JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J.-C. ADAMS

Explication des irrégularités observées dans le mouvement d'Uranus, fondée sur l'hypothèse des perturbations causées par une planète plus éloignée; comprenant une détermination de la masse, de l'orbite et de la position du corps perturbant

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 2 (1876), p. 5-32.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1876_3_2__5_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

EXPLICATION

DES

IRRÉGULARITÉS OBSERVÉES DANS LE MOUVEMENT D'URANUS,

Fondée sur l'hypothèse des perturbations causées par une planète plus éloignée; comprenant une détermination de la masse, de l'orbite et de la position du corps perturbant;

PAR **M. J.-C. ADAMS, M. A.,**

Membre du collége de Saint-Jean, à Cambridge,
de la Société royale astronomique et de la Société philosophique de Cambridge.

(Extrait de l'Appendice du *Nautical Almanac* pour l'année 1851 [*].)

AVERTISSEMENT.

Cet écrit fut communiqué par l'auteur à la Société royale astronomique et lu à ce corps dans sa séance ordinaire, le 13 novembre 1846. L'imprimerie de la Société étant occupée à un long écrit sur la longitude de Valence, par

[*] Les astronomes avaient depuis longtemps observé dans la marche d'Uranus des anomalies d'un caractère particulier. Pour rendre compte de ces irrégularités, plusieurs

l'astronome royal, et la publication urgente de l'œuvre de M. Adams ayant été regardée comme d'intérêt national, prière en conséquence fut adressée à M. le capitaine W.-H. Smyth, de la marine royale, président, et au révérend R. Sheepshanks, secrétaire de la Société, qui, avec leur diligence et zèle habituels, accordèrent la permission d'imprimer et de publier l'écrit par les soins de la rédaction du *Nautical Almanac;* c'est en vertu de ces circonstances que les investigations de M. Adams paraissent pour la première fois comme extrait de l'Appendice du *Nautical Almanac* de 1851.

W.-S. STRATFORD,
Directeur du *Nautical Almanac.*

Bureau du *Nautical Almanac,*
3, Verulam Buildings, Gray's Inn.
Londres, 31 décembre 1846.

---

hypothèses avaient été imaginées à différentes époques. La plus accréditée parmi les savants était celle qui consistait à supposer l'existence d'une planète dont la position aurait échappé à l'observation des astronomes et faisant dévier Uranus de sa route normale par son attraction propre. Cette hypothèse n'avait jamais été soumise à l'épreuve de l'Analyse mathématique avant l'année 1845. La question à résoudre était la suivante : Étant données les observations des positions d'Uranus, calculer les éléments du nouvel astre et, en particulier, sa place dans le ciel à une époque déterminée. Le problème fut résolu simultanément, en Angleterre, par M. Adams, et en France par M. Le Verrier, qui, ainsi que le reconnaît M. Adams, a publié le premier les résultats de ses recherches. On sait que, quelque temps après, l'astronome Galle aperçut, parmi les étoiles et la XXI^e heure, l'image d'une planète inconnue dansant dans le champ étroit de son télescope. Il est impossible de rencontrer, dans l'histoire des Sciences, une découverte qui fasse plus d'honneur au génie humain. Les lois de Newton recevaient ainsi la plus éclatante des confirmations, et l'Astronomie, désormais indiscutable dans ses principes, était arrivée à l'état de science parfaite.

Le Mémoire de M. Adams a valu, à juste titre, à son auteur la plus glorieuse célébrité; il est digne, en effet, de figurer à côté des plus beaux Mémoires de Laplace et de Lagrange.

C'est pourquoi, cédant aux sollicitations pressantes de plusieurs mathématiciens éminents, nous avons résolu de publier *in extenso* l'œuvre du savant Directeur de l'Observatoire de Cambridge. Pour nous faciliter la publication de ce précieux document, M. Adams lui-même a bien voulu nous aider de son concours et enrichir notre traduction d'un Appendice dont le lecteur appréciera l'intérêt et l'importance.

(H. R.)

SUR LES PERTURBATIONS D'URANUS.

1. Les irrégularités du mouvement d'Uranus ont longtemps attiré l'attention des astronomes. Quand l'orbite de cette planète fut approximativement connue, on constata que, avant sa découverte par sir W. Herschel en 1781, elle avait été à plusieurs reprises remarquée comme étoile fixe par Flamsteed, Bradley, Mayer et Lemonnier. Bien que ces observations soient évidemment très-inférieures en exactitude à celles de nos jours, on doit les considérer comme valables, en raison de la grande extension qu'elles donnent à l'arc observé de l'orbite de la planète. Toutefois Bouvard, à qui nous devons les Tables d'Uranus aujourd'hui en usage, trouva qu'il était impossible de se contenter de ces observations, sans attribuer aux observations modernes des erreurs beaucoup plus graves qu'elles n'en comportent : il fonda donc ses Tables exclusivement sur les observations les plus récentes; mais, dans l'espace d'un très-petit nombre d'années, des erreurs sensibles recommencèrent à se produire, et, bien que ces Tables ne datent que de 1821, leur erreur en ce moment dépasse 2 minutes d'espace, et elle continue à s'accroître rapidement. Il n'y avait donc plus de raison suffisante pour rejeter les anciennes observations, surtout depuis que, à l'exception de la première observation de Flamsteed, qui est antérieure de plus de vingt ans à toutes les autres, elles se confirment réciproquement les unes les autres.

2. Aujourd'hui que la découverte d'une autre planète a confirmé de la manière la plus brillante les conclusions de l'Analyse, et qu'elle nous a autorisés à rapporter ces irrégularités à leur véritable cause, je puis me dispenser de m'étendre plus au long sur les raisons qui m'ont porté à rejeter les différentes autres hypothèses formées pour les expliquer. Il me suffira de dire qu'elles paraissaient toutes improbables en elles-mêmes et ne semblaient pas susceptibles d'être mises à l'épreuve d'un calcul précis. Quelques-uns étaient allés jusqu'à supposer que, vu la grande distance qui sépare Uranus du Soleil, la loi d'attraction n'est plus celle du carré inverse des distances; mais la loi de la gravitation

était trop solidement établie pour qu'on pût admettre cette hypothèse, tant qu'on n'aurait pas réfuté toutes les autres hypothèses, et j'étais convaincu que, dans cette question, comme dans toutes les questions antérieures de même nature, les différences qui, pendant un certain temps, avaient fait douter de la vérité de la loi, finiraient par la confirmer de la manière la plus frappante.

3. Mon attention fut, pour la première fois, dirigée sur ce sujet, il y a quelques années, par la lecture de l'excellent Rapport de M. Airy, sur les progrès les plus récents de l'Astronomie. Je trouve dans mes papiers la Note suivante datée du 3 juillet 1841 : « Formé (j'ai) le projet, au commencement de cette semaine, d'étudier aussitôt que possible, après avoir pris mon grade [*], les irrégularités dans le mouvement d'Uranus qui restent encore inexpliquées, à l'effet de trouver si l'on doit les attribuer à l'action d'une planète plus éloignée et non encore découverte et, s'il est possible, de déterminer approximativement les éléments de son orbite, etc., ce qui entraînerait probablement la découverte de cette planète. » Donc, en 1843, je tentai une première solution du problème, en supposant que l'orbite fût un cercle avec un rayon égal à deux fois la distance moyenne d'Uranus au Soleil. Une hypothèse relative à la distance moyenne était évidemment nécessaire en premier lieu, et il était probable, d'après la loi de Bode, qu'en cela je ne m'éloignerais pas beaucoup de la vérité. Cette recherche était fondée exclusivement sur les observations modernes, et les erreurs de Tables étaient prises égales à celles que donnaient les équations de condition des Tables de Bouvard, jusqu'à l'année 1821 et, à partir de cette époque, les erreurs étaient tirées des observations données dans les *Astronomische Nachrichten* et des observations de Cambridge et de Greenwich. Le résultat me prouva qu'il y avait moyen d'établir un accord général et satisfaisant entre la théorie et l'observation; mais les différences les plus grandes se produisant dans les années où les observations étaient peu nombreuses, en outre, les observations planétaires de Greenwich étant alors en voie de réduction, je m'adressai à M. Airy, grâce à l'obligeante intervention de M. le professeur Challis, pour obtenir les ob-

[*] Celui de *bachelier ès Arts*.

servations de quelques années dans lesquelles l'accord paraissait moins satisfaisant. L'astronome royal eut l'extrême bonté de m'envoyer, en février 1844, les résultats de toutes les observations d'Uranus faites à Greenwich.

4. Cependant l'Académie royale des Sciences de Gœttingue avait proposé la théorie d'Uranus comme sujet du prix de Mathématiques. D'importants devoirs que m'imposait mon collége ne me laissaient que peu de loisirs et ne me permettaient pas de tenter l'étude complète de cette théorie, étude sans laquelle on ne pouvait guère aspirer au prix; cependant le but indiqué et la possession de précieuses séries d'observations me décidèrent à tenter une nouvelle solution du problème. Je tins dès lors compte des termes les plus importants dépendant de la première puissance de l'excentricité de la planète perturbatrice, en conservant toujours l'hypothèse relative à la distance moyenne. Quant aux observations modernes, les erreurs des Tables furent empruntées exclusivement aux observations de Greenwich, jusqu'à l'année 1830, excepté toutefois une observation faite par Bessel, en 1823; je puisai ensuite dans les observations de Cambridge et de Greenwich, ainsi que dans celles que publièrent différents numéros des *Astronomische Nachrichten*. Les erreurs des Tables, pour les anciennes observations, furent prises dans les équations de condition des Tables de Bouvard. Après avoir obtenu différentes solutions presque identiques, en tenant graduellement compte d'un nombre croissant de termes de la série exprimant les perturbations, je communiquai à M. le professeur Challis, en septembre 1845, les valeurs finales que j'avais obtenues pour la masse, la longitude héliocentrique et les éléments de l'orbite de la planète présumée. Les mêmes résultats, légèrement modifiés, furent communiqués par moi, en octobre 1845, à l'astronome royal. L'excentricité ayant dépassé mes prévisions, et des observations postérieures ayant établi que la théorie, basée sur l'hypothèse initiale de la distance moyenne, était encore dans une erreur assez notable, je recommençai mon étude en diminuant la distance moyenne de $\frac{1}{30}$. Le résultat, que je communiquai à M. Airy dans les premiers jours du mois de septembre de la présente année, parut plus

satisfaisant que mon premier, l'excentricité étant moindre et les erreurs de théorie comparées avec les dernières observations étant moins grandes, ce qui me porta à penser que la distance devait être encore diminuée.

5. En novembre 1845, M. Le Verrier présenta à l'Académie royale des Sciences de Paris une étude très-complète et très-détaillée de la théorie d'Uranus, lequel éprouverait des perturbations par l'action de Jupiter et de Saturne; il y accusait de petites inégalités qui jusqu'ici avaient été négligées. Au mois de juin de la présente année (1846), il a fait suivre son étude d'un Mémoire dans lequel il a attribué les autres perturbations à l'action d'une autre planète deux fois plus éloignée du Soleil qu'Uranus. Il a trouvé la longitude de la nouvelle planète à très-peu de chose près égale à celle que j'ai obtenue grâce à la même hypothèse. Le 31 août il a présenté à l'Académie une étude plus complète, dans laquelle il a déterminé la masse et les éléments de l'orbite de la nouvelle planète. Il a aussi obtenu les valeurs limitées de sa distance moyenne et de sa longitude héliocentrique. Je mentionne ces dates uniquement pour montrer que mes résultats ont été obtenus indépendamment de ceux de M. Le Verrier et avant qu'il eût publié les siens; je n'ai d'ailleurs pas l'intention de lui disputer l'honneur de cette découverte, car il est hors de doute que ses résultats ont été publiés les premiers et ont aidé le Dr Galle à découvrir effectivement la planète en question. Les faits cités plus haut ne peuvent diminuer en rien le mérite de M. Le Verrier.

6. Pour ne pas avoir une multitude gênante d'équations de condition, j'ai divisé les observations modernes en groupes, comprenant chacun une période de trois années, et, comme M. Airy avait montré que l'erreur du rayon vecteur des Tables était assez considérable, j'ai choisi les observations faites lors de l'opposition, ou j'ai combiné les autres de manière que le résultat fût à peu près exempt des effets de cette erreur. D'après les observations de chaque groupe, l'erreur des Tables pour la longitude héliocentrique était calculée pour le temps d'opposition moyenne dans l'année moyenne du groupe. Ainsi ont été déduites vingt et une erreurs normales des Tables, correspondant à un nombre égal de périodes équidistantes entre 1780 et 1840. L'erreur pour 1780 a été obtenue en interpolant entre les erreurs de

1781, 1782 et 1783 d'une part, et celles données par les anciennes observations de 1769 et 1771 de l'autre; bien que l'erreur ainsi dérivée (pour 1780) n'ait pas le même poids que les autres, elle ne doit pas, à mon avis, offrir une grande incertitude. Dans mes derniers calculs, j'aurais pu employer les résultats d'observations plus récentes; mais, pour obtenir l'effet dû au changement de la distance moyenne, force m'a été de fonder ma recherche sur les mêmes éléments qu'auparavant, et les dernières observations pourraient servir de contrôle à la théorie.

7. Pour m'assurer qu'il n'y avait pas d'erreur grave dans les Tables de Bouvard [*], j'ai recalculé toutes les principales inégalités produites par l'action de Jupiter et de Saturne, et je n'ai trouvé de différence notable que dans l'équation dépendant de la longitude moyenne de Saturne moins deux fois celle d'Uranus, erreur déjà signalée par Bessel. Il a aussi fallu corriger la principale équation dépendant de l'action de Jupiter, par suite de l'augmentation de valeur obtenue dernièrement pour la masse de cette planète. Il faut donc apporter aux Tables de Bouvard les corrections suivantes :

$$\begin{aligned}&+1'',918\sin(\varphi_1-2\varphi_2-13^\circ 1',5)\\&+1'',085\sin(\varphi-\varphi_2),\end{aligned}$$

φ, φ_1, φ_2 étant respectivement les longitudes moyennes de Jupiter, Saturne et Uranus. Dans la réduction des observations de Greenwich, on a déjà tenu compte de la dernière correction. M. Hansen ayant aussi trouvé, dans le mouvement d'Uranus, de nouvelles inégalités provenant du carré de la force perturbatrice, j'en ai recalculé les valeurs, en suivant la méthode donnée par M. Delaunay dans la *Connaissance des Temps* pour 1845, et mes résultats ont parfaitement concordé avec les siens, les termes à ajouter à la longitude étant

$$\begin{aligned}&+32'',00\sin(3\varphi_2-6\varphi_1+2\varphi+22^\circ.18',8)\\&-\ \ 8,35\sin(2\varphi_2-6\varphi_1+2\varphi+39.10,5)\\&-\ \ 1,49\sin(4\varphi_2-6\varphi_1+2\varphi+34.48,4)\end{aligned}$$

En ce qui concerne les inégalités d'ordres supérieurs négligées par

[*] *Voir* l'Appendice.

Bouvard, j'ai pensé que les plus importantes d'entre elles seraient ou bien celles de longue période, ou bien celles dont la période était presque égale à celle d'Uranus. Durant les $\frac{3}{4}$ d'une révolution de la planète, les effets de la première classe se confondraient presque avec ceux qui proviennent du changement d'époque et de mouvement moyen, et ceux de la dernière classe avec les effets produits par un changement constant dans l'excentricité et la longitude du périhélie. La position de la planète à déterminer serait donc peu affectée par ces termes, et les autres seraient probablement bien moindres que ceux qu'il faudrait négliger dans une première approximation vers les perturbations produites par la nouvelle planète.

8. En tenant compte des quelques corrections mentionnées ci-dessus, les différences résiduelles entre les longitudes héliocentriques observées et les longitudes calculées, seraient les suivantes :

Observations anciennes.		Observations modernes.	
Années.	Observation — Calcul.	Années.	Observation — Calcul.
1690.......	+61",2	1780.......	+ 3",46
1712.......	+92,7	1783.......	+ 8,45
1715.......	+73,8	1786.......	+12,36
1750.......	−47,6	1789.......	+19,02
1753.......	−39,5	1792.......	+18,70
1756.......	−45,7	1795.......	+21,38
1764.......	−34,9	1798.......	+20,95
1769.......	−19,3	1801.......	+22,21
1771.......	− 2,3	1804.......	+24,16
		1807.......	+22,07
		1810.......	+23,16
		1813.......	+22,00
		1816.......	+22,88
		1819.......	+20,69
		1822.......	+20,97
		1825.......	+18,16
		1828.......	+10,82
		1831.......	− 3,98
		1834.......	−20,80
		1837.......	−42,66
		1840.......	−66,64

9. On voit aisément que la série exprimant la correction de la longitude moyenne en termes des corrections appliquées aux éléments de l'orbite est plus convergente que celle qui donne la correction de la longitude *vraie*, et la même chose est vraie pour les perturbations de la longitude moyenne, comparées à celles de la longitude vraie. Les corrections trouvées plus haut ont donc été converties en corrections de la longitude moyenne, en multipliant chacune d'elles par le facteur $\frac{r^2}{ab}$, r étant le rayon vecteur et a et b les demi-axes de l'orbite. Par suite, ces dernières corrections sont devenues

Observations anciennes.

Années.	Observation — Calcul.
1690	+62″,6
1712	+84,5
1715	+67,2
1750	−51,8
1753	−43,2
1756	−50,1
1764	−37,8
1769	−20,5
1771	− 2,4

Observations modernes.

Années.	Observation — Calcul.
1780	+ 3″,42
1783	+ 8,19
1786	+11,74
1789	+17,75
1792	+17,22
1795	+19,52
1798	+19,06
1801	+20,24
1804	+22,19
1807	+20,52
1810	+21,89
1813	+21,19
1816	+22,50
1819	+20,78
1822	+21,50
1825	+18,97
1828	+11,50
1831	− 4,29
1834	−22,63
1837	−46,70
1840	−73,09

Ces nombres forment la base des recherches subséquentes.

10. Supposons que $\delta\varepsilon$, δa, δe et $\delta\varpi$ indiquent les corrections applicables aux éléments tabulaires d'Uranus, la correction de la longitude moyenne dans un temps t quelconque sera égale à

$$\delta\varepsilon + 2e^2\delta\varpi + t\delta n - \left[2\cos(nt + \varepsilon - \varpi) + \frac{e}{2}\cos 2(nt + \varepsilon - \varpi)\right] e\,\delta\varpi$$
$$+ \left[2\sin(nt + \varepsilon - \varpi) + \frac{e}{2}\sin 2(nt + \varepsilon - \varpi)\right]\delta e.$$

Si nous comprenons le petit terme $2e^2\delta\varpi$ dans la quantité $\delta\varepsilon$, cette correction pourra être mise sous la forme suivante :

$$\delta\varepsilon + t\delta n + \cos nt\,\delta x_1 + \sin nt\,\delta y_1 + \cos 2nt\,\delta x_2 + \sin 2nt\,\delta y_2,$$

expression dans laquelle

$$\delta x_2 = \tfrac{1}{4}e[\cos(\varepsilon - \varpi)\delta x_1 + \sin(\varepsilon - \varpi)\delta y_1],$$
$$\delta y_2 = -\tfrac{1}{4}e[\sin(\varepsilon - \varpi)\delta x_1 - \cos(\varepsilon - \varpi)\delta y_1].$$

11. De plus, si nous adoptons la notation de la théorie analytique de Pontécoulant, les perturbations de longitude moyenne seront égales à

$$\frac{m'}{2}\Sigma F_i \sin i(nt - n't + \varepsilon - \varepsilon')$$
$$+ m'e\,\Sigma G_i \sin[i(nt - n't + \varepsilon - \varepsilon')] - (nt + \varepsilon - \varpi),$$
$$+ m'e'\Sigma H_i \sin[i(nt - n't + \varepsilon - \varepsilon')] - (nt + \varepsilon - \varpi').$$

Ici les lettres accentuées appartiennent à la planète perturbatrice, i prend toutes les valeurs intégrales, positives et négatives, excepté zéro, et, si nous posons $i(n - n') = z$, les valeurs de F_i, G_i et H_i seront

$$F_i = \left[\frac{3in^4}{z^2(z^2 - n^2)} + \frac{in^2}{z^2 - n^2}\right] a A_i + \frac{2n^3}{z(z^2 - n^2)} a^2 \frac{dA_i}{da},$$

$$G_i = \left[-\frac{3i(i-1)n^4}{(z-n)^2 z(z-2n)} - \frac{i(i+1)n^2}{z(z-2n)} + \frac{in^2}{z^2 - n^2} + \frac{3in^3}{z(z-n)(z-2n)}\right] a A_i$$
$$+ \left[-\frac{3}{2}\frac{(i-1)n^4}{(z-n)^2 z(z-2n)} - \frac{1}{2}\frac{(i-1)n^2}{z(z-2n)} - \frac{1}{2}\frac{n^2}{z^2 - n^2} - \frac{2in^3}{z(z-n)(z-2n)}\right] a^2 \frac{dA_i}{da}$$
$$- \frac{n^3}{z(z-n)(z-2n)} a^3 \frac{d^2 A_i}{da^2}.$$

$$H_i = \left[\frac{3}{2}\frac{(i-1)(2i-1)n^4}{(z-n)^2 z(z-2n)} + \frac{1}{2}\frac{(i-1)(2i-1)n^2}{z(z-2n)}\right] a A_{i-1}$$
$$+ \left[\frac{3}{2}\frac{(i-1)n^4}{(z-n)^2 z(z-2n)} + \frac{1}{2}\frac{(i-1)n^2}{z(z-2n)} + \frac{2in^3}{z(z-n)(z-2n)}\right] a^2 \frac{dA_{i-1}}{da}$$
$$+ \frac{n^3}{z(z-n)(z-2n)} a^2 \frac{d^2 A_{i-1}}{da^2}.$$

12. Maintenant, si nous posons $\frac{a}{a'}$ ou $\alpha = \sin 30^\circ = 0,5$, les valeurs des quantités fondamentales b, $\alpha \frac{db}{d\alpha}$, $\alpha^2 \frac{d^2 b}{d\alpha^2}$ seront

$$\log b_0 = 0,33170, \quad \log \alpha \frac{db_0}{d\alpha} = 9,53765, \quad \log \alpha^2 \frac{d^2 b_0}{d\alpha^2} = 9,77848,$$
$$\log b_1 = 9,74497, \quad \log \alpha \frac{db_1}{d\alpha} = 9,83868, \quad \log \alpha^2 \frac{d^2 b_1}{d\alpha^2} = 9,70857,$$
$$\log b_2 = 9,32425, \quad \log \alpha \frac{db_2}{d\alpha} = 9,68012, \quad \log \alpha^2 \frac{d^2 b_2}{d\alpha^2} = 9,87776,$$
$$\log b_3 = 8,94670, \quad \log \alpha \frac{db_3}{d\alpha} = 9,46315, \quad \log \alpha^2 \frac{d^2 b_3}{d\alpha^2} = 9,86253.$$

En conséquence les principales inégalités de longitude moyenne, produites par l'action de la planète dont la masse est $\frac{m'}{5000}$, celle du Soleil étant prise pour unité, et l'excentricité de l'orbite de la planète étant $\frac{e'}{20}$, seront

$$\begin{aligned}
&- 36'',99 m' \sin (nt - n't + \varepsilon - \varepsilon')\\
&+ 58,97 m' \sin 2 (nt - n't + \varepsilon - \varepsilon')\\
&+ 5,80 m' \sin 3 (nt - n't + \varepsilon - \varepsilon')\\
&+ 2,06 m' \sin (n't + \varepsilon' - \varpi)\\
&- 4,30 m' e' \sin (n't + \varepsilon' - \varpi')\\
&+ 31,25 m' \sin (nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + \varpi)\\
&- 12,14 m' e' \sin (nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + \varpi')\\
&+ 48,55 m' \sin (2nt - 3n't + 2\varepsilon - 3\varepsilon' + \varpi)\\
&- 93,01 m' e' \sin (2nt - 3n't + 2\varepsilon - 3\varepsilon' + \varpi')
\end{aligned}$$

On peut y ajouter les suivantes, qui sont de deux dimensions en termes des excentricités :

$$\begin{aligned}
&+ 0'',57 m' \sin 3 (nt - n't + \varepsilon - \varepsilon')\\
&- 1,08 m' e' \sin [3 (nt - n't + \varepsilon - \varepsilon') - \varpi + \varpi']
\end{aligned}$$

Ces expressions peuvent être mises sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
&h_1 \cos(n-n')t + h_2 \cos 2(n-n')t + h_3 \cos 3(n-n')t \\
&+ k_1 \sin(n-n')t + k_2 \sin 2(n-n')t + k_3 \sin 3(n-n')t \\
&+ p_1 \cos n't + p_2 \cos(n-2n')t + p_3 \cos(2n-3n')t \\
&+ q_1 \sin n't + q_2 \sin(n-2n')t + q_3 \sin(2n-3n')t
\end{aligned}$$

13. Prenons le temps de l'opposition moyenne en 1810 comme l'époque à partir de laquelle t est calculé; cette date, exprimée en fractions décimales d'année, sera 1810,328. De plus, supposons que trois périodes synodiques d'Uranus, comprenant 3,0362 années, soient prises comme unité de temps, alors le changement de l'anomalie moyenne dans une unité de temps sera $13°0',5$; de plus $n = 13°0',6$; $n' = 4°36,0$, par conséquent $n - n' = 8°24',6$, $n - 2n' = 3°48',6$, $2n - 3n' = 12°13',2$; les équations de condition données par les observations modernes auront la forme

$$\begin{aligned}
c'' = \;& \delta\varepsilon + \delta x_1 \cos(13°\,0',5)t + \delta x_2 \cos(26°\,1',0)t \\
& + t\delta n + \delta y_1 \sin(13.\,0,5)t + \delta y_2 \sin(26.\,1,0)t \\
& \quad + h_1 \cos(\;8.24,6)t + h_2 \cos(16.49,2)t + h_3 \cos(25°.13',8)t \\
& \quad + k_2 \sin(\;8.24,6)t + k_2 \sin(16.49,2)t + k_3 \sin(25.13,8)t \\
& \quad + p_1 \cos(\;4.36,0)t + p_2 \cos(\;3.48,6)t + p_3 \cos(12.13,2)t \\
& \quad + q_1 \sin(\;4.36,0)t + q_2 \sin(\;3.48,6)t + q_3 \sin(12.13,2)t
\end{aligned}$$

dans laquelle t prend toutes les valeurs intégrales de -10 à $+10$ sans interruption et les quelques valeurs de c'' sont contenues dans la Table donnée au n° **9**.

14. Les équations finales, pour les corrections des éléments elliptiques, seront trouvées en multipliant chaque équation successivement par les coefficients de $\delta\varepsilon$, δn, δx et δy qui s'y rencontrent et en additionnant les différents résultats ainsi obtenus.

On traitera les équations de la même manière relativement aux quantités $h_1, k_1, h_2, k_2, h_3, k_3, p_2, q_2, p_3, q_3$.

On verra que, par l'effet de l'arrangement donné aux équations de condition, les équations ainsi formées se partagent naturellement en deux groupes, dont l'un embrasse seulement $\delta\varepsilon$, δx_1, δx_2, avec les quantités h et p, tandis que l'autre embrasse δn, δy_1, δy_2, avec les quantités k et q.

De plus, les coefficients, dans ces équations, sont aisément calculés par les formules suivantes, en faisant $t = 10$ dans leurs membres de droite :

$$\Sigma 2 \cos mt = \frac{\sin m (t + \frac{1}{2})}{\sin \frac{1}{2} m},$$

$$\Sigma 2 t \sin mt = \frac{(t+1)\sin mt - t \sin m (t+1)}{2 \sin^2 \frac{1}{2} m},$$

$$\Sigma 2 \cos mt \cos nt = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)(t+\frac{1}{2})}{\sin\frac{1}{2}(m-n)} + \frac{\sin(m+n)(t+\frac{1}{2})}{\sin\frac{1}{2}(m+n)}\right],$$

$$\Sigma 2 \sin mt \sin nt = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)(t+\frac{1}{2})}{\sin\frac{1}{2}(m-n)} - \frac{\sin(m+n)(t+\frac{1}{2})}{\sin\frac{1}{2}(m+n)}\right],$$

$$\Sigma 2 \cos^2 mt = t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin m(2t+1)}{\sin m},$$

$$\Sigma 2 \sin^2 mt = t + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sin m(2t+1)}{\sin m}.$$

15. En effectuant les calculs, on trouve que les équations du premier groupe sont

$$(\varepsilon)\quad\left\{\begin{aligned} 151'',48 = {} & 21,0000\,\delta\varepsilon + 6,0670\,\delta x_1 - 4,4358\,\delta x_2 \\ & + 13,6320\,h_1 + 0,4043\,h_2 - 4,5608\,h_3 \\ & + 18,6046\,p_1 + 19,3384\,p_2 + 7,3721\,p_3, \end{aligned}\right.$$

$$(x)\quad\left\{\begin{aligned} 246,48 = {} & 6,0670\,\delta\varepsilon + 8,2821\,\delta x_1 + 4,1762\,\delta x_2 \\ & + 7,4041\,h_1 + 8,2523\,h_2 + 4,6963\,h_3 \\ & + 6,5389\,p_1 + 9,3978\,p_2 + 8,1831\,p_3, \end{aligned}\right.$$

$$(h_1)\quad\left\{\begin{aligned} 209,74 = {} & 13,6320\,\delta\varepsilon + 7,4041\,\delta x_1 - 0,2337\,\delta x_2 \\ & + 10,7022\,h_1 + 4,5356\,h_2 - 0,0018\,h_3 \\ & + 12,7013\,p_1 + 12,9883\,p_2 + 8,0038\,p_3, \end{aligned}\right.$$

$$(h_2)\quad\left\{\begin{aligned} 242,68 = {} & 0,4043\,\delta\varepsilon + 8,2523\,\delta x_1 + 7,5650\,\delta x_2 \\ & + 4,5356\,h_1 + 10,2960\,h_2 + 8,1944\,h_3 \\ & + 1,7866\,p_1 + 1,3667\,p_2 + 7,6671\,p_3 \end{aligned}\right.$$

2

$$(h_3)\left\{\begin{aligned} 86'',67 = &- 4,5608\,\delta\varepsilon + 4,6963\,\delta x_1 + 10,5023\,\delta x_2 \\ &- 0,0018\,h_1 + 8,1944\,h_2 + 10,7071\,h_3 \\ &- 3,0812\,p_1 - 3,5347\,p_2 + 3,8855\,p_3, \end{aligned}\right.$$

$$(p_2)\left\{\begin{aligned} 165,99 = &\ 19,3384\,\delta\varepsilon + 6,3978\,\delta x_1 - 3,4948\,\delta x_2 \\ &+ 12,9883\,h_1 + 1,3667\,h_2 - 3,5347\,h_3 \\ &+ 17,2795\,p_1 + 17,9106\,p_2 + 7,5423\,p_3, \end{aligned}\right.$$

$$(p_3)\left\{\begin{aligned} 242,56 = &\ 7,3721\,\delta\varepsilon + 8,1831\,\delta x_1 + 3,4071\,\delta x_2 \\ &+ 8,0038\,h_1 + 7,6671\,h_2 + 3,8855\,h_3 \\ &+ 7,6127\,p_1 + 7,5423\,p_2 + 8,2019\,p_3. \end{aligned}\right.$$

16. Si, au moyen de (ε), on élimine $\delta\varepsilon$ de chacune des autres équations, ces dernières deviennent

$$(x)\left\{\begin{aligned} 202'',72 = &\ 6,5294\,\delta x_1 + 5,4577\,\delta x_2 + 3,4658\,h_1 + 8,1355\,h_2 \\ &+ 6,0139\,h_3 + 1,1640\,p_1 + 0,8109\,p_2 + 6,0533\,p_3, \end{aligned}\right.$$

$$(h_1)\left\{\begin{aligned} 111,41 = &\ 3,4658\,\delta x_1 + 2,6458\,\delta x_2 + 1,8531\,h_1 + 4,2731\,h_2 \\ &+ 2,9588\,h_3 + 0,6243\,p_1 + 0,4349\,p_2 + 3,2183\,p_3, \end{aligned}\right.$$

$$(h_2)\left\{\begin{aligned} 239,76 = &\ 8,1355\,\delta x_1 + 7,6504\,\delta x_2 + 4,2731\,h_1 + 10,2882\,h_2 \\ &+ 8,2822\,h_3 + 1,4284\,p_1 + 0,9944\,p_2 + 7,5252\,p_3, \end{aligned}\right.$$

$$(h_3)\left\{\begin{aligned} 119,57 = &\ 6,0139\,\delta x_1 + 9,5389\,\delta x_2 + 2,9588\,h_1 + 8,2822\,h_2 \\ &+ 9,7166\,h_3 + 0,9593\,p_1 + 0,6652\,p_2 + 5,4866\,p_3, \end{aligned}\right.$$

$$(p_2)\left\{\begin{aligned} 26,50 = &\ 0,8109\,\delta x_1 + 0,5900\,\delta x_2 + 0,4349\,h_1 + 0,9944\,h_2 \\ &+ 0,6652\,h_3 + 0,1470\,p_1 + 0,1024\,p_2 + 0,7535\,p_3, \end{aligned}\right.$$

$$(p_3)\left\{\begin{aligned} 189,38 = &\ 6,0533\,\delta x_1 + 4,9643\,\delta x_2 + 3,2183\,h_1 + 7,5252\,h_2 \\ &+ 5,4866\,h_3 + 1,0815\,p_1 + 0,7535\,p_2 + 5,6139\,p_3. \end{aligned}\right.$$

17. Si maintenant, au moyen de (x), nous éliminons δx_1 de chacune des autres équations, nous trouvons

$$(h_1)\left\{\begin{aligned} 3'',807 = &- 0,2512\,\delta x_2 + 0,0135\,h_1 - 0,0452\,h_2 - 0,2334\,h_3 \\ &+ 0,0065\,p_1 + 0,0045\,p_2 + 0,0052\,p_3, \end{aligned}\right.$$

$$(h_2)\left\{\begin{aligned} -12,821 = &\ 0,8502\,\delta x_2 - 0,0452\,h_1 + 0,1515\,h_2 + 0,7890\,h_3 \\ &- 0,0219\,p_1 - 0,0160\,p_2 - 0,0171\,p_3. \end{aligned}\right.$$

$$(h_3)\quad \left\{\begin{aligned} -67'',149 &= 4,5120\,\delta x_2 - 0,2334\,h_1 + 0,7890\,h_2 + 4,1775\,h_3 \\ &\quad - 0,1128\,p_1 - 0,0817\,p_2 - 0,0888\,p_3, \end{aligned}\right.$$

$$(p_2)\quad \left\{\begin{aligned} 1,327 &= -0,0878\,\delta x_2 + 0,0045\,h_1 - 0,0160\,h_2 - 0,0817\,h_3 \\ &\quad + 0,0024\,p_1 + 0,0017\,p_2 + 0,0018\,p_3, \end{aligned}\right.$$

$$(p_3)\quad \left\{\begin{aligned} 1,448 &= -0,0955\,\delta x_2 + 0,0052\,h_1 - 0,0171\,h_2 - 0,0888\,h_3 \\ &\quad + 0,0024\,p_1 + 0,0018\,p_2 + 0,0020\,p_3. \end{aligned}\right.$$

18. Semblablement, les équations du second groupe se trouvent être

$$(n)\quad \left\{\begin{aligned} -171'',27 &= 77,0000\,\delta n + 9,3938\,\delta y_1 - 1,2183\,\delta y_2 \\ &\quad + 8,8463\,k_1 + 7,3034\,k_2 - 0,5927\,k_3 \\ &\quad + 5,7519\,q_1 + 4,8755\,q_2 + 9,5583\,q_3, \end{aligned}\right.$$

$$(y)\quad \left\{\begin{aligned} -166,33 &= 93,9380\,\delta n + 12,7179\,\delta y_1 + 1,8907\,\delta y_2 \\ &\quad + 11,2022\,k_1 + 11,0848\,k_2 + 2,6731\,k_3 \\ &\quad + 7,0956\,q_1 + 5,9913\,q_2 + 12,7441\,q_3, \end{aligned}\right.$$

$$(k_1)\quad \left\{\begin{aligned} -182,87 &= 88,4630\,\delta n + 11,2022\,\delta y_1 - 0,3210\,\delta y_2 \\ &\quad + 10,2978\,k_1 + 9,0964\,k_2 + 0,4061\,k_3 \\ &\quad + 6,6370\,q_1 + 5,6163\,q_2 + 11,3346\,q_3, \end{aligned}\right.$$

$$(k_2)\quad \left\{\begin{aligned} -89,07 &= 73,0340\,\delta n + 11,0848\,\delta y_1 + 4,8266\,\delta y_2 \\ &\quad + 9,0964\,k_1 + 10,7040\,k_2 + 5,4376\,k_3 \\ &\quad + 5,5855\,q_1 + 4,6976\,q_2 + 10,9375\,q_3 \end{aligned}\right.$$

$$(k_3)\quad \left\{\begin{aligned} +124,80 &= -5,9270\,\delta n + 2,6731\,\delta y_1 + 10,4253\,\delta y_2 \\ &\quad + 0,4061\,k_1 + 5,4376\,k_2 + 10,2929\,k_3 \\ &\quad - 0,2497\,q_1 - 0,2643\,q_2 + 2,1788\,q_3 \end{aligned}\right.$$

$$(q_2)\quad \left\{\begin{aligned} -107,02 &= 48,7550\,\delta n + 5,9913\,\delta y_1 - 0,6614\,\delta y_2 \\ &\quad + 5,6163\,k_1 + 4,6976\,k_2 - 0,2643\,k_3 \\ &\quad + 3,6475\,q_1 + 3,0894\,q_2 + 6,0897\,q_3, \end{aligned}\right.$$

$$(q_3)\quad \left\{\begin{aligned} -175,89 &= 95,5830\,\delta n + 12,7441\,\delta y_1 + 1,3845\,\delta y_2 \\ &\quad + 11,3346\,k_1 + 10,9375\,k_2 + 2,1788\,k_3 \\ &\quad + 7,2084\,q_1 + 6,0897\,q_2 + 12,7981\,q_3 \end{aligned}\right.$$

19. Si, au moyen de (n), nous éliminons δn de chacune des autres équations, nous trouvons

$$(y)\ \left\{\begin{aligned} 42'',61 = {} & 1,2578\,\delta y_1 + 3,3771\,\delta y_2 + 0,4100\,k_1 + 2,1748\,k_2 \\ & + 3,3962\,k_3 + 0,0785\,q_1 + 0,0433\,q_2 + 1,0833\,q_3. \end{aligned}\right.$$

$$(k_1)\ \left\{\begin{aligned} 13,90 = {} & 0,4100\,\delta y_1 + 1,0787\,\delta y_2 + 0,1346\,k_1 + 0,7057\,k_2 \\ & + 1,0871\,k_3 + 0,0288\,q_1 + 0,0150\,q_2 + 0,3534\,q_3, \end{aligned}\right.$$

$$(k_2)\ \left\{\begin{aligned} 73,38 = {} & 2,1748\,\delta y_1 + 5,9822\,\delta y_2 + 0,7057\,k_1 + 3,7767\,k_2 \\ & + 5,9998\,k_3 + 0,1298\,q_1 + 0,0732\,q_2 + 1,8715\,q_3, \end{aligned}\right.$$

$$(k_3)\ \left\{\begin{aligned} 111,62 = {} & 3,3962\,\delta y_1 + 10,3315\,\delta y_2 + 1,0871\,k_1 + 5,9998\,k_2 \\ & + 10,2473\,k_3 + 0,1930\,q_1 + 0,1110\,q_2 + 2,9145\,q_3, \end{aligned}\right.$$

$$(q_2)\ \left\{\begin{aligned} 1,42 = {} & 0,0433\,\delta y_1 + 0,1100\,\delta y_2 + 0,0150\,k_1 + 0,0732\,k_2 \\ & + 0,1110\,k_3 + 0,0055\,q_1 + 0,0023\,q_2 + 0,0375\,q_3, \end{aligned}\right.$$

$$(q_3)\ \left\{\begin{aligned} 36,72 = {} & 1,0833\,\delta y_1 + 2,8969\,\delta y_2 + 0,3534\,k_1 + 1,8715\,k_2 \\ & + 2,9145\,k_3 + 0,0684\,q_1 + 0,0375\,q_2 + 0,9330\,q_3 \end{aligned}\right.$$

20. Ensuite éliminons δy_1 au moyen de (y), et nous trouverons

$$(k_1)\ \left\{\begin{aligned} 0'',009 = {} & -0,0221\,\delta y_2 + 0,0010\,k_1 - 0,0032\,k_2 - 0,0200\,k_3 \\ & + 0,0032\,q_1 + 0,0009\,q_2 + 0,0003\,q_3, \end{aligned}\right.$$

$$(k_2)\ \left\{\begin{aligned} -0,301 = {} & 0,1430\,\delta y_2 - 0,0032\,k_1 + 0,0162\,k_2 + 0,1274\,k_3 \\ & - 0,0059\,q_1 - 0,0017\,q_2 - 0,0016\,q_3, \end{aligned}\right.$$

$$(k_3)\ \left\{\begin{aligned} -3,443 = {} & 1,2129\,\delta y_2 - 0,0200\,k_1 + 0,1274\,k_2 + 1,0769\,k_3 \\ & - 0,0189\,q_1 - 0,0059\,q_2 - 0,0105\,q_3, \end{aligned}\right.$$

$$(q_2)\ \left\{\begin{aligned} -0,045 = {} & -0,0062\,\delta y_2 + 0,0009\,k_1 - 0,0017\,k_2 - 0,0059\,k_3 \\ & + 0,0028\,q_1 + 0,0008\,q_2 + 0,0002\,q_3, \end{aligned}\right.$$

$$(q_3)\ \left\{\begin{aligned} +0,017 = {} & -0,0116\,\delta y_2 + 0,0003\,k_1 - 0,0016\,k_2 - 0,0105\,k_3 \\ & + 0,0008\,q_1 + 0,0002\,q_2 + 0,0000\,q_3. \end{aligned}\right.$$

21. Des équations qui restent dans les deux groupes, après l'élimination de $\delta\varepsilon$, δn, δx_1, δy_1, il sera facile, quand on aura obtenu des valeurs approximatives de la masse et de la longitude moyenne de la planète perturbatrice, de déduire les équations finales pour déterminer ces quantités avec plus de précision par la méthode des moindres carrés.

On peut remarquer toutefois que les équations, dans chaque groupe, sont, à très-peu de chose près, identiques entre elles; on peut donc poser deux équations finales par la simple addition des différentes équations de chaque groupe, en donnant partout le même signe aux quantités inconnues. Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned} 86'',552 &= -5,7967\,\delta x_2 + 0,3018\,h_1 - 1,0188\,h_2 - 5,3704\,h_3 \\ &\quad + 0,1460\,p_1 + 0,1056\,p_2 + 0,1149\,p_3 \\ 3,725 &= -1,3958\,\delta y_2 + 0,0254\,k_1 - 0,1501\,k_2 - 1,2407\,k_3 \\ &\quad + 0,0316\,q_1 + 0,0095\,q_2 + 0,0127\,q_3. \end{aligned}$$

22. Si, dans les expressions précédemment données pour δx_2 et δy_2, nous substituons $e = 0,046679$ et $\varepsilon - \varpi = 50^\circ\,15',8$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \delta x_2 &= 0,007460\,\delta x_1 + 0,008974\,\delta y_1 \\ \delta y_2 &= -0,008974\,\delta x_1 + 0,007460\,\delta y_1. \end{aligned}$$

Si nous substituons ces valeurs dans les équations (x) et (y) et dans celles que nous venons de trouver, nous voyons qu'en ajoutant aux dernières équations

$$0,006768\,(x) + 0,040287\,(y)$$

et

$$-0,001869\,(x) + 0,008187\,(y) \text{ respectivement,}$$

δx_1 et δy_1 seront éliminés, et nous obtiendrons les équations suivantes :

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} 89'',641 &= 0,3252\,h_1 - 0,9637\,h_2 - 5,3297\,h_3 \\ &\quad + 0,0165\,k_1 + 0,0876\,k_2 + 0,1368\,k_3 \\ &\quad + 0,1539\,p_1 + 0,1111\,p_2 + 0,1559\,p_3 \\ &\quad + 0,0032\,q_1 + 0,0017\,q_2 + 0,0436\,q_3. \end{aligned} \right.$$

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} 3,695 &= -0,0065\,h_1 - 0,0152\,h_2 - 0,0112\,h_3 \\ &\quad + 0,0288\,k_1 - 0,1323\,k_2 - 1,2129\,k_3 \\ &\quad - 0,0022\,p_1 - 0,0015\,p_2 - 0,0113\,p_3 \\ &\quad + 0,0323\,q_1 + 0,0099\,q_2 + 0,0215\,q_3. \end{aligned} \right.$$

23. Ces équations suffiraient pour déterminer la masse de la planète perturbatrice et sa longitude moyenne de l'époque, si nous négligions l'excentricité de l'orbite. Nous allons essayer maintenant d'établir, à l'aide des observations anciennes, des équations pour déterminer l'excentricité et la longitude du périhélie.

Voici les équations de condition fournies par les observations anciennes :

$$\begin{aligned}62'',6 = {} & \delta\varepsilon - 0,8776\,\delta x_1 + 0,5402\,\delta x_2 + 0,8712\,h_1 + 0,5180\,h_2 \\ & - 39,31\,\delta n - 0,4795\,\delta y_1 + 0,8415\,\delta y_2 + 0,4909\,k_1 + 0,8554\,k_2 \\ & + 0,0314\,h_3 - 0,9999\,p_1 - 0,8640\,p_2 - 0,5055\,p_3 \\ & + 0,9995\,k_3 + 0,0145\,q_1 - 0,5035\,q_2 - 0,8628\,q_3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}84,5 = {} & \delta\varepsilon + 0,4975\,\delta x_1 - 0,5050\,\delta x_2 + 0,0288\,h_1 - 0,9984\,h_2 \\ & - 32,30\,\delta n - 0,8675\,\delta y_1 - 0,8631\,\delta y_2 + 0,9996\,k_1 + 0,0573\,k_2 \\ & - 0,0860\,h_3 - 0,8534\,p_1 - 0,5456\,p_2 + 0,8220\,p_3 \\ & - 0,9963\,k_3 - 0,5213\,q_1 - 0,8380\,q_2 - 0,5695\,q_3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}67,2 = {} & \delta\varepsilon + 0,6732\,\delta x_1 - 0,0935\,\delta x_2 - 0,1120\,h_1 - 0,9749\,h_2 \\ & - 31,34\,\delta n - 0,7394\,\delta y_1 - 0,9956\,\delta y_2 + 0,9937\,k_1 - 0,2227\,k_2 \\ & + 0,3305\,h_3 - 0,8105\,p_1 - 0,4912\,p_2 + 0,9206\,p_3 \\ & - 0,9438\,k_3 - 0,5857\,q_1 - 0,8711\,q_2 - 0,3905\,q_3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-51,8 = {} & \delta\varepsilon - 0,2616\,\delta x_1 - 0,8631\,\delta x_2 - 0,9649\,h_1 + 0,8618\,h_2 \\ & - 19,59\,\delta n + 0,9652\,dy_1 - 0,5050\,\delta y_2 - 0,2627\,k_1 + 0,5073\,k_2 \\ & - 0,6982\,h_3 - 0,0023\,p_1 + 0,2650\,p_2 - 0,5090\,p_3 \\ & - 0,7159\,k_3 - 1,0000\,q_1 - 0,9642\,q_2 + 0,8607\,q_3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-43,2 = {} & \delta\varepsilon - 0,4741\,\delta x_1 - 0,5505\,\delta x_2 - 0,9154\,h_1 + 0,6758\,h_2 \\ & - 18,58\,\delta n + 0,8805\,\delta y_1 - 0,8348\,\delta y_2 - 0,4025\,k_1 + 0,7371\,k_2 \\ & - 0,3220\,h_3 + 0,0787\,p_1 + 0,3291\,p_2 - 0,6814\,p_3 \\ & - 0,9467\,k_3 - 0,9969\,q_1 - 0,9443\,q_2 + 0,7319\,q_3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-50,1 = {} & \delta\varepsilon - 0,6430\,\delta x_1 - 0,1731\,\delta x_2 - 0,8543\,h_1 + 0,4599\,h_2 \\ & - 17,68\,\delta n + 0,7659\,\delta y_1 - 0,9849\,\delta y_2 - 0,5198\,k_1 + 0,8879\,k_2 \\ & + 0,0686\,h_3 + 0,1510\,p_1 + 0,3848\,p_2 - 0,8085\,p_3 \\ & - 0,9976\,k_3 - 0,9885\,q_1 - 0,9230\,q_2 + 0,5885\,q_3,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
-37'',8 = {} & \delta\varepsilon - 0{,}9492\,\delta x_1 + 0{,}8021\,\delta x_2 - 0{,}6189 h_1 - 0{,}2340 h_2 \\
& - 15{,}25\,\delta n + 0{,}3145\,\delta y_1 - 0{,}5972\,\delta y_2 - 0{,}7855\,k_1 + 0{,}9722 k_2 \\
& + 0{,}9085 h_3 + 0{,}3396 p_1 + 0{,}5287 p_2 - 0{,}9939 p_3 \\
& - 0{,}4179 k_3 - 0{,}9406 q_1 - 0{,}8488 q_2 + 0{,}1100 q_3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-20{,}5 = {} & \delta\varepsilon - 0{,}9985\,\delta x_1 + 0{,}9942\,\delta x_2 - 0{,}4128 h_1 - 0{,}6591 h_2 \\
& - 13{,}60\,\delta n - 0{,}0538\,\delta y_1 + 0{,}1074\,\delta y_2 - 0{,}9108\,k_1 + 0{,}7520 k_2 \\
& + 0{,}9571 h_3 + 0{,}4607 p_1 + 0{,}6182 p_2 - 0{,}9711 p_3 \\
& + 0{,}2899 k_3 - 0{,}8875 q_1 - 0{,}7860 q_2 - 0{,}2385 q_3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-2{,}4 = {} & \delta\varepsilon - 0{,}9633\,\delta x_1 + 0{,}8560\,\delta x_2 - 0{,}2807 h_1 - 0{,}8424 h_2 \\
& - 12{,}64\,\delta n - 0{,}2684\,\delta y_1 + 0{,}5170\,\delta y_2 - 0{,}9598\,k_1 + 0{,}5388 k_2 \\
& + 0{,}7536 h_3 + 0{,}5279 p_1 + 0{,}6670 p_2 - 0{,}9023 p_3 \\
& + 0{,}6574 k_3 - 0{,}8493 q_1 - 0{,}7451 q_2 - 0{,}4310 q_3.
\end{aligned}
$$

24. Si de chacune de ces équations nous éliminons $\delta\varepsilon$, δn, δx_1 et δy_1, au moyen des équations (ε), (n), (x) et (y) trouvées précédemment, nous avons les suivantes :

$$
\begin{aligned}
-142'',0 = {} & 1{,}7265\,\delta x_2 + 0{,}8412 h_1 + 1{,}9521 h_2 + 1{,}3230 h_3 \\
& - 11{,}3691\,\delta y_2 + 3{,}6001 k_1 - 2{,}8793 k_2 - 10{,}9578 k_3 \\
& - 1{,}6779 p_1 - 1{,}6400 p_2 + 0{,}2249 p_3 \\
& + 2{,}6815 q_1 + 1{,}8369 q_2 + 0{,}2995 q_3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-105{,}2 = {} & -0{,}4681\,\delta x_2 - 0{,}7311 h_1 - 1{,}2776 h_2 - 0{,}0609 h_3 \\
& - 9{,}6249\,\delta y_2 + 3{,}7087 k_1 - 2{,}1926 k_2 - 9{,}5426 k_3 \\
& - 1{,}7765 p_1 - 1{,}4924 p_2 + 0{,}2786 p_3 \\
& + 1{,}6997 q_1 + 1{,}1014 q_2 + 0{,}7934 q_3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-126{,}1 = {} & -0{,}2035\,dx_2 - 0{,}9653 h_1 - 1{,}4730 h_2 + 0{,}1937 h_3 \\
& - 9{,}7719\,\delta y_2 + 3{,}5895 k_1 - 2{,}5827 k_2 - 9{,}5123 k_3 \\
& - 1{,}7649 p_1 - 1{,}4598 p_2 + 0{,}2133 p_3 \\
& + 1{,}5629 q_1 + 1{,}0070 q_2 + 0{,}8437 q_3,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
-199'',1 = &- 0,1917\,\delta x_2 - 1,3218\,h_1 + 1,5284\,h_2 + 0,0260\,h_3\\
&- 9,8232\,\delta y_2 + 0,8943\,k_1 - 3,4359\,k_2 - 9,9270\,k_3\\
&- 0,7901\,p_1 - 0,5885\,p_2 - 0,3497\,p_3\\
&+ 0,2540\,q_1 + 0,1607\,q_2 + 0,4028\,q_3,\\
-174,7 = &\;\;\; 0,2985\,\delta x_2 - 1,1595\,h_1 + 1,6072\,h_2 + 0,5979\,h_3\\
&- 9,5788\,\delta y_2 + 0,7062\,k_1 - 2,9425\,k_2 - 9,5877\,k_3\\
&- 0,6712\,p_1 - 0,4970\,p_2 - 0,3251\,p_3\\
&+ 0,1946\,q_1 + 0,1238\,q_2 + 0,3277\,q_3,\\
-166,7 = &\;\;\; 0,8191\,\delta x_2 - 1,0088\,h_1 + 1,6018\,h_2 + 1,1442\,h_3\\
&- 9,1122\,\delta y_2 + 0,5586\,k_1 - 2,4890\,k_2 - 9,0258\,k_3\\
&- 0,5688\,p_1 - 0,4203\,p_2 - 0,2956\,p_3\\
&+ 0,1498\,q_1 + 0,0958\,q_2 + 0,2658\,q_3,\\
-114,2 = &\;\;\; 2,0482\,\delta x_2 - 0,6027\,h_1 + 1,2894\,h_2 + 2,2661\,h_3\\
&- 6,6781\,\delta y_2 + 0,2576\,k_1 - 1,3421\,k_2 - 6,4080\,k_3\\
&- 0,3256\,p_1 - 0,2384\,p_2 - 0,1971\,p_3\\
&+ 0,0628\,q_1 + 0,0419\,q_2 + 0,1298\,q_3,\\
-72,4 = &\;\;\; 2,2815\,\delta x_2 - 0,3786\,h_1 + 0,9257\,h_2 + 2,3601\,h_3\\
&- 4,4181\,\delta y_2 + 0,1283\,k_1 - 0,7339\,k_2 - 4,1495\,k_3\\
&- 0,1957\,p_1 - 0,1428\,p_2 - 0,1286\,p_3\\
&+ 0,0283\,q_1 + 0,0198\,q_2 + 0,0671\,q_3,\\
-42,0 = &\;\;\; 2,1139\,\delta x_2 - 0,2652\,h_1 + 0,6985\,h_2 + 2,1241\,h_3\\
&- 3,1027\,\delta y_2 + 0,0772\,k_1 - 0,4646\,k_2 - 2,8790\,k_3\\
&- 0,1348\,p_1 - 0,0984\,p_2 - 0,0924\,p_3\\
&+ 0,0154\,q_1 + 0,0114\,q_2 + 0,0412\,q_3.
\end{aligned}$$

25. Les plus grands termes dépendant de l'excentricité de la planète perturbatrice se rencontrent dans p_3, q_3; il conviendra donc de combiner les équations précitées, de telle sorte que ces quantités puissent acquérir les plus forts coefficients possibles; à cet effet, on multipliera chaque équation par une quantité presque proportionnelle au coefficient de chacune des quantités inconnues p_3 et q_3, et l'on additionnera ensemble les différents résultats. On n'a pas cru devoir employer la première des équations précitées, attendu qu'elle provient d'une seule observation faite par Flamsteed, en 1690, vingt-deux ans avant toute autre observation.

Ainsi l'équation qui doit faire connaître p_3 peut être formée en multipliant les équations précitées, à partir de la seconde, par

$$-0,8, \quad -0,6, \quad +1,0, \quad +1,0, \quad +0,9, \quad +0,6, \quad +0,4, \quad +0,3,$$

et l'équation pour trouver q_3 en multipliant les mêmes équations par

$$1,0, \quad 1,0, \quad 0,5, \quad 0,4, \quad 0,3, \quad 0,2, \quad 0,1, \quad 0,1.$$

Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned}
-474'',1 = {} & 4,114\,\delta x_2 - 2,817 h_1 + 7,837 h_2 + 4,528 h_3 \\
& -20,745\,\delta y_2 - 2,789 k_1 - 6,551 k_2 - 20,666 k_3 \\
& + 0,193 p_1 + 0,377 p_2 - 1,489 p_3 \\
& - 1,660 q_1 - 1,078 q_2 - 0,054 q_3, \\
-485,0 = {} & 0,446\,\delta x_2 - 3,308 h_1 - 0,442 h_2 + 1,629 h_3 \\
& -32,961\,\delta y_2 + 8,267 k_1 - 8,805 k_2 - 32,546 k_3 \\
& - 4,473 p_1 - 3,643 p_2 + 0,037 p_3 \\
& + 3,530 q_1 + 2,278 q_2 + 2,086 q_3.
\end{aligned}$$

26. Si nous éliminons δx_2 et δy_2 de ces équations au moyen de (x) et (y), nous aurons

$$(3) \quad \left\{\begin{aligned}
-476'',7 = {} & - 2,930 h_1 + 7,572 h_2 + 4,332 h_3 \\
& - 2,751 k_1 - 6,348 k_2 - 20,350 k_3 \\
& + 0,155 p_1 + 0,350 p_2 - 1,686 p_3 \\
& - 1,653 q_1 - 1,074 q_2 + 0,047 q_3,
\end{aligned}\right.$$

$$(4) \quad \left\{\begin{aligned}
-485,9 = {} & - 3,463 h_1 - 0,805 h_2 + 1,360 h_3 \\
& + 8,345 k_1 - 8,391 k_2 - 31,900 k_3 \\
& - 4,525 p_1 - 3,679 p_2 - 0,233 p_3 \\
& + 3,545 q_1 + 2,286 q_2 + 2,292 q_3.
\end{aligned}\right.$$

Ces équations, avec (1) et (2) de l'article **23**, suffiront pour la solution de notre problème.

27. Si nous éliminons les membres de gauche des équations (2), (3) et (4) au moyen de l'équation (1), nous aurons

$$
\begin{aligned}
0 = {} & 0{,}4819 h_1 - 0{,}5950 h_2 - 5{,}0570 h_3 + 0{,}2063 p_1 + 0{,}1475 p_2 + 0{,}4300 p_3 \\
& - 0{,}6812 k_1 + 3{,}2982 k_2 + 29{,}5618 k_3 - 0{,}7804 q_1 - 0{,}2375 q_2 - 0{,}4789 q_3, \\
0 = {} & - 1{,}2005 h_1 + 2{,}4466 h_2 - 24{,}0122 h_3 + 0{,}9735 p_1 + 0{,}9412 p_2 - 0{,}8575 p_3 \\
& - 2{,}6633 k_1 - 5{,}8825 k_2 - 19{,}6219 k_3 - 1{,}6362 q_1 - 1{,}0648 q_2 + 0{,}2791 q_3, \\
0 = {} & - 1{,}7003 h_1 - 6{,}0294 h_2 - 27{,}5295 h_3 - 3{,}6908 p_1 - 3{,}0772 p_2 + 0{,}6118 p_3 \\
& + 8{,}4344 k_1 - 7{,}9162 k_2 - 31{,}1583 k_3 + 3{,}5621 q_1 + 2{,}2954 q_2 + 2{,}5285 q_3.
\end{aligned}
$$

28. Si maintenant on fait $\varepsilon - \varepsilon' = \theta$ et $\varepsilon - \varpi = \beta$, on voit aisément que

$$
\begin{aligned}
\frac{h_1}{m'} &= -36'',99 \sin\theta, \quad \frac{h_2}{m'} = 58'',97 \sin 2\theta, \\
\frac{k_1}{m'} &= -36'',99 \cos\theta, \quad \frac{k_2}{m'} = 58'',97 \cos 2\theta, \\
\frac{h_3}{m'} &= 5'',80 \sin 3\theta + 0{,}007460 \frac{p_3}{m'} + 0{,}008974 \frac{q_3}{m'}. \\
\frac{k_3}{m'} &= 5'',80 \cos 3\theta - 0{,}008974 \frac{p_3}{m'} + 0{,}007460 \frac{q_3}{m'} \\
\frac{p_1}{m'} &= 0'',18 \sin(\theta - \beta) - 0{,}046247 \left(\frac{p_3}{m'} \cos 2\theta - \frac{q_3}{m'} \sin 2\theta\right) \\
\frac{q_1}{m'} &= -0'',18 \cos(\theta - \beta) + 0{,}046247 \left(\frac{p_3}{m'} \sin 2\theta + \frac{q_3}{m'} \cos 2\theta\right) \\
\frac{p_2}{m'} &= 24'',91 \sin(2\theta - \beta) + 0{,}13055 \left(\frac{p_3}{m'} \cos\theta - \frac{q_3}{m'} \sin\theta\right) \\
\frac{q_2}{m'} &= 24'',91 \cos(2\theta - \beta) + 0{,}13055 \left(\frac{p_3}{m'} \sin\theta + \frac{q_3}{m'} \cos\theta\right).
\end{aligned}
$$

29. En substituant ces expressions dans les équations de l'article **27** et en remplaçant β par sa valeur $50^\circ\, 15', 8$, nous obtiendrons, après une légère réduction,

$$
\begin{aligned}
0 = &-(1{,}24782)\sin\theta+(1{,}40248)\cos\theta-(1{,}57155)\sin 2\theta+(2{,}27388)\cos 2\theta \\
&-(1{,}46746)\sin 3\theta+(2{,}23430)\cos 3\theta+(9{,}10380)\frac{p_3}{m'}-(9{,}48254)\frac{q_3}{m'} \\
&+(8{,}28455)\left(\frac{p_3}{m'}\cos\theta-\frac{q_3}{m'}\sin\theta\right)-(8{,}49138)\left(\frac{p_3}{m'}\sin\theta+\frac{q_3}{m'}\cos\theta\right) \\
&-(7{,}97958)\left(\frac{p_3}{m'}\cos 2\theta-\frac{q_3}{m'}\sin 2\theta\right)-(8{,}55742)\left(\frac{p_3}{m'}\sin 2\theta+\frac{q_3}{m'}\cos 2\theta\right), \\
0 = &\ \ (1{,}65083)\sin\theta+(1{,}99378)\cos\theta+(2{,}14259)\sin 2\theta-(2{,}58192)\cos 2\theta \\
&-(2{,}14400)\sin 3\theta-(2{,}05631)\cos 3\theta-(9{,}93475)\frac{p_3}{m'}-(8{,}91803)\frac{q_3}{m'} \\
&+(9{,}08947)\left(\frac{p_3}{m'}\cos\theta-\frac{q_3}{m'}\sin\theta\right)-(9{,}14306)\left(\frac{p_3}{m'}\sin\theta+\frac{q_3}{m'}\cos\theta\right) \\
&-(8{,}65341)\left(\frac{p_3}{m'}\cos 2\theta-\frac{q_3}{m'}\sin 2\theta\right)-(8{,}87892)\left(\frac{p_3}{m'}\sin 2\theta+\frac{q_3}{m'}\cos 2\theta\right), \\
0 = &\ \ (1{,}79213)\sin\theta-(2{,}49403)\cos\theta-(2{,}55700)\sin 2\theta-(2{,}56972)\cos 2\theta \\
&-(2{,}20337)\sin 3\theta-(2{,}25714)\cos 3\theta+(9{,}83632)\frac{p_3}{m'}+(0{,}31156)\frac{q_3}{m'} \\
&-(9{,}60395)\left(\frac{p_3}{m'}\cos\theta-\frac{q_3}{m'}\sin\theta\right)+(9{,}47665)\left(\frac{p_3}{m'}\sin\theta+\frac{q_3}{m'}\cos\theta\right) \\
&+(9{,}23220)\left(\frac{p_3}{m'}\cos 2\theta-\frac{q_3}{m'}\sin 2\theta\right)+(9{,}21679)\left(\frac{p_3}{m'}\sin 2\theta+\frac{q_3}{m'}\cos 2\theta\right),
\end{aligned}
$$

formules dans lesquelles les nombres compris entre parenthèses indiquent les logarithmes des coefficients correspondants.

30. On peut résoudre rapidement ces équations par approximation. Les coefficients de $\frac{p_3}{m'}$ et $\frac{q_3}{m'}$ dans la première équation étant faibles, nous pouvons en déduire une valeur approximative de θ dont la substitution dans la deuxième et la troisième équation donnera les valeurs approximatives de $\frac{p_3}{m'}$ et $\frac{q_3}{m'}$. Au moyen de celles-ci, on pourra trouver une valeur plus exacte de θ de la première équation, et, en répétant ce procédé, nous pourrons résoudre toutes les équations avec autant de précision que nous le désirons.

Ainsi nous trouvons

$$\theta = -51^\circ 30', \quad \frac{p_1}{m'} = 271'',57, \quad \frac{q_1}{m'} = -207'',24.$$

ε est connu et égal à $217^\circ 55'$: donc $\varepsilon' = 269^\circ 25'$, qui est la valeur de la longitude moyenne de la planète perturbatrice à l'époque 1810, 328. Le mouvement sidéral en 36 périodes synodiques d'Uranus est égal à $55^\circ 12'$; la précession est égale à $30'$: donc la longitude moyenne en 1846, 762, c'est-à-dire 1846, le 6 octobre, est égale à $325^\circ 7'$.

De plus les expressions analytiques pour $\frac{p_1}{m'}$ et $\frac{q_1}{m'}$ sont

$$\frac{p_1}{m'} = 48'',55 \sin(3\theta - \beta) - 93'',01 e' \sin(3\theta - \beta')$$

$$\frac{q_1}{m'} = 48'',55 \cos(3\theta - \beta) - 93'',01 e' \cos(3\theta - \beta'),$$

où $\varepsilon - \varpi' = \beta'$. En les égalant aux valeurs numériques données plus haut, nous trouvons $e' = 3,2206$, $\beta' = 262^\circ 28'$, et, par conséquent, $\varpi' = 315^\circ 27'$. On déduit de là que la longitude du périhélie en 1846 est $315^\circ 57'$.

Finalement, en substituant les valeurs que nous venons d'obtenir dans l'équation (1), nous trouvons $m' = 0,82816$.

31. Voici, en conséquence, les valeurs de la masse et les éléments de l'orbite de la planète perturbatrice, résultant de la première hypothèse relative à la distance moyenne :

$$\frac{a}{a'} = 0,5.$$

Longitude moyenne de la planète, le 6 octobre 1846. . .	$325^\circ 7'$
Longitude du périhélie.	$315^\circ 57'$
Excentricité de l'orbite.	0,16103
Masse (celle du Soleil étant prise pour unité).	0,0001656

Tels sont les résultats que je communiquai à l'Astronome royal, en octobre 1845.

32. Immédiatement après, j'entrepris une recherche analogue en par-tant de l'hypothèse que la distance moyenne était moindre de $\frac{1}{30}$ que celle que j'avais admise auparavant, c'est-à-dire que $\frac{a}{a'}$ ou $\alpha = \sin 31° = 0,515$. La méthode employée fut, en principe, exactement celle que j'avais d'abord suivie; mais les calculs numériques furent quelque peu abrégés par de légères modifications de procédés, que ma solution antérieure m'avait suggérées.

33. Si donc nous admettons que $\alpha = \sin 31°$, les valeurs des quantités b, $\alpha \frac{db}{d\alpha}$, $\alpha^2 \frac{d^2 b}{d\alpha^2}$ deviendront

$$\log b_0 = 0,33385,\quad \log \alpha \frac{db_0}{d\alpha} = 9,57333,\quad \log \alpha^2 \frac{d^2 b_0}{d\alpha^2} = 9,82911,$$
$$\log b_1 = 9,76106,\quad \log \alpha \frac{db_1}{d\alpha} = 9,86149,\quad \log \alpha^2 \frac{d^2 b_1}{d\alpha^2} = 9,76573,$$
$$\log b_2 = 9,35361,\quad \log \alpha \frac{db_2}{d\alpha} = 9,71359,\quad \log \alpha^2 \frac{d^2 b_2}{d\alpha^2} = 9,92466,$$
$$\log b_3 = 8,98918,\quad \log \alpha \frac{db_3}{d\alpha} = 9,50854,\quad \log \alpha^2 \frac{d^2 b_3}{d\alpha^2} = 9,91563.$$

En conséquence, au moyen des formules données plus haut, les principales inégalités de la longitude moyenne d'Uranus, produites par l'action d'une planète dont la masse est $\frac{m'}{5000}$, celle du Soleil étant prise pour unité, l'excentricité de son orbite étant $\frac{e'}{20}$, peuvent être trouvées comme suit :

$$\begin{aligned}
&- 42'',33\,m' \sin\,(nt - n't + \varepsilon - \varepsilon'),\\
&+ 76,55\,m' \sin 2(nt - n't + \varepsilon - \varepsilon'),\\
&+ 7,25\,m' \sin 3(nt - n't + \varepsilon - \varepsilon'),\\
&+ 2,34\,m' \sin\,(n't + \varepsilon' - \varpi),\\
&- 4,74\,m'e' \sin\,(n't + \varepsilon' - \varpi'),\\
&+ 41,72\,m' \sin\,(nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + \varpi),\\
&- 16,47\,m'e' \sin\,(nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + \varpi'),\\
&+ 33,93\,m' \sin\,(2nt - 3n't + 2\varepsilon - 3\varepsilon' + \varpi),\\
&- 63,41\,m'e' \sin\,(2nt - 3n't + 2\varepsilon - 3\varepsilon' + \varpi').
\end{aligned}$$

Nous pouvons y ajouter les suivantes, qui sont de deux dimensions par rapport aux excentricités,

$$+\,0'',40m' \quad \sin 3(nt - n't + \varepsilon - \varepsilon'),$$
$$-\,0,74m'e' \sin[3(nt - n't + \varepsilon - \varepsilon') - \varpi + \varpi'].$$

34. Maintenant, d'après notre hypothèse, $n = 13°0',6$, $n' = 4°48',5$, $n - n' = 8°12',1$, $n - 2n' = 3°23',6$, $2n - 3n' = 11°35',7$.

Donc les équations de condition données par les observations modernes auront la forme suivante :

$$\begin{aligned} c'' = \;& \delta\varepsilon + \delta x_1 \cos(13°.\ 0',5)t + \delta x_2 \cos(26°.\ 1',0)t, \\ & + t\,\delta n + \delta y_1 \sin(13.\ 0,5)t + \delta y_2 \sin(26.\ 1,0)t, \\ & + h_1 \cos(\ 8.12,1)t + h_2 \cos(16.24,2)t + h_3 \cos(24°.36',3)t \\ & + k_1 \sin(\ 8.12,1)t + k_2 \sin(16.24,2)t + k_3 \sin(24.36,3)t \\ & + p_1 \cos(\ 4.48,5)t + p_2 \cos(\ 3.23,6)t + p_3 \cos(11.35,7)t \\ & + q_1 \sin(\ 4.48,5)t + q_2 \sin(\ 3.23,6)t + q_3 \sin(11.35,7)t. \end{aligned}$$

35. Si nous traitons ces équations de condition d'après la méthode employée plus haut, les équations du premier groupe qui en dérivent se trouveront être comme suit :

$$(\varepsilon)\quad \left\{\begin{aligned} 151,48 = \;& 21,0000\,\delta\varepsilon + 6,0670\,\delta x_1 - 4,4358\,\delta x_2 \\ & + 13,9515\,h_1 + 0,9471\,h_2 - 4,5965\,h_3 \\ & + 18,3916\,p_1 + 19,6752\,p_2 + 8,4184\,p_3, \end{aligned}\right.$$

$$(x)\quad \left\{\begin{aligned} 246,48 = \;& 6,0670\,\delta\varepsilon + 8,2821\,\delta x_1 + 4,1762\,\delta x_2 \\ & + 7,3540\,h_1 + 8,3027\,h_2 + 5,0961\,h_3 \\ & + 6,5793\,p_1 + 6,3319\,p_2 + 8,0850\,p_3, \end{aligned}\right.$$

$$(h_1)\quad \left\{\begin{aligned} 207,58 = \;& 13,9515\,\delta\varepsilon + 7,3540\,\delta x_1 - 0,4177\,\delta x_2 \\ & + 10,9735\,h_1 + 4,6775\,h_2 - 0,0005\,h_3 \\ & + 12,8697\,p_1 + 13,4050\,p_2 + 8,4781\,p_3, \end{aligned}\right.$$

$$(h_2)\quad \left\{\begin{aligned} 245,17 = \;& 0,9471\,\delta\varepsilon + 8,3027\,\delta x_1 + 7,2362\,\delta x_2 \\ & + 4,6775\,h_1 + 10,0259\,h_2 + 8,3220\,h_3 \\ & + 2,3661\,p_1 + 1,6727\,p_2 + 7,3073\,p_3, \end{aligned}\right.$$

$$(h_3)\quad \left\{\begin{aligned} 103,48 = & - 4,5965\,\delta\varepsilon + 5,0961\,\delta x_1 + 10,5558\,\delta x_2 \\ & - 0,0005\,h_1 + 8,3220\,h_2 + 10,9749\,h_3 \\ & - 2,8935\,p_1 + 3,7316\,p_2 + 3,5852\,p_3. \end{aligned}\right.$$

36. De même les équations du second groupe seront

$$
\begin{array}{ll}
(n) & \left\{\begin{aligned}
-171{,}27 = {} & 77{,}0000\,\delta n + 9{,}3938\,\delta y_1 - 1{,}2183\,\delta y_2 \\
& + 8{,}7355\,k_1 + 7{,}6213\,k_2 - 0{,}0590\,k_3 \\
& + 5{,}9764\,q_1 + 4{,}3875\,q_2 + 9{,}6152\,q_3,
\end{aligned}\right. \\
(y) & \left\{\begin{aligned}
-166{,}33 = {} & 93{,}9380\,\delta n + 12{,}7179\,\delta y_1 + 1{,}8907\,\delta y_2 \\
& + 11{,}0393\,k_1 + 11{,}3717\,k_2 + 3{,}3196\,k_3 \\
& + 7{,}3747\,q_1 + 5{,}3825\,q_2 + 12{,}6816\,q_3,
\end{aligned}\right. \\
(k_1) & \left\{\begin{aligned}
-181{,}31 = {} & 87{,}3550\,\delta n + 11{,}0393\,\delta y_1 - 0{,}3758\,\delta y_2 \\
& + 10{,}0264\,k_1 + 9{,}2740\,k_2 + 0{,}9476\,k_3 \\
& + 6{,}8054\,q_1 + 4{,}9866\,q_2 + 11{,}1971\,q_3,
\end{aligned}\right. \\
(k_2) & \left\{\begin{aligned}
-99{,}51 = {} & 76{,}2130\,\delta n + 11{,}3717\,\delta y_1 + 4{,}4810\,\delta y_2 \\
& + 9{,}2740\,k_1 + 10{,}9740\,k_2 + 5{,}6294\,k_3 \\
& + 6{,}0523\,q_1 + 4{,}3916\,q_2 + 11{,}0843\,q_3,
\end{aligned}\right. \\
(k_3) & \left\{\begin{aligned}
113{,}14 = {} & -0{,}5900\,\delta n + 3{,}3196\,\delta y_1 + 10{,}2112\,\delta y_2 \\
& + 0{,}9476\,k_1 + 5{,}6294\,k_2 + 10{,}0251\,k_3 \\
& + 0{,}1746\,q_1 + 0{,}0454\,q_2 + 2{,}4791\,q_3.
\end{aligned}\right.
\end{array}
$$

37. Les équations (p_2) et (p_3) du premier groupe, et (q_2), (q_3) du deuxième n'ont pas été formées, notre solution antérieure ayant montré que, après l'élimination de $\delta\varepsilon$, δn, δx_1, dy_1, les coefficients des quantités inconnues restant dans ces équations seraient extrêmement faibles. Il sera avantageux de combiner entre elles les équations (h_1), (h_2) et (h_3) et aussi les équations (k_1), (k_2) et (k_3) et d'en éliminer $\delta\varepsilon$, δn, δx_1 et δy_1 après que cette combinaison aura été effectuée. Si ensuite nous changeons le signe de la troisième équation dans chaque groupe et que nous l'ajoutions à la quatrième et à la cinquième, nous obtiendrons

$$
\begin{aligned}
141{,}07 = {} & -17{,}6009\,\delta\varepsilon + 6{,}0448\,\delta x_1 + 18{,}2097\,\delta x_2 \\
& - 6{,}2965\,h_1 + 13{,}6704\,h_2 + 19{,}2974\,h_3 \\
& - 13{,}3971\,p_1 - 15{,}4639\,p_2 + 2{,}4144\,p_3, \\
194{,}94 = {} & -11{,}7320\,\delta n + 3{,}6520\,\delta y_1 + 15{,}0680\,\delta y_2 \\
& + 0{,}1951\,k_1 + 7{,}3294\,k_2 + 14{,}7069\,k_3 \\
& - 0{,}5785\,q_1 - 0{,}5496\,q_2 + 2{,}3663\,q_3.
\end{aligned}
$$

38. Au moyen de (ε) et (n) des n^{os} **35** et **36**, éliminons $\delta\varepsilon$ et δn de (x) et (y), ainsi que des équations que nous venons de trouver, et nous aurons

$$(x)\left\{\begin{aligned} 202'',72 &= 6,5294\,\delta x_1 + 5,4577\,\delta x_2 + 3,3234\,h_1 + 8,0291\,h_2 \\ &\quad + 6,4240\,h_3 + 1,2659\,p_1 + 0,6477\,p_2 + 5,6529\,p_3, \end{aligned}\right.$$

$$(y)\left\{\begin{aligned} 42'',61 &= 1,2578\,\delta y_1 + 3,3771\,\delta y_2 + 0,3822\,k_1 + 2,0739\,k_2 \\ &\quad + 3,3916\,k_3 + 0,0836\,q_1 + 0,0298\,q_2 + 0,9513\,q_3, \end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned} 268,02 &= 11,1297\,\delta x_1 + 14,4919\,\delta x_2 + 5,3967\,h_1 + 14,4642\,h_2 \\ &\quad + 15,4449\,h_3 + 2,0175\,p_1 + 1,0266\,p_2 + 9,4702\,p_3, \\ 168,85 &= 5,0833\,\delta y_1 + 14,8824\,\delta y_2 + 1,5261\,k_1 + 8,4906\,k_2 \\ &\quad + 14,6979\,k_3 + 0,3320\,q_1 + 0,1189\,q_2 + 3,8313\,q_3. \end{aligned}$$

(*A suivre.*)