''z^2$.

19. Le calcul du n° 5 (§ II) devient ici plus simple; mais le résultat est le même. Soit donné le système circulaire

$$\eta = \left[\frac{p}{q}, \frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_s}{q_s}\right](\xi),\ \frac{p}{q} > 1, \tag{1}$$

on trouve

$$\frac{\beta}{\alpha} = \left[\frac{p-q}{q}, \frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_s}{q_s}\right]\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right). \tag{2}$$

C'est l'équation (11) du n° 5; mais, dans le cas actuel, les conséquences à tirer de (2) diffèrent de celles que l'on a obtenues au n° 5. En effet, si p est inférieur à $2q$, la tangente du système circulaire (2) est la droite $z=0$; elle passe donc en Ω. Donc la première adjointe n'est pas, comme la courbe initiale, dans le cas auquel se rapporte la première forme, mais dans celui qui correspond à la seconde forme de C. En nous occupant de cette seconde forme, nous verrons tout à l'heure que, dans le cas correspondant, les adjointes successives obéissent à une loi simple. Ce que je vais prouver actuellement, c'est que, si p n'est pas inférieur à $2q$, la même circonstance se présente non plus pour la première adjointe, mais pour une autre des suivantes.

Je suppose d'abord q différent de l'unité, et p supérieur à $2q$; car, p étant premier à q ne peut être égal à $2q$. La tangente de (2) est alors $y = 0$. On peut appliquer à l'adjointe S' le même calcul; par suite, si t est l'entier contenu dans $\frac{p}{q}$, on pourra poursuivre ainsi jusqu'à l'adjointe de rang $(t-1)$, pour laquelle le tableau des nombres caractéristiques ne différera de (1) que par le premier de ces nombres. Ce premier nombre sera manifestement $\frac{p-(t-1)q}{q}$. Ce nombre étant inférieur à 2, on voit que, pour l'adjointe de rang t, la tangente est la droite $z = 0$, ce qui est conforme à la proposition annoncée.

Je suppose, en second lieu, $q = 1$ et $p \geqq 2$. Il est clair qu'en appliquant successivement la formule (2), on trouvera, pour l'adjointe de rang $(p-2)$, le tableau suivant des nombres caractéristiques :

$$\frac{2}{1}, \quad \frac{p_1}{q_1}, \ldots, \quad \frac{p_s}{q_s}.$$

En répétant ensuite un raisonnement du n° 5, et désignant par t_1 l'entier contenu dans $\frac{p_1}{q_1}$, on trouvera pour l'adjointe de rang $(p+t_1-1)$, le tableau

$$\frac{p_1-(t_1-1)q_1}{q_1}, \quad \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \quad \frac{p_s}{q_s},$$

où la première fraction est inférieure à 2. Donc, pour l'adjointe suivante, la tangente passe au point Ω.

Dans le cas actuel $(q = 1)$, le premier exposant fractionnaire du développement (1) est $p + \frac{p_1}{q_1}$, et le rang de l'adjointe considérée est $(p + t_1)$. Dans les cas précédents $(q > 1)$, le premier exposant fractionnaire était $\frac{p}{q}$, et le rang de l'adjointe, dont la tangente passe en Ω, était le nombre t. D'après cette remarque, on peut réunir les résultats précédents dans l'énoncé suivant :

THÉORÈME XVII. — *A un système circulaire de la courbe initiale* S, *n'ayant pas pour origine un point des droites* P, Q, *et n'ayant* *pas pour tangente une droite passant à l'intersection* Ω *de* P *et* Q, *correspond, sur une des adjointes successives, un système circulaire dont la tangente passe en* Ω. *Le rang de la première adjointe qui jouisse de cette propriété est égal à l'entier contenu dans le premier exposant fractionnaire du développement relatif au système circulaire considéré sur* S.

Comme on le voit, cette proposition ne s'applique qu'à un système circulaire propre, c'est-à-dire tel que, dans le développement qui lui est relatif, il y ait effectivement des exposants fractionnaires.

Deuxième forme : $2C = a'y^2 + a''z^2$.

20. Le calcul n'offrant aucune particularité, je me borne à en écrire le résultat. De

$$\eta = \left[\frac{p}{q}, \ \frac{p_1}{q_1}, \ldots, \ \frac{p_s}{q_s}\right](\xi), \ \frac{p}{q} > 1, \tag{3}$$

on déduit

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \left[\frac{2q-p}{p-q}, \ \frac{p_1}{q_1}, \ldots, \ \frac{p_s}{q_s}\right]\left(\frac{\beta}{\alpha}\right). \tag{4}$$

La tangente de (4) étant $z = 0$, on a la proposition suivante :

Théorème XVIII. — *Si un système circulaire de la courbe initiale* S *a pour tangente une droite passant en* Ω, *le système circulaire correspondant sur l'adjointe a pour origine* Ω, *et pour tangente la conjuguée harmonique de celle de* S, *relativement aux droites* P, Q.

Quant au tableau des nombres caractéristiques, pour S^1, il est donné par (4).

Le théorème XVIII montre que, si la courbe initiale est dans le cas auquel est appropriée la deuxième forme, l'adjointe est dans le cas correspondant à la troisième forme.

Troisième forme : $2C = ax^2 + a'y^2$.

En supposant toujours l'équation (3) pour le système circulaire considéré, je trouve

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \left[\frac{2p-q}{p}, \ \frac{p_1}{q_1}, \ldots \ \frac{p_s}{q_s}\right]\left(\frac{\beta}{\gamma}\right). \tag{5}$$

La tangente de (5) est la droite $x = 0$, conjuguée harmonique de $y = 0$ relativement aux droites P, Q. Par suite, l'adjointe S' est dans le même cas que la courbe initiale S. En appliquant successivement ce résultat, on voit que la droite $x = 0$ est la tangente de toutes les adjointes de rang impair, et $y = 0$ la tangente de toutes les adjointes de rang pair. En outre, le tableau des nombres caractéristiques reste constamment le même, sauf en ce qui concerne le premier de ces nombres. Ce dernier est successivement, pour la courbe initiale et les adjointes de rang 1, 2,..., i,...,

$$\frac{p}{q}, \quad \frac{2p-q}{p}, \quad \frac{3p-2q}{2p-q}, \ldots, \quad \frac{p+i(p-q)}{q+i(p-q)}.$$

Ainsi :

Théorème XIX. — *Si un système circulaire de la courbe initiale* S *a pour origine le point* Ω *et une tangente différente de* P *et* Q, *il en est de même des systèmes circulaires correspondants, sur toutes les adjointes successives. Pour ces systèmes, les deux termes de la première fraction caractéristique croissent en progression arithmétique de même raison ; les autres fractions caractéristiques restent toujours les mêmes.*

Sous une autre forme, on peut dire que *les ordres de multiplicité de ces systèmes circulaires forment une progression arithmétique, et que la somme des ordres des contacts de leurs branches avec leurs tangentes reste constante.*

En effet, la somme des ordres de ces contacts est toujours

$$(p-q)q_1q_2\ldots q_s,$$

et l'ordre de multiplicité du système circulaire de l'adjointe de rang i est

$$qq_1q_2\ldots q_s + i(p-q)q_1q_2\ldots q_s.$$

Les théorèmes XVII, XVIII et XIX font connaître, pour une adjointe de rang quelconque, le système circulaire qui correspond à un système circulaire de la courbe initiale, s'il est dans un des cas qui correspondent aux formes 1, 2, 3. En effet, le théorème XIX fournit la solution de cette question pour le cas de la troisième forme; et les théorèmes XVII et XVIII prouvent que, si, pour le système circulaire initial, on se trouve placé dans le cas de la première ou de la deuxième forme, on est ramené au cas de la troisième forme pour le système circulaire correspondant sur une des adjointes suivantes.

Quatrième et cinquième forme.

21. On trouve aisément les résultats compris dans les théorèmes ci-après :

Théorème XX. — *Si la courbe initiale comprend un système circulaire dont l'origine soit sur une des droites* P, Q, *le système circulaire correspondant sur l'adjointe a même origine, même tangente et mêmes nombres caractéristiques.*

Théorème XXI. — *Si la courbe initiale comprend un système circulaire dont l'origine soit le point* Ω *et la tangente une des droites* P, Q, *le système circulaire correspondant sur l'adjointe a même origine, même tangente et mêmes nombres caractéristiques.*

Sixième forme : $2C = 2byz$.

Ici, comme au n° **8** (§ II), on doit distinguer plusieurs cas, et l'on est conduit, en conservant les notations du n° **8**, aux résultats suivants :

1° Si $\frac{p}{q} \gtrless 2$, le système circulaire se reproduit tel quel dans l'adjointe.

2° Si $q = 1$, $p = 2$ et $p_1 \geqq q_1$, on a pour l'adjointe un système circulaire dont l'origine est la même et dont la tangente est différente. Ce système circulaire est donc dans le cas auquel est relative la quatrième forme.

3° Si $q = 1$, $p = 2$ et $p_1 < q_1$, on a pour l'adjointe un système circulaire, qui est dans le premier des cas relatif à la sixième forme.

On a donc l'énoncé suivant :

Théorème XXII. — *Si la courbe initiale comprend un système circulaire dont la tangente soit la droite* P *et dont l'origine ne soit pas en* Ω, *il y correspond, sur les adjointes successives, une suite de systèmes cir-*

culaires ayant même origine, même tangente et mêmes nombres caractéristiques; et cela, à partir de la courbe initiale ou de la première adjointe, suivant que l'ordre des contacts des branches du système initial avec P *est différent de l'unité ou est égal à l'unité.*

22. Des divers théorèmes précédents résulte la conclusion suivante :

Théorème XXIII. — *A partir d'un certain rang, tout système circulaire propre d'une adjointe d'une courbe quelconque est dans un des cas suivants :*

1° *Son origine est en* Ω *et sa tangente différente de* P *et* Q.

2° *Son origine est sur une des droites* P, Q, *et sa tangente diffère de cette droite.*

3° *Son origine est en* Ω, *et sa tangente est une des droites* P, Q.

4° *Sa tangente est une des droites* P, Q, *sans que son origine soit en* Ω; *de plus, l'ordre du contact de chacune de ses branches avec la tangente est différent de l'unité.*

A partir du même rang, les systèmes circulaires correspondant à ceux qui sont dans un quelconque des trois derniers cas ont, sur toutes les adjointes suivantes, même origine, même tangente et mêmes nombres caractéristiques.

Les systèmes circulaires correspondant à ceux qui sont dans le premier cas suivent la loi marquée par le théorème XIX.

Voici maintenant une remarque qu'il est essentiel de faire pour établir entre les transformées, obtenues au moyen d'une conique toujours la même, et les adjointes, une différence importante. Pour les transformées, il s'introduit, à chaque rang, de nouveaux points sur la conique de transformation. Pour les adjointes, au contraire, le fait analogue ne se produit pas. En effet, le résultat du n° **19** montre qu'une branche simple ne peut conduire, pour l'adjointe, à une branche dont la tangente passe en Ω. De la sorte, les systèmes circulaires des quatre catégories mentionnées au théorème XXIII, et qui existent dans l'adjointe à partir de laquelle s'applique ce théorème, sont, à partir de cette adjointe, en nombre définitif. Pour cette raison, les degrés et les classes des adjointes successives suivent toujours une loi uniforme, ainsi que je vais le prouver.

Pour y parvenir, on pourrait appliquer aux adjointes les calculs faits précédemment (§ III) pour les transformées, en y introduisant des modifications très-simples. Au lieu de suivre cette voie, je puis, grâce à la remarque précédente, obtenir très-aisément ce résultat comme il suit.

Je considère l'adjointe S à partir de laquelle s'applique le théorème. Soient m son degré, c sa classe. Le nombre total de ses intersections avec P et Q est égal à $2m$; le nombre total des tangentes qu'on peut lui mener de Ω est c. Je vais compter de même ces nombres pour la première adjointe S' de cette courbe, en les dénotant par $2m_1$ et c_1.

Considérons l'ensemble des systèmes circulaires de S, qui sont dans la première catégorie mentionnée au théorème XXIII. Soient R la somme de leurs ordres de multiplicité, et $\mathfrak{R}$ la somme des ordres des contacts de leurs branches avec leurs tangentes. D'après le théorème XIX, les nombres analogues, pour S', sont $R + \mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}$. Ces systèmes circulaires figurent, dans le nombre total des intersections de S, avec P et Q pour $2R$ unités. Leurs correspondants figurent pour $2(R + \mathfrak{R})$ unités dans le nombre total des intersections de S' avec P et Q. Quant aux systèmes circulaires de S, qui sont dans une des trois dernières catégories du théorème XXIII, ils figurent pour le même nombre d'unités dans les deux nombres ci-dessus. On a donc

$$2m_1 = 2m + 2\mathfrak{R}.$$

Dans le nombre total des tangentes menées de Ω à S, les systèmes circulaires $(R, \mathfrak{R})$ figurent pour $R + \mathfrak{R}$ unités. Leurs correspondants figurent, pour $R + 2\mathfrak{R}$ unités, dans le nombre des tangentes menées de Ω à S'. Quant aux autres, ils figurent encore pour autant d'unités dans les deux nombres; donc

$$c_1 = c + \mathfrak{R}.$$

Et, puisque le nombre $\mathfrak{R}$ se conserve dans toutes les adjointes suivantes, on a, pour l'adjointe de rang i,

$$m_i = m + i\mathfrak{R}, \quad c_i = c + i\mathfrak{R}.$$

Ainsi :

Théorème XXIV. — *A partir d'un certain rang, les degrés et les classes des adjointes successives d'une courbe quelconque forment deux progressions arithmétiques de même raison.*

Voici une autre conséquence. Je me reporte à la formule qui donne le nombre des points d'inflexion d'une courbe (n° **16**, § III). Soit N le nombre des points d'inflexion de S, sauf ceux qui coïncident avec Ω, et soit N_i le nombre analogue pour S_i. Je trouve la relation

$$N_i = N + i\mathfrak{K}.$$

Théorème XXV. — *A partir du même rang, les nombres de points d'inflexion des adjointes successives, qui ne coïncident pas avec le point d'intersection des droites de transformation, forment une progression arithmétique de même raison que les degrés et les classes de ces courbes.*

Au moyen des résultats ci-dessus, on peut calculer aussi le nombre des points doubles ordinaires qui subsistent dans une adjointe quelconque. Pour y parvenir, il suffit de faire usage d'une formule contenue dans mon *Mémoire sur les points singuliers*, et qui fournit, en fonction des nombres caractéristiques, l'abaissement que les systèmes circulaires produisent dans la classe d'une courbe. Je ne reproduirai pas ici ce calcul, et je me contenterai d'énoncer le résultat :

Théorème XXVI. — *A partir du même rang, les nombres de points doubles des adjointes successives, non situés sur les droites de transformation, forment une progression arithmétique, dont la raison est différente de celle des précédentes.*

Il y a des cas où le nombre $\mathfrak{K}$, qui est la raison des précédentes progressions, est nul. Alors les degrés, les classes, les nombres de points d'inflexion sont constants. Dans ce cas aussi, comme on pouvait s'y attendre, la raison de la dernière progression est aussi nulle. Cette raison est, en effet, le produit de $\mathfrak{K}$ par un nombre positif, qui dépend de plusieurs éléments assez complexes.

J'ai fait remarquer précédemment que la figure formée par une courbe et ses adjointes successives est corrélative de la figure formée par une courbe et ses développées successives. Par suite, des théorèmes XXIV, XXV et XXVI, on peut conclure le suivant, dont une partie est contenue dans mon Mémoire déjà cité :

Théorème XXVII. — *A partir d'un certain rang, les développées successives d'une courbe algébrique quelconque jouissent des propriétés suivantes :*

Leurs degrés, leurs classes, les nombres de leurs points de rebroussement non à l'infini et dont les tangentes ne sont pas isotropes, et les nombres de leurs sommets, forment quatre progressions arithmétiques de même raison.

Les nombres de leurs tangentes doubles et de leurs normales doubles, en des points non à l'infini et non isotropes, forment deux progressions arithmétiques, dont la raison commune est différente de celle des progressions précédentes.

Je vais compléter les théorèmes précédents en indiquant comment est déterminé le rang qui y figure. D'après les résultats ci-dessus, on le trouve facilement comme il suit, pour les adjointes :

Théorème XXVIII. — *Le rang de la première adjointe à partir de laquelle s'appliquent les théorèmes XXIII, XXIV, XXV et XXVI se calcule de la manière suivante :*

1° *Si la courbe initiale comprend des branches superlinéaires dont les origines ne soient pas sur une des droites de transformation* P, Q, *et dont les tangentes ne passent pas au point* Ω *d'intersection de* P *et* Q, *considérez les développements relatifs à chacune de ces branches superlinéaires, et prenez, dans chacun d'eux, le premier exposant fractionnaire. Le rang cherché surpasse d'une unité l'entier contenu dans le plus grand de ces exposants.* (Ces développements doivent être faits suivant les puissances d'une des coordonnées, de telle sorte que le premier exposant ne soit pas inférieur à l'unité.)

2° *Si la courbe initiale ne comprend pas de telles branches, et qu'elle ait des tangentes passant en* Ω, *dont les points de contact ne soient pas* Ω, *et qui ne se confondent ni avec* P *ni avec* Q, *ou bien si ces tangentes se réduisent aux seules droites* P *et* Q, *mais qu'en même temps il y ait au moins une branche ayant, avec une de ces droites, un contact du premier ordre, ou un point qui ne soit pas* Ω, *le rang cherché est égal à l'unité.*

3° *Dans les autres cas, le rang cherché est zéro; les théorèmes considérés s'appliquent alors à partir de la courbe elle-même.*

Pour obtenir le rang à partir duquel s'applique le théorème XXVII, il suffit de faire usage du théorème XXVIII, en substituant à la courbe proposée une corrélative. On obtient ainsi le résultat suivant :

Théorème XXIX. — *Le rang à partir duquel s'applique le théorème XXVII peut se calculer ainsi : considérez les points de la courbe proposée, non à l'infini, où passent des branches dont les tangentes ne soient pas isotropes et satisfaisant, en outre, à l'une des deux conditions suivantes :*

1° *Soit* $\frac{p}{q}$ *le premier nombre caractéristique de l'une de ces branches* (elle peut être simple si $q = 1$); *le nombre* q *est différent de* $(p - 1)$;

2° *Ou bien, si le premier nombre caractéristique est* $\frac{p'}{p'-1}$ (p' étant un entier), *la branche doit admettre au moins un second nombre caractéristique,* $\frac{p_1}{q_1}$.

Si la courbe contient de tels points, le rang cherché surpasse d'une unité le plus grand des entiers contenus dans les nombres tels que $\frac{p}{p-q}$ *et* $\left(p' + \frac{p_1}{q_1}\right)$.

Si la courbe ne contient pas de tels points et qu'elle ait des branches infinies, non paraboliques, et dont les asymptotes ne soient pas isotropes, ou bien si elle a des branches infinies dont les asymptotes soient isotropes et que ces branches aient avec ces asymptotes des contacts du premier ordre, le rang cherché est égal à l'unité.

Dans les autres cas, le rang cherché est nul. Le théorème XXVII s'applique alors à partir de la courbe proposée elle-même.

J'ajoute la remarque suivante. Si l'on considère une courbe dont les points s'associent deux à deux, de telle sorte que la normale en deux points associés soit la même, on ne doit pas appliquer à une telle courbe le théorème XXIX. L'application doit en être faite à la courbe, lieu des milieux des segments compris entre les points associés de la proposée.