JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J.-C. ADAMS

Explication des irrégularités observées dans le mouvement d'Uranus, fondée sur l'hypothèse des perturbations causées par une planète plus éloignée; comprenant une détermination de la masse, de l'orbite et de la position du corps perturbant (suite)

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 2 (1876), p. 69-86.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1876_3_2__69_0>

EXPLICATION

DES

IRRÉGULARITÉS OBSERVÉES DANS LE MOUVEMENT D'URANUS,

Fondée sur l'hypothèse des perturbations causées par une planète plus éloignée; comprenant une détermination de la masse, de l'orbite et de la position du corps perturbant (suite);

PAR M. J.-C. ADAMS, M. A.,

Membre du collége de Saint-Jean, à Cambridge, Associé étranger de l'Académie des Sciences de l'Institut de France,
de la Société royale astronomique et de la Société philosophique de Cambridge.

(Extrait de l'Appendice du *Nautical Almanac* pour l'année 1851.)

39. Si nous substituons à δx_2, δy_2 leurs valeurs en termes de δx_1, δy_1, nous trouverons

$$\begin{aligned}
6{,}5294\,\delta x_1 + 5{,}4577\,\delta x_2 &= 6{,}5700\,\delta x_1 + 0{,}0490\,\delta y_1\\
1{,}2578\,\delta y_1 + 3{,}3771\,\delta y_2 &= -0{,}0303\,\delta x_1 + 1{,}2829\,\delta y_1\\
11{,}1297\,\delta x_1 + 14{,}4919\,\delta x_2 &= 11{,}2378\,\delta x_1 + 0{,}1300\,\delta y_1\\
5{,}0833\,\delta y_1 + 14{,}8824\,\delta y_2 &= -0{,}1335\,\delta x_1 + 5{,}1943\,\delta y_1.
\end{aligned}$$

Donc, si nous ajoutons aux dernières équations

$$-1{,}7106\ (x) - 0{,}03607\,(y),$$
$$0{,}00165\,(x) - 4{,}0487\ (y) \text{ respectivement,}$$

δx_1 et δy_1 seront éliminés, et nous obtiendrons les équations suivantes :

$$
(1)\quad\left\{\begin{aligned}
80'',28 = {} & \,0,2883h_1 - 0,7295h_2 - 4,4559h_3 \\
& + 0,0138k_1 + 0,0748k_2 + 0,1223k_3 \\
& + 0,1479p_1 + 0,0813p_2 + 0,1997p_3 \\
& + 0,0030q_1 + 0,0011q_2 + 0,0343q_3,
\end{aligned}\right.
$$

$$
(2)\quad\left\{\begin{aligned}
3'',34 = {} & - 0,0055h_1 - 0,0132h_2 - 0,0106h_3 \\
& + 0,0212k_1 - 0,0939k_2 - 0,9662k_3 \\
& - 0,0021p_1 - 0,0011p_2 - 0,0093p_3 \\
& + 0,0066q_1 + 0,0017q_2 + 0,0203q_3.
\end{aligned}\right.
$$

40. Les équations de condition fournies par les observations anciennes sont les suivantes :

$$
\begin{aligned}
62'',6 = {} & \;\delta\varepsilon - 0,8776\,\delta x_1 + 0,5402\,\delta x_2 + 0,7923h_1 + 0,2554h_2 \\
& -39,31\,\delta n - 0,4795\,\delta y_1 + 0,8415\,\delta y_2 + 0,6101k_1 + 0,9668k_2 \\
& \qquad - 0,3875h_3 \quad - 0,9877p_1 \quad - 0,6870p_2 - 0,1009p_3 \\
& \qquad + 0,9219k_3 \quad + 0,1566q_1 \quad - 0,7267q_2 - 0,9949q_3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
84,5 = {} & \;\delta\varepsilon + 0,4975\,\delta x_1 - 0,5050\,\delta x_2 - 0,0887h_1 - 0,9843h_2 \\
& -32,30\,\delta n - 0,8675\,\delta y_1 - 0,8631\,\delta y_2 + 0,9961k_1 - 0,1767k_2 \\
& \qquad + 0,2634h_3 \quad - 0,9085p_1 \quad - 0,3355p_2 + 0,9681p_3 \\
& \qquad - 0,9647k_3 \quad - 0,4178q_1 \quad - 0,9420q_2 - 0,2506q_3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
67,2 = {} & \;\delta\varepsilon + 0,6732\,\delta x_1 - 0,0935\,\delta x_2 - 0,2243h_1 - 0,8994h_2 \\
& -31,34\,\delta n - 0,7394\,\delta y_1 - 0,9956\,\delta y_2 + 0,9745k_1 - 0,4371k_2 \\
& \qquad + 0,6277h_3 \quad - 0,8720p_1 \quad - 0,2815p_2 + 0,9982p_3 \\
& \qquad - 0,7785k_3 \quad - 0,4895q_1 \quad - 0,9596q_2 - 0,0591q_3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-51.8 = {} & \;\delta\varepsilon - 0,2616\,\delta x_1 - 0,8631\,\delta x_2 - 0,9436h_1 + 0,7809h_2 \\
& -19,59\,\delta n + 0,9652\,\delta y_1 - 0,5050\,\delta y_2 - 0,3310k_1 + 0,6247k_2 \\
& \qquad - 0,5301h_3 \quad - 0,0731p_1 \quad + 0,3991p_2 - 0,6801p_3 \\
& \qquad - 0,8479k_3 \quad - 0,9973q_1 \quad - 0,9169q_2 + 0,7331q_3,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
-43,2 = {} & \delta\varepsilon - 0,4741\,\delta x_1 - 0,5505\,\delta x_2 - 0,8861\,h_1 + 0,5704\,h_2 \\
& - 18,58\,\delta n + 0,8805\,\delta y_1 - 0,8348\,\delta y_2 - 0,4634\,k_1 + 0,8213\,k_2 \\
& - 0,1248\,h_3 \;\; + 0,0115\,p_1 \;\; + 0,4532\,p_2 - 0,8147\,p_3 \\
& - 0,9922\,k_3 \;\; - 0,9999\,q_1 \;\; - 0,8914\,q_2 + 0,5798\,q_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-50,1 = {} & \delta\varepsilon - 0,6430\,\delta x_1 - 0,1731\,\delta x_2 - 0,8191\,h_1 + 0,3420\,h_2 \\
& - 17,68\,\delta n + 0,7659\,\delta y_1 - 0,9849\,\delta y_2 - 0,5736\,k_1 + 0,9397\,k_2 \\
& + 0,2588\,h_3 \;\; + 0,0871\,p_1 \;\; + 0,5001\,p_2 - 0,9063\,p_3 \\
& - 0,9659\,k_3 \;\; - 0,9962\,q_1 \;\; - 0,8660\,q_2 + 0,4225\,q_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-37,8 = {} & \delta\varepsilon - 0,9492\,\delta x_1 + 0,8021\,\delta x_2 - 0,5743\,h_1 - 0,3404\,h_2 \\
& - 15,25\,\delta n + 0,3145\,\delta y_1 - 0,5972\,\delta y_2 - 0,8186\,k_1 + 0,9403\,k_2 \\
& + 0,9652\,h_3 \;\; + 0,2872\,p_1 \;\; + 0,6192\,p_2 - 0,9984\,p_3 \\
& - 0,2613\,k_3 \;\; - 0,9579\,q_1 \;\; - 0,7852\,q_2 - 0,0560\,q_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-20,5 = {} & \delta\varepsilon - 0,9985\,\delta x_1 + 0,9942\,\delta x_2 - 0,3671\,h_1 - 0,7304\,h_2 \\
& - 13,60\,\delta n - 0,0538\,\delta y_1 + 0,1074\,\delta y_2 - 0,9302\,k_1 + 0,6830\,k_2 \\
& + 0,9035\,h_3 \;\; + 0,4164\,p_1 \;\; + 0,6928\,p_2 - 0,9251\,p_3 \\
& + 0,4286\,k_3 \;\; - 0,9092\,q_1 \;\; - 0,7212\,q_2 - 0,3796\,q_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\;2,4 = {} & \delta\varepsilon - 0,9633\,\delta x_1 + 0,8560\,\delta x_2 - 0,2363\,h_1 - 0,8883\,h_2 \\
& - 12,64\,\delta n - 0,2684\,\delta y_1 + 0,5170\,\delta y_2 - 0,9717\,k_1 + 0,4593\,k_2 \\
& + 0,6562\,h_3 \;\; + 0,4882\,p_1 \;\; + 0,7327\,p_2 - 0,8345\,p_3 \\
& + 0,7546\,k_3 \;\; - 0,8727\,q_1 \;\; - 0,6806\,q_2 - 0,5511\,q_3.
\end{aligned}$$

41. L'équation qui doit faire connaître p_3 peut être formée, comme ci-dessus, en multipliant respectivement les équations précitées, à partir de la seconde, par

$$-0,8, \quad -0,6, \quad +1,0 \quad +1,0, \quad +0,9, \quad +0,6, \quad +0,4, \quad +0,3$$

et l'équation pour trouver q_3, en multipliant les mêmes équations par

$$1,0, \quad 1,0, \quad 0,5, \quad 0,4, \quad 0,3, \quad 0,2, \quad 0,1, \quad 0,1.$$

Ainsi l'on obtient

$$
\begin{aligned}
-279'',64 = {} & 2,80\delta\varepsilon - 3,3742\delta x_1 + 0,0265\delta x_2 - 2,9237 h_1 + 2,2232 h_2 \\
& - 27,82\delta n + 3,7593\delta y_1 - 1,0986\delta y_2 - 3,8471 k_1 + 3,6706 k_2 \\
& + 0,1281 h_3 + 1,7522 p_1 + 2,6081 p_2 - 4,9033 p_3 \\
& - 1,2295 k_3 - 3,4661 q_1 - 2,2221 q_2 + 1,5785 q_3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
83,56 = {} & 3,60\delta\varepsilon + 0,2714\delta x_1 - 0,9567\delta x_2 - 1,5602 h_1 - 1,3924 h_2 \\
& - 91,84\delta n - 0,5116\delta y_1 - 2,7976\delta y_2 + 1,0937 k_1 + 0,6112 k_2 \\
& + 1,0027 h_3 - 1,6385 p_1 + 0,1802 p_2 + 0,6529 p_3 \\
& - 2,7879 k_3 - 2,4746 q_1 - 3,2736 q_2 + 0,3113 q_3.
\end{aligned}
$$

42. Si l'on élimine $\delta\varepsilon$ et δn au moyen de (ε) et (n) des articles **35** et **36**, ces équations deviennent

$$
\begin{aligned}
-361'',72 = {} & - 4,1831\delta x_1 + 0,6179\delta x_2 - 4,7839 h_1 + 2,0969 h_2 \\
& + 7,1533\delta y_1 - 1,5388\delta y_2 - 0,6909 k_1 + 6,4242 k_2 \\
& + 0,7410 h_3 - 0,7000 p_1 - 0,0153 p_2 - 6,0258 p_3 \\
& - 1,2508 k_3 - 1,3068 q_1 - 0,6369 q_2 + 5,0525 q_3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-146,69 = {} & - 0,7686\delta x_1 - 0,1963\delta x_2 - 3,9519 h_1 - 1,5548 h_2 \\
& + 10,6926\delta y_1 - 4,2508\delta y_2 + 11,5128 k_1 + 9,7013 k_2 \\
& + 1,7907 h_3 - 4,7913 p_1 - 3,1927 p_2 - 0,7902 p_3 \\
& - 2,8583 k_3 + 4,6536 q_1 + 1,9595 q_2 + 11,7796 q_3,
\end{aligned}
$$

43. En substituant à δx_2, δy_2 leurs valeurs en termes de δx_1, δy_1, on trouve

$$
\begin{aligned}
& - 4,1831\delta x_1 + 7,1533\delta y_1 + 0,6179\delta x_2 - 1,5388\delta y_2 \\
& \quad = -4,1647\delta x_1 + 7,1473\delta y_1, \\
& - 0,7686\delta x_1 + 10,6926\delta y_1 - 0,1963\delta x_2 - 4,2508\delta y_2 \\
& \quad = -0,7319\delta x_1 + 10,6591\delta y_1.
\end{aligned}
$$

Donc, si aux équations que l'on vient de trouver on ajoute respectivement

$$+ 0,60808\,(x) - 5,5942\,(y)$$

et

$$+ 0,07306\,(x) - 8,3110\,(y),$$

δx_1 et δy_1 seront éliminés, et nous obtiendrons les équations suivantes :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} -476'',84 = &- 2,7630\,h_1 + 6,9793\,h_2 + \ \ 4,6473\,h_3 \\ &- 2,8290\,k_1 - 5,1777\,k_2 - 20,2242\,k_3 \\ &+ 0,0698\,p_1 + 0,3785\,p_2 - \ \ 2,5884\,p_3 \\ &- 1,7748\,q_1 - 0,8036\,q_2 - \ \ 0,2693\,p_3, \end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} -486'',03 = &- 3,7091\,h_1 - 0,9682\,h_2 + \ \ 2,2600\,h_3 \\ &+ 8,3364\,k_1 - 7,5348\,k_2 - 31,0457\,k_3 \\ &- 4,6988\,p_1 - 3,1454\,p_2 - \ \ 0,3772\,p_3 \\ &+ 3,9584\,q_1 + 1,7118\,q_2 + \ \ 3,8734\,q_3. \end{aligned}\right.$$

44. Si l'on élimine les membres de gauche des équations (2), (3) et (4) des nos **39** et **43**, au moyen de l'équation (1), on trouve

$$\begin{aligned} 0 = &\ \ 0,4200\,h_1 - 0,4114\,h_2 - \ \ 4,2014\,h_3 + 0,1980\,p_1 + 0,1069\,p_2 + 0,4236\,p_3 \\ &- 0,4964\,k_1 + 2,3306\,k_2 + 23,3213\,k_3 - 0,1567\,q_1 - 0,0409\,q_2 - 0,4531\,q_3, \\ 0 = &- 1,0507\,h_1 + 2,6465\,h_2 - 21,8182\,h_3 + 0,9482\,p_1 + 0,8614\,p_2 - 1,4023\,p_3 \\ &- 2,7471\,k_1 - 4,7334\,k_2 - 19,4976\,k_3 - 1,7569\,q_1 - 0,7972\,q_2 - 0,0655\,q_3, \\ 0 = &- 1,9638\,h_1 - 5,3845\,h_2 - 24,7155\,h_3 - 3,8034\,p_1 - 2,6532\,p_2 + 0,8317\,p_3 \\ &+ 8,4199\,k_1 - 7,0819\,k_2 - 30,3051\,k_3 + 3,9767\,q_1 + 1,7183\,q_2 + 4,0811\,q_3. \end{aligned}$$

45. Or si l'on pose, comme plus haut, $\varepsilon - \varepsilon' = \theta$, $\varepsilon - \varpi = \beta$, on voit que

$$\frac{h_1}{m'} = -42'',33 \sin\theta, \quad \frac{h_2}{m'} = 76'',55 \sin 2\theta,$$

$$\frac{k_1}{m'} = -42'',33 \cos\theta, \quad \frac{k_2}{m'} = 76'',55 \cos 2\theta,$$

$$\frac{h_3}{m'} = 7'',25 \sin 3\theta + 0,007460\,\frac{p_3}{m'} + 0,008974\,\frac{q_3}{m'},$$

$$\frac{k_3}{m'} = 7'',25 \cos 3\theta - 0,008974\,\frac{p_3}{m'} + 0,007460\,\frac{q_3}{m'},$$

$$\frac{p_1}{m'} = 0'',20 \sin(\theta - \beta) - 0,074738\left(\frac{p_3}{m'}\cos 2\theta - \frac{q_3}{m'}\sin 2\theta\right),$$

$$\frac{q_1}{m'} = -\ 0'',20 \cos(\theta - \beta) + 0{,}074738\left(\frac{p_3}{m'}\sin 2\theta + \frac{q_3}{m'}\cos 2\theta\right),$$

$$\frac{p_2}{m'} = \ 32'',91 \sin(2\theta - \beta) + 0{,}259765\left(\frac{p_3}{m'}\cos\theta - \frac{q_3}{m'}\sin\theta\right),$$

$$\frac{q_2}{m'} = \ 32'',91 \cos(2\theta - \beta) + 0{,}259765\left(\frac{p_3}{m'}\sin\theta + \frac{q_3}{m'}\cos\theta\right).$$

46. En substituant ces expressions dans les équations ci-dessus et en mettant à la place de β sa valeur $50^\circ\,15',8$, on obtient

$$\begin{aligned}
0 = &-(1{,}24872)\sin\theta + (1{,}32231)\cos\theta - (1{,}48110)\sin 2\theta + (2{,}24265)\cos 2\theta \\
&-(1{,}48373)\sin 3\theta + (2{,}22809)\cos 3\theta + (9{,}26254)\frac{p_3}{m'} - (9{,}50079)\frac{q_3}{m'} \\
&+(8{,}44376)\left(\frac{p_3}{m'}\cos\theta - \frac{q_3}{m'}\sin\theta\right) - (8{,}02630)\left(\frac{p_3}{m'}\sin\theta + \frac{q_3}{m'}\cos\theta\right) \\
&-(8{,}17031)\left(\frac{p_3}{m'}\cos 2\theta - \frac{q_3}{m'}\sin 2\theta\right) - (8{,}06861)\left(\frac{p_3}{m'}\sin 2\theta + \frac{q_3}{m'}\cos 2\theta\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = &\ (1{,}65190)\sin\theta + (2{,}06584)\cos\theta + (2{,}30220)\sin 2\theta - (2{,}60306)\cos 2\theta \\
&-(2{,}19916)\sin 3\theta - (2{,}15032)\cos 3\theta - (0{,}14305)\frac{p_3}{m'} - (9{,}60933)\frac{q_3}{m'} \\
&+(9{,}34981)\left(\frac{p_3}{m'}\cos\theta - \frac{q_3}{m'}\sin\theta\right) - (9{,}31615)\left(\frac{p_3}{m'}\sin\theta + \frac{q_3}{m'}\cos\theta\right) \\
&-(8{,}85046)\left(\frac{p_3}{m'}\cos 2\theta - \frac{q_3}{m'}\sin 2\theta\right) - (9{,}11828)\left(\frac{p_3}{m'}\sin 2\theta + \frac{q_3}{m'}\cos 2\theta\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = &\ (1{,}91407)\sin\theta - (2{,}55189)\cos\theta - (2{,}62790)\sin 2\theta - (2{,}64230)\cos 2\theta \\
&-(2{,}25331)\sin 3\theta - (2{,}34185)\cos 3\theta + (9{,}96344)\frac{p_3}{m'} + (0{,}56029)\frac{q_3}{m'} \\
&-(9{,}83835)\left(\frac{p_3}{m'}\cos\theta - \frac{q_3}{m'}\sin\theta\right) + (9{,}64968)\left(\frac{p_3}{m'}\sin\theta + \frac{q_3}{m'}\cos\theta\right) \\
&+(9{,}45371)\left(\frac{p_3}{m'}\cos 2\theta - \frac{q_3}{m'}\sin 2\theta\right) + (9{,}47306)\left(\frac{p_3}{m'}\sin 2\theta + \frac{q_3}{m'}\cos 2\theta\right),
\end{aligned}$$

où les nombres compris entre parenthèses indiquent les logarithmes des coefficients correspondants, comme ci-dessus.

47. De ces équations nous déduisons, par la même méthode qu'auparavant,

$$\theta = -46^\circ 55', \quad \frac{p_3}{m'} = 138'',92, \quad \frac{q_3}{m'} = -109'',83.$$

Donc, puisque ε est égal à $217^\circ 55'$, la longitude moyenne de la planète perturbatrice en 1810, 328 est $\varepsilon' = 264^\circ 50'$; le mouvement sidéral, en 36 périodes synodiques d'Uranus, est égal à $57^\circ 42'$, et la précession est de $30'$; donc la longitude moyenne en 1846, 762 (6 octobre) est de $323^\circ 2'$.

De plus, les expressions pour $\frac{p_3}{m'}$ et $\frac{q_3}{m'}$ sont

$$\frac{p_3}{m'} = 33'',93 \sin(3\theta - \beta) - 63'',41\, e' \sin(3\theta - \beta'),$$

$$\frac{q_3}{m'} = 33'',93 \cos(3\theta - \beta) - 63'',41\, e' \cos(3\theta - \beta'),$$

où $\varepsilon - \varpi' = \beta'$.

Si nous comparons ces expressions aux valeurs données plus haut, nous trouverons que $e' = 2,4123$, $\beta' = 279^\circ 14'$. Donc $\varpi' = 298^\circ 41'$, et la longitude du périhélie en 1846 est $299^\circ 11'$.

Enfin, si l'on substitue les valeurs que l'on vient d'obtenir dans l'équation (1) du n° **39**, on trouve $m' = 0,75017$.

48. Voici donc les valeurs de la masse et des éléments de l'orbite de la planète perturbatrice, résultant de la seconde hypothèse relative à la distance moyenne :

$$\frac{a}{a'} = 0,515.$$

Longitude moyenne de la planète, au 6 octobre 1846	323° 2′
Longitude du périhélie........................	299° 11′
Excentricité de l'orbite........................	0,120615
Masse (celle du Soleil étant l'unité)............	0,00015003

49. Des valeurs de m', θ, $\frac{p_3}{m'}$ et $\frac{q_3}{m'}$ trouvées plus haut, on déduit immédiatement les valeurs des quantités h, k, p et q, qui correspondent à chaque hypothèse. Ainsi nous trouvons :

Première hypothèse : $\frac{a}{a'} = 0,5$.		Deuxième hypothèse : $\frac{a}{a'} = 0,515$.	
$h_1 = 23'',98$	$k_1 = -19'',07$	$h_1 = 23'',19$	$k_1 = -21'',69$
$h_2 = -47,58$	$k_2 = -11,00$	$h_2 = -57,30$	$k_2 = -3,83$
$h_3 = -1,93$	$k_3 = -7,64$	$h_3 = -3,40$	$k_3 = -5,76$
$p_1 = 9,93$	$q_1 = -8,31$	$p_1 = 6,52$	$q_1 = -7,34$
$p_2 = -8,54$	$q_2 = -55,36$	$p_2 = -11,62$	$q_2 = -54,39$
$p_3 = 224,90$	$q_3 = -171,63$	$p_3 = 104,21$	$q_3 = -82,39$

50. En substituant ces valeurs dans les équations (ε), (n), (x) et (y), nous obtenons :

Première hypothèse : $\frac{a}{a'} = 0,5$.		Deuxième hypothèse : $\frac{a}{a'} = 0,515$.	
$\delta\varepsilon = -49'',77$	$\delta n = -0'',702$	$\delta\varepsilon = -43'',23$	$\delta n = -0'',5417$
$\delta x_1 = -130,69$	$\delta y_1 = 222,38$	$\delta x_1 = 1,77$	$\delta y_1 = 123,98$
$\delta x_2 = 1,02$	$\delta y_2 = 2,83$	$\delta x_2 = 1,13$	$\delta y_2 = 0,91$

et les corrections correspondantes des éléments elliptiques seront

$\frac{\delta a}{a} = 0,00000999$	$\frac{\delta a}{a} = 0,00000771$
$\delta e = 20'',83$	$\delta e = 40'',31$
$e\delta\varpi = 127,27$	$e\delta\varpi = 47,10$

On verra que les corrections de l'excentricité et de la longitude du périhélie varient très-rapidement dès qu'on modifie la distance moyenne présumée.

51. Si ces quantités sont substituées dans les expressions données plus haut, nous obtiendrons les corrections théoriques suivantes de la longitude moyenne, chacune de ces corrections étant divisée en deux parties, dont la première est due aux changements dans les éléments de l'orbite d'Uranus, et la seconde à l'action de la planète perturbatrice.

Première hypothèse.

Années.	Observations anciennes.
1712...	— 288″,0 + 365″,8 = + 77″,8
1715...	— 283,1 + 357,1 = + 74,0
1750...	+ 210,5 — 260,7 = — 50,2
1753...	+ 218,1 — 267,0 = — 48,9
1756...	+ 214,0 — 260,0 = — 46,0
1764...	+ 154,0 — 186,7 = — 32,7
1769...	+ 79,6 — 100,7 = — 21,1
1771...	+ 27,6 — 41,8 = — 14,2

Années.	Observations modernes.
1780...	— 126″,12 + 129″,27 = + 3″,15
1783...	— 180,28 + 188,70 = + 8,42
1786...	— 227,66 + 240,36 = + 12,70
1789...	— 265,70 + 281,63 = + 15,93
1792...	— 292,25 + 310,38 = + 18,13
1795...	— 305,84 + 325,27 = + 19,43
1798...	— 305,67 + 325,72 = + 20,05
1801...	— 291,77 + 312,05 = + 20,28
1804...	— 264,95 + 285,38 = + 20,43
1807...	— 226,78 + 247,51 = + 20,73
1810...	— 179,43 + 200,76 = + 21,33
1813...	— 125,59 + 147,72 = + 22,13
1816...	— 68,21 + 91,02 = + 22,81
1819...	— 10,40 + 33,18 = + 22,78
1822...	+ 44,84 — 23,64 = + 21,20
1825...	+ 94,69 — 77,64 = + 17,05
1828...	+ 136,73 — 127,48 = + 9,25
1831...	+ 168,94 — 172,17 = — 3,23
1834...	+ 189,85 — 211,04 = — 21,19
1837...	+ 198,51 — 243,59 = — 45,08
1840...	+ 194,54 — 269,36 = — 74,82

Deuxième hypothèse.

Années.	Observations anciennes.
1712...	— 133″,7 + 211″,9 = + 78″,2
1715...	— 117,7 + 191,5 = + 73,8
1750...	+ 85,2 — 134,4 = — 49,2
1753...	+ 73,8 — 122,2 = — 48,4
1756...	+ 59,1 — 105,2 = — 46,1
1764...	+ 2,7 — 36,4 = — 33,7
1769...	— 43,1 + 20,8 = — 22,3
1771...	— 69,9 + 54,7 = — 15,2

Années.	Observations modernes.
1780...	— 133″,10 + 135″,98 = + 2″,88
1783...	— 149,47 + 157,87 = + 8,40
1786...	— 160,15 + 172,99 = + 12,84
1789...	— 164,52 + 180,64 = + 16,12
1792...	— 162,30 + 180,58 = + 18,28
1795...	— 153,59 + 173,07 = + 19,48
1798...	— 138,87 + 158,86 = + 19,99
1801...	— 118,95 + 139,08 = + 20,13
1804...	— 94,96 + 115,21 = + 20,25
1807...	— 68,25 + 88,85 = + 20,60
1810...	— 40,33 + 61,61 = + 21,28
1813...	— 12,72 + 34,91 = + 22,19
1816...	+ 13,08 + 9,88 = + 22,96
1819...	+ 35,71 — 12,74 = + 22,97
1822...	+ 54,04 — 32,68 = + 21,36
1825...	+ 67,18 — 50,08 = + 17,10
1828...	+ 74,52 — 65,37 = + 9,15
1831...	+ 75,74 — 79,21 = — 3,47
1834...	+ 70,85 — 92,31 = — 21,46
1837...	+ 60,08 — 105,25 = — 45,17
1840...	+ 43,98 — 118,38 = — 74,40

52. Si nous comparons ces résultats aux corrections de longitude moyenne, provenant de l'observation, nous trouverons les différences suivantes :

Observations anciennes.

Années.	Observation — Calcul. 1re hypoth.	2e hypoth.
1712....	+ 6″,7	+ 6″,3
1715....	− 6,8	− 6,6
1750....	− 1,6	− 2,6
1753....	+ 5,7	+ 5,2
1756....	− 4,1	− 4,0
1764....	− 5,1	− 4,1
1769....	+ 0,6	+ 1,8
1771....	+11,8	+12,8

Observations modernes.

Années.	Observation — Calcul. 1re hypoth.	2e hypoth.
1780...	+0″,27	+0″,54
1783...	−0,23	−0,21
1786...	−0,96	−1,10
1789...	+1,82	+1,63
1792...	−0,91	−1,06
1795...	+0,09	+0,04
1798...	−0,99	−0,93
1801...	−0,04	+0,11
1804...	+1,76	+1,94
1807...	−0,21	−0,08
1810...	+0,56	+0,61
1813...	−0,94	−1,00
1816...	−0,31	−0,46
1819...	−2,00	−2,19
1822...	+0,30	+0,14
1825...	+1,92	+1,87
1828...	+2,25	+2,35
1831...	−1,06	−0,82
1834...	−1,44	−1,17
1837...	−1,62	−1,53
1840...	+1,73	+1,31

La plus grande différence dans la Table qui précède, c'est-à-dire celle de 1771, provient d'une observation unique, tandis que la différence qui la précède immédiatement, et qui est la résultante de plusieurs observations, est très-faible.

53. Les résultats des deux théories concordent bien ensemble et correspondent avec l'observation tant que nous ne sommes pas arrivés aux dernières années de la série, et il est à remarquer que la différence entre les théories devient sensible précisément au point où toutes deux montrent des symptômes de divergence avec les observations; toutefois les erreurs de la seconde hypothèse sont moindres que celles de la première.

Des observations récentes montrent que les erreurs de la théorie ne tardent pas à devenir très-sensibles, bien que décidément moindres pour la seconde hypothèse que pour la première. Voici les différences de longitude moyenne, déduites de la théorie et de l'observation pour les oppositions de 1843, 1844 et 1845 :

	Observation — Calcul.	
Années.	1re hypothèse.	2e hypothèse.
1843...............	+ 7",11	+ 5",77
1844...............	+ 8,79	+ 7,05
1845...............	+ 12,40	+ 10,18

Pour les observations des deux dernières années, j'ai fort à me louer de l'obligeance de l'Astronome royal. Les trois années s'accordent presque pour prouver que les erreurs de la première hypothèse sont à celles de la seconde dans le rapport de 5 à 4, d'où j'inférai, dans une Lettre à l'Astronome royal, datée du 2 septembre 1846, que l'hypothèse de $\frac{a}{a'} = \sin 35° = 0,574$ satisferait probablement à toutes les observations, très-peu de chose près.

54. Les résultats que j'ai déduits des observations de la planète faites par le professeur Challis confirment pleinement l'idée que la distance moyenne devrait être considérablement diminuée. Il est naturellement impossible de préciser, sans un calcul exact, le changement de longitude qui serait produit par une semblable diminution de distance. En comparant les valeurs de θ données par les deux hypothèses, on verra toutefois que, si nous prenions successivement des valeurs plus faibles pour la distance moyenne, les valeurs trouvées pour la longitude moyenne en 1810 iraient probablement toujours en diminuant, tandis que simultanément le mouvement moyen de 1810 à 1846 augmenterait rapidement, de sorte que les valeurs correspondantes de la longitude moyenne en ce moment arriveraient probablement bientôt à un minimum pour recommencer plus tard à croître. Je pense que c'est là la raison pour laquelle la longitude, trouvée sur la supposition d'une trop grande valeur pour la distance moyenne, concorde d'une manière presque complète avec l'observation. Pour n'avoir pas accordé suffisamment à l'accroissement du mouvement moyen, je me pressai trop, dans ma Lettre précitée à l'Astronome royal, de conclure que l'effet de la diminution de la distance moyenne serait de diminuer la longitude moyenne.

55. J'ai déjà dit que je ne croyais pas devoir employer l'observation de Flamsteed, en 1690, pour former les équations de condition, parce que l'intervalle entre elle et toutes les autres est trop grand. La différence entre cette observation et la théorie paraît être considérable et plus grande pour la seconde hypothèse que pour la première, les erreurs étant respectivement $+44'',5$ et $+50'',0$. Ces erreurs s'accroîtraient probablement, si l'on diminuait la distance moyenne. Il serait à désirer que l'on examinât les manuscrits de Flamsteed relativement à ce point.

56. Les corrections du rayon vecteur tabulaire d'Uranus peuvent aisément se déduire de celles de la longitude moyenne, à l'aide de la formule suivante :

$$\begin{aligned}\frac{\delta r}{r} = {} & \frac{1}{r}\frac{dr}{d\zeta}\delta\zeta - \frac{1}{2n}\frac{d}{dt}\delta\zeta + \frac{1}{4}\frac{\delta a}{a} - \frac{1}{2}\frac{e\,\delta e}{1-e^2} - \frac{1}{6}m'a^2\frac{dA_0}{da} \\ & + \frac{m'}{2}\Sigma C_i \cos i(nt - n't + \varepsilon - \varepsilon') \\ & + m'e\,\Sigma D_i \cos[i(nt - n't + \varepsilon' - \varepsilon') - nt - \varepsilon + \varpi] \\ & + m'e'\Sigma E_i \cos[i(nt - n't + \varepsilon' - \varepsilon') - nt - \varepsilon + \varpi'],\end{aligned}$$

où $\delta\zeta$ indique l'entière correction de la longitude moyenne au temps t,

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\zeta} = e\sin(nt + \varepsilon - \varpi) + \frac{3e^2}{2}\sin 2(nt + \varepsilon - \varpi),$$

$$C_i = \quad \frac{1}{2}\frac{n}{n-n'}aA_i,$$

$$D_i = -\frac{1}{4}\frac{in}{i(n-n')-n}\left(2iaA_i + a^2\frac{dA_i}{da}\right),$$

$$E_i = \quad \frac{1}{4}\frac{(i-1)n}{i(n-n')-n}\left[(2i-1)aA_{i-1} + a^2\frac{dA_{i-1}}{da}\right],$$

i prenant toutes les valeurs intégrales positives et négatives, non compris zéro.

57. En substituant dans cette formule les valeurs de m', δa, δe,... déjà obtenues et en mettant $a = 19,191$, on trouve les résultats suivants, correspondant aux deux valeurs adoptées de la distance moyenne :

PREMIÈRE HYPOTHÈSE.

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{r}\delta r = \frac{a}{r}\frac{dr}{d\varepsilon}\delta\zeta - \frac{a}{2}\frac{d\delta\zeta}{n\,dt} &- 0,000089 \\
&+ 0,000069\cos\ (nt - n't + \varepsilon - \varepsilon') \\
&+ 0,000259\cos 2(nt - n't + \varepsilon - \varepsilon') \\
&+ 0,000109\cos 3(nt - n't + \varepsilon - \varepsilon') \\
&+ 0,000016\cos\ (n't + \varepsilon' - \varpi) \\
&- 0,000168\cos\ (nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + \varpi) \\
&+ 0,000078\cos\ (nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + \varpi') \\
&- 0,000049\cos\ (2nt - 3n't + 2\varepsilon - 3\varepsilon' + \varpi) \\
&+ 0,000209\cos\ (2nt - 3n't + 2\varepsilon - 3\varepsilon' + \varpi')
\end{aligned}
$$

SECONDE HYPOTHÈSE.

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{r}\delta r = \frac{a}{r}\frac{dr}{d\varepsilon}\delta\zeta - \frac{a}{2}\frac{d\delta\zeta}{n\,dt} &- 0,000144 \\
&+ 0,000073\cos\ (nt - n't + \varepsilon - \varepsilon') \\
&+ 0,000266\cos 2(nt - n't + \varepsilon - \varepsilon') \\
&+ 0,000115\cos 3(nt - n't + \varepsilon - \varepsilon') \\
&+ 0,000016\cos\ (n't + \varepsilon' - \varpi) \\
&- 0,000188\cos\ (nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + \varpi) \\
&+ 0,000068\cos\ (nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + \varpi') \\
&- 0,000053\cos\ (2nt - 3n't + 2\varepsilon - 3\varepsilon' + \varpi) \\
&+ 0,000165\cos\ (2nt - 3n't + 2\varepsilon - 3\varepsilon' + \varpi'),
\end{aligned}
$$

58. Voici les valeurs de $\delta\zeta$ et $\frac{d\delta\zeta}{dt}$ pour quelques-unes des dernières années.

PREMIÈRE HYPOTHÈSE.

Années.	$\delta\zeta$	$\frac{d\delta\zeta}{dt}$
1834.........	$-21'',19$	$-20'',93$
1840.........	$-74,82$	$-32,34$
1846.........	$-148,65$	$-39,94$

SECONDE HYPOTHÈSE.

1834.........	$-21'',46$	$-20'',85$
1840.........	$-74,40$	$-31,62$
1846.........	$-145,91$	$-38,30$

De là, au moyen des formules ci-dessus, nous trouvons comme corrections du rayon vecteur tabulaire :

Années.	Première hypothèse.	Seconde hypothèse.
1834......	$+0,00505$	$+0,00492$
1840......	$+0,00722$	$+0,00696$
1846......	$+0,00868$	$+0,00825$

59. La partie de beaucoup la plus importante de ces corrections se rapporte au terme $-\frac{1}{2}r\frac{d\delta\zeta}{n\,dt}$, et peut par conséquent être immédiatement déduite d'une comparaison entre le mouvement angulaire d'Uranus dû à l'observation et celui qui est donné par les Tables. Effectivement, les corrections données par ce terme seul, pour les époques mentionnées ci-dessus, sont

Années.	Première hypothèse.	Seconde hypothèse.
1834......	$+0,00447$	$+0,00445$
1840......	$+0,00694$	$+0,00678$
1846......	$+0,00853$	$+0,00818$

lesquelles, comme nous le voyons, diffèrent très-peu des valeurs complètes que nous venons de trouver. La correction pour 1834 s'accorde presque entièrement avec celle que M. Airy a déduite de l'observation dans les *Astronomische Nachrichten*. Les corrections pour les années suivantes sont un peu plus fortes que celles qui sont données par les observations de Greenwich, les résultats de la seconde hypothèse étant, comme dans le cas de la longitude, plus rapprochés de la vérité que ceux de la première.

60. J'ai fait quelques tentatives, en discutant les observations de latitude, pour trouver des valeurs approximatives de la longitude du nœud et de l'inclinaison de l'orbite de la planète perturbatrice; mais les résultats n'en ont pas été satisfaisants. Les perturbations de la latitude sont, en effet, très-faibles, et, durant la période comparativement courte des trois quarts d'une révolution, elles se confondent presque avec les effets d'un changement constant dans l'inclinaison et la position du nœud d'Uranus, de sorte que de très-faibles erreurs dans les observations peuvent entièrement vicier le résultat.

61. Les perturbations de Saturne produites par la nouvelle planète, quoique faibles, seront encore sensibles, et il y aurait de l'intérêt à rechercher si, en en tenant compte, les valeurs des masses de Jupiter et d'Uranus, trouvées par leur action sur Saturne, seraient plus conformes avec celles qui ont été déterminées par d'autres moyens qu'elles ne semblent l'être pour le moment. La réduction des observations planétaires de Greenwich rend une pareille recherche comparativement facile, et il faut espérer que les astronomes anglais ne seront pas les derniers à utiliser les trésors d'observation ainsi ouverts au monde.

APPENDICE.

Bessel a inséré au n° **48** des *Astronomische Nachrichten*, t. II, p. 441, une Lettre qui est accompagnée d'une note explicative se rapportant à ses Tables d'Uranus et émanant de Bouvard lui-même.

Il résulte évidemment des remarques I, II, III de M. Le Verrier, aux pages 92-94 de son Mémoire sur les perturbations d'Uranus, qu'il n'avait pas connaissance de ces Lettres de Bessel et Bouvard; car elles auraient fait disparaître la plupart des doutes qu'il y exprime relativement aux Tables de ce dernier. Il aurait vu, par exemple, que la correction $2\delta e$, qu'il suppose pouvoir s'élever à 100 secondes sexagésimales, n'était réellement que d'environ 10 secondes centésimales. Au haut de la page 90 de son Mémoire, M. Le Verrier remarque, avec beaucoup de justesse, qu'une erreur dans l'inégalité d'une longue période n'a pas d'importance pour l'objet en vue; mais il aurait dû aussi remarquer qu'une erreur dans une inégalité, dont la période était presque égale à celle d'Uranus, serait pareillement presque insignifiante, puisque l'effet de cette erreur, durant le temps pendant lequel Uranus a été observé, serait, à peu de chose près, représenté par une correction constante appliquée à l'excentricité et à la longitude du périhélie, comme je l'ai dit à la fin du n° 7 de mon Mémoire.

J'attache une très-grande importance à la remarque faite au n° 9, relativement à l'avantage d'employer la correction de la longitude moyenne au lieu de celle de la longitude vraie. M. Hansen a fortement insisté sur ce point dans sa *Théorie de la Lune* et dans ses autres ouvrages.

Par suite de cela, les termes qui sont nécessairement omis dans une première approximation sont plus faibles que si l'on avait employé les perturbations de la longitude vraie.

Je vais maintenant faire un petit nombre de remarques, en réponse aux objections de M. le professeur Pierce, contre la légitimité du procédé suivi, tant par M. Le Verrier que par moi-même, pour la solution de notre problème. Le professeur Pierce prétend que la période de notre planète hypothétique diffère si considérablement de celle de Neptune, que l'on pourrait indiquer quelques périodes intermédiaires, lesquelles seraient exactement commensurables avec la période d'Uranus, et qu'il y aurait une solution de continuité dans les perturbations d'Uranus, causée par deux planètes hypothétiques, dont l'une aurait une plus grande période et l'autre une période plus petite que la période commensurable dont il vient d'être question. De plus, la période de Neptune lui-même est, à très-peu de chose près, double de celle d'Uranus, et cette circonstance donne naissance à des perturbations réciproques très-considérables, d'un caractère tout à fait différent de celles qui seraient causées par nos planètes hypothétiques.

Peu de mots, à mon avis, suffiront pour aplanir cette difficulté. Il est vrai que, si nous voulions représenter les perturbations d'Uranus causées par une planète supérieure, pendant deux ou plusieurs périodes synodiques, cela ne pourrait se faire qu'en adoptant une période approximativement vraie pour la planète perturbatrice; mais le cas est différent lorsque, comme ici, nous n'avons à représenter que les perturbations produites durant une fraction d'une période synodique.

Dans ce cas, si nous prenions pour quantités inconnues, non les corrections applicables aux éléments moyens de l'orbite d'Uranus, mais celles qui seraient applicables aux éléments adoptés pour l'époque de 1810, par exemple, alors toutes les considérations relatives à une commensurabilité approximative dans les deux périodes, deviendraient étrangères à la question, et les perturbations pour l'intervalle limité requis pourraient être représentées approximativement, pourvu que les forces perturbatrices de la planète réelle et de la planète présumée fussent approximativement les mêmes en grandeur et en direction, durant le temps où ces forces perturbatrices agiraient avec la plus grande intensité, c'est-à-dire lorsque les planètes ne seraient pas fort éloignées de leur conjonction. Sir John Herschel a montré dans ses *Outlines of Astronomy* que ces conditions sont remplies d'une manière satisfaisante par les planètes hypothétiques de M. Le Verrier et de moi-même, quand leur action est comparée à celle de Neptune.

On ne devait attacher aucune valeur à la forte excentricité ni à la longitude de l'apside de l'orbite de la planète présumée, si ce n'est en tant qu'elles fournissaient les moyens d'approcher de plus près de la distance actuelle et du mouvement angulaire du corps perturbateur, dans l'intervalle où l'action perturbatrice se faisait le plus sentir.

Ainsi donc, de la circonstance que le périhélie de la planète présumée sortit du premier calcul, non loin de la ligne de conjonction, on aurait pu raisonnablement conclure, ce qu'a donné en effet le second calcul, que l'hypothèse d'une plus faible valeur de la distance moyenne conduirait à une valeur plus faible de l'excentricité.

On fera bien aussi de remarquer que les grands changements dans les valeurs de δe et $e\delta\varpi$, qui se trouvent, dans le n° 50, résultant de la transition de ma première à ma seconde hypothèse, sont des changements dans les valeurs des éléments moyens de l'orbite d'Uranus, lesquels sont grandement affectés par l'inégalité de la longitude moyenne avec les coefficients p_3 et q_3, dont la période ne diffère pas beaucoup de celle d'Uranus, particulièrement pour le cas de la première hypothèse. On verra que $\delta x_1 + p_3$ et $\delta y_1 + q_3$ varient bien moins en passant d'une hypothèse à l'autre que δx_1 et δy_1. Nous avons donc :

Première hypothèse.	Seconde hypothèse.
$\delta x_1 + p_3 = 94'',21$	$\delta x_1 + p_3 = 105'',98$
$\delta y_1 + q_3 = 50,75$	$\delta y_1 + q_3 = 41,59$

Et les corrections des éléments adoptés, à l'époque de 1810, seront approximativement déduites de ces quantités, absolument comme δe et $e\delta\varpi$ ont été formés de δx_1 et δy_1.

L'observation de Flamsteed, en 1690, remonte à une époque trop éloignée pour qu'elle puisse être bien représentée par les formules dont les résultats s'accordent assez bien avec ceux des observations plus récentes.

Ma seconde hypothèse a donné une erreur plus forte que la première. C'est donc probablement pour avoir eu trop de confiance dans la possibilité d'appliquer ses formules à cette observation ancienne, que M. Le Verrier s'est trouvé amené à fixer une limite inférieure à la distance moyenne de sa planète perturbatrice, laquelle ne concorde pas avec la distance moyenne de Neptune, telle qu'elle a été observée.

J.-C. Adams

Cambridge, le 7 septembre 1875.