JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

HUGO GYLDÉN

Extrait d'une Lettre à M. Hermite, relative à l'application des fonctions elliptiques à la théorie des perturbations

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 2 (1876), p. 411-419.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1876_3_2__411_0>

Extrait d'une Lettre à M. Hermite, relative à l'application des fonctions elliptiques à la théorie des perturbations;

PAR M. HUGO GYLDÉN,

Directeur de l'Observatoire de Stockholm.

N'ayant jusqu'à ces derniers temps fait que des applications de la formule (4) (*voir* les *Comptes rendus* du 26 avril 1875), il m'est entièrement échappé que l'argument du facteur $\{1 + (\Phi)\cos[2x + (\mathrm{A})]\}$ de la formule (5) ne doit pas signifier l'intégrale elliptique, mais la limite à laquelle on parvient par les procédés suivants.

La seconde des équations

$$\sin 2\,\mathrm{am}\,u = \frac{\sqrt{1-k_1^2}\cos\mathrm{am}(\mathrm{K}_1 - u_1)}{1 - k_1\sin\mathrm{am}(\mathrm{K}_1 - u_1)} = \frac{\sqrt{1-k_1^2}\sin 2\,\mathrm{am}\,u'_1}{1 - k_1\cos 2\,\mathrm{am}\,u'_1},$$

$$\cos 2\,\mathrm{am}\,u = \frac{\sin\mathrm{am}(\mathrm{K}_1 - u_1) - k_1}{1 - k_1\sin\mathrm{am}(\mathrm{K}_1 - u_1)} = \frac{\cos 2\,\mathrm{am}\,u'_1 - k_1}{1 - k_1\cos 2\,\mathrm{am}\,u'_1}$$

peut évidemment être remplacée par la suivante :

$$\operatorname{tang}\mathrm{am}\,u = \sqrt{\frac{1+k_1}{1-k_1}}\operatorname{tang}\mathrm{am}\,u'_1.$$

Supposons, de plus, $\mathrm{am}(\mathrm{K}_2 - u'_2) = \frac{\pi}{2} - 2\,\mathrm{am}\,u''_2$, on aura de la même manière

$$\operatorname{tang}\mathrm{am}\,u'_1 = \sqrt{\frac{1+k_2}{1-k_2}}\operatorname{tang}\mathrm{am}\,u''_2,$$

et ainsi de suite. Par de telles opérations, on parvient rapidement à une certaine limite (u) des variables $\mathrm{am}\,u'_1$, $\mathrm{am}\,u''_2$, ..., dont la valeur peut être calculée à l'aide de la formule

$$\operatorname{tang}(u) = \sqrt{\frac{(1-k_1)(1-k_2)(1-k_3)\ldots}{(1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)\ldots}}\operatorname{tang am} u.$$

Au moyen de cette équation et des relations connues entre l'amplitude et l'intégrale elliptique, on déduit facilement les relations entre les arguments (u) et x en forme des séries, et par conséquent il est aussi facile d'établir des formules destinées à transformer une expression développée suivant l'argument (u) en une autre dont l'argument serait x.

Parmi les relations mentionnées dont le nombre est très-grand, je veux réciter un seul résultat numérique. Dans tous les calculs qui avaient pour objet les perturbations cométaires, j'ai adopté les valeurs

$$\log k = 9{,}99736685 - 10,$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}
\log k_1 &= 9{,}9042551 - 10,\\
\log k_2 &= 9{,}4018330 - 10,\\
\log k_3 &= 8{,}215765 \;\; - 10,\\
\log k_4 &= 5{,}8295 - 10,
\end{aligned}$$

lesquelles me donnaient

$$\begin{aligned}
(u) = x &- 26236'',58 \sin 2x\\
&- 11286{,}05 \sin 4x\\
&+ 1618{,}50 \sin 6x\\
&+ 198{,}96 \sin 8x\\
&- 84{,}35 \sin 10x\\
&+ 1{,}04 \sin 12x\\
&+ 3{,}87 \sin 14x\\
&- 0{,}52 \sin 16x\\
&- 0{,}16 \sin 18x\\
&+ 0{,}05 \sin 20x\\
&+ 0{,}01 \sin 22x.
\end{aligned}$$

Il me reste maintenant à transformer le produit

$$[1 - k_1 \sin \operatorname{am}(K_1 - u_1)]\,[1 - k_2 \sin \operatorname{am}(K_2 - u'_2)]\ldots$$

en fonction de l'argument (u). Dans ce but, je fais la remarque que

$$\begin{aligned}
&1 - k_1 \sin \operatorname{am}(K_1 - u_1)\\
&\quad = 1 - k_1 \cos 2 \operatorname{am} u'_1 = 1 - k_1 \frac{\sin \operatorname{am}(K_2 - u'_2) - k_2}{1 - k_2 \sin \operatorname{am}(K_2 - u'_2)}\\
&\qquad\qquad = \frac{1 + k_1 k_2 - (k_1 + k_2) \sin \operatorname{am}(K_2 - u'_2)}{1 - k_2 \sin \operatorname{am}(K_2 - u'_2)}.
\end{aligned}$$

Or, posant $\varkappa_2 = \dfrac{k_1 + k_2}{1 + k_1 k_2}$, nous aurons

$$\begin{aligned}
&[1 - k_1 \sin \operatorname{am}(K_1 - u_1)]\,[1 - k_2 \sin \operatorname{am}(K_2 - u'_2)]\\
&\quad = (1 + k_1 k_2)\,[1 - \varkappa_2 \sin \operatorname{am}(K_2 - u'_2)].
\end{aligned}$$

Par des opérations tout à fait semblables, on parvient à la formule

$$\begin{aligned}
&[1 - \varkappa_2 \sin(K_2 - u'_2)]\,[1 - k_3 \sin \operatorname{am}(K_3 - u''_3)]\\
&\quad = (1 + \varkappa_2 k_3)\,[1 - \varkappa_3 \sin \operatorname{am}(K_3 - u''_3)],
\end{aligned}$$

où la quantité $\varkappa_3$ s'obtient au moyen de l'équation

$$\varkappa_3 = \frac{\varkappa_2 + k_3}{1 + \varkappa_2 k_3}.$$

On a donc, en multipliant ces deux résultats,

$$\begin{aligned}
&[1 - k_1 \sin(K_1 - u_1)]\,[1 - k_2 \sin(K_2 - u'_2)]\,[1 - k_3 \sin(K_3 - u''_3)]\\
&\quad = (1 + k_1 k_2)(1 + \varkappa_2 k_3)\,[1 - \varkappa_3 \sin \operatorname{am}(K_3 - u''_3)].
\end{aligned}$$

De la même manière, on pourrait répéter ces transformations, par lesquelles on parviendra à ce résultat

$$\begin{aligned}
&[1 - k_1 \sin(K_1 - u_1)]\,[1 - k_2 \sin(K_2 - u'_2)]\ldots\\
&\quad = (1 + k_1 k_2)(1 + \varkappa_2 k_3)\ldots[1 - (\varkappa) \cos 2(u)]\ [*],
\end{aligned}$$

où l'on a désigné par $(\varkappa)$ la limite des quantités $\varkappa_2, \varkappa_3, \ldots$.

---

[*] On peut encore remarquer l'équation

$$(1 + k_1 k_2)(1 + \varkappa_2 k_3)\ldots = \frac{(1 - k_1)(1 - k_2)\ldots}{1 - (\varkappa)}.$$

Au lieu de l'équation (5), nous aurons maintenant

$$\frac{T_1}{m'_4} = \frac{(1 - k_1\Phi_1 \cos\Lambda)(1 - k_2\Phi_2 \cos\Lambda_1)\ldots}{(1 - k_1)(1 - k_2)\ldots} \, \frac{1 - (\varkappa)}{1 - (\varkappa)\cos 2(u)} \left\{ 1 + (\Phi)\cos[2(u) + (\Lambda)] \right\},$$

dont les puissances négatives et fractionnaires se développeront aisément suivant l'argument (u), après quoi, par une opération très-facile, on pourrait introduire l'argument x au lieu de (u). Par cette dernière opération, on obtient des séries généralement encore plus convergentes que celles dont l'argument est (u).

Cependant, on parvient directement à un résultat semblable en partant de l'équation (4). On est donc en état de choisir entre deux formules de départ, lesquelles diffèrent l'une de l'autre par les valeurs des coefficients constants et par les définitions des variables. Pour mieux juger leurs avantages, on doit remarquer que, dans les cas difficiles à traiter, la valeur numérique de (Φ) est un peu moindre que celle de Φ_1 ; mais, d'un autre côté, que $(\varkappa)$ est toujours un peu plus grand que K_1.

Je vous demande maintenant, Monsieur, la permission de vous présenter une petite application numérique des formules mentionnées dans ce qui précède. Pour ce but, je reprends dans le calcul des perturbations de la comète d'Encke produites par Jupiter l'expression suivante :

$$\begin{aligned}(\Delta)_4^2 = 45{,}851280 &+ 43{,}776934 \cos\xi - 3{,}208675 \sin\xi \\ &- 0{,}977196 \cos 2\xi - 0{,}326279 \sin 2\xi \\ &+ 0{,}027577 \cos 3\xi + 0{,}024532 \sin 3\xi \\ &- 0{,}000661 \cos 4\xi - 0{,}001430 \sin 4\xi + \ldots,\end{aligned}$$

où l'on a désigné par $(\Delta)_4$ la distance mutuelle entre la comète et Jupiter, la comète restant dans une portion de l'orbite voisine de l'orbite de la planète, et par ξ l'angle $c' + F = c' + 212^\circ 18'$, $c' + \frac{n'}{n}\pi$ étant l'anomalie moyenne de Jupiter à l'instant du passage de la comète par le périhélie. On a, de plus, supposé une valeur numérique spéciale pour l'anomalie partielle, laquelle a été introduite dans l'expression générale pour $(\Delta)_4^2$. Par une transformation très-facile à effectuer, on obtient

$$\frac{(\Delta)_4^2}{1 + 0{,}043283\cos\xi + 0{,}018066\sin\xi} = 46{,}769689 + 45{,}736892\cos\xi - 2{,}378345\sin\xi + E,$$

E désignant la somme de termes très-petits de l'ordre e'^2 et dépendant de $\cos 3\xi$, $\sin 3\xi$, ..., dont la valeur numérique est toujours au-dessous de 0,05.

Soit maintenant

$$T_1 = 46,769689 + 45,736892 \cos\xi - 2,378345 \sin\xi;$$

on voit aisément que le développement des puissances $T_1^{-\frac{n}{2}}$ suivant les multiples de ξ n'est pas assez convergent pour servir comme point de départ pour les calculs numériques. En effet, posant

$$m'_0 = 46,769689 \quad \text{et} \quad \frac{T_1}{m'_0} = 1 + \Phi \cos(\xi + A),$$

on a

$$\Phi = 0,9792389, \quad A = 2^\circ 58' 36'',02.$$

Par l'introduction d'un nouveau paramètre β déterminé par l'équation $\Phi = \frac{2\beta}{1+\beta^2}$, on obtient

$$\left(\frac{T_1}{m'_0}\right)^{-\frac{n}{2}} = \frac{(1+\beta)^{\frac{n}{2}}}{[1 + 2\beta\cos(\xi + A) + \beta^2]^{\frac{n}{2}}}, \quad \beta = 0,814925.$$

Faisons maintenant usage des transformations auxquelles donne naissance l'introduction des fonctions elliptiques. Pour ce but, nous supposons

$$\xi = 2\,\mathrm{am}\frac{2K}{\pi}x\,(\mathrm{mod}.\,k),\ \psi = \mathrm{am}\frac{2K_1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\left(\mathrm{mod}.\,k_1 = \frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}}\right),$$

après quoi l'on aura

$$(\mathcal{A}) \qquad \left(\frac{T_1}{m'_0}\right)^{-\frac{n}{2}} = \left(\frac{1 - k_1 \sin\psi}{1 - k_1 \Phi \cos A}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{[1 + \Phi_1 \sin(\psi - A_1)]^{\frac{n}{2}}},$$

$$\Phi_1 = 0,8274645, \quad A_1 = 9^\circ 48' 5'', 25.$$

Soient $\Phi_1 = \frac{2\beta_1}{1+\beta_1^2}$, $\beta_1 = 0{,}5299105$; on obtient

$$\left(\frac{T_1}{m'_0}\right)^{-\frac{n}{2}} = \frac{(1 - k_1 \sin\psi)^{\frac{n}{2}}}{(1 - k_1 \Phi \cos A)^{\frac{n}{2}}} \frac{(1+\beta_1^2)^{\frac{n}{2}}}{[1 + 2\beta_1 \sin(\psi - A_1) + \beta_1^2]^{\frac{n}{2}}}.$$

Jetant un coup d'œil sur les valeurs de β et de β_1, on sera convaincu que les développements suivant les multiples de ψ seront essentiellement plus convergents que ceux qui procèdent suivant les multiples de ξ. On obtiendra des séries encore un peu plus convergentes en introduisant la variable x au lieu de ψ; mais cette proposition est difficile à démontrer d'une manière purement analytique.

A partir de l'expression ($\mathcal{A}$), on déduit aisément des formules nouvelles, dans plusieurs cas très-importants, pour les calculs numériques. Par exemple, en observant que la différence $\Phi_1 \cos A_1 - k_1$ et la quantité $\Phi_1 \sin A_1$ ont des valeurs numériques assez petites, on peut développer $T_1^{-\frac{n}{2}}$ suivant les puissances ascendantes de

$$V = \frac{(\Phi_1 \cos A_1 - k_1)\sin\psi - \Phi_1 \sin A_1 \cos\psi}{1 + k_1 \sin\psi},$$

dont la valeur numérique dans notre exemple ne surpasse pas 0,2686537.

Au lieu de la formule ($\mathcal{A}$), nous aurons maintenant

$$\left(\frac{T_1}{m'_0}\right)^{-\frac{n}{2}} = \frac{1}{(1 - K_1 \Phi \cos A)^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{1 - k_1 \sin\psi}{1 + k_1 \sin\psi}\right)^{\frac{n}{2}} \left[1 - \frac{n}{2} V + \frac{n(n+2)}{2.4} V^2 - \ldots\right],$$

dont les différents termes, multipliés par le facteur $\left(\frac{1 - k_1 \sin\psi}{1 + k_1 \sin\psi}\right)^{\frac{n}{2}}$, peuvent être transformés en séries trigonométriques ayant pour argument x. Nous travaillerons, moi et mes aides, à des Tables destinées à convertir les fonctions

$$\left(\frac{1 - k_1 \sin\psi}{1 + k_1 \sin\psi}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\Big\} m\psi}{(1 + k_1 \sin\psi)^r} \quad \text{et} \quad \frac{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\Big\} m\psi}{(1 - k_1^2 \sin\psi^2)^{\frac{n}{2}} (1 + k_1 \sin\psi)^r}$$

en de telles séries.

En continuant les transformations successives de Φ et Λ, on trouve

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= 0,7294278, & \Lambda_2 &= 13^\circ.36'.24'',58, \\ \Phi_3 &= 0,7218830, & \Lambda_3 &= 13.54.54,99, \\ \Phi_4 = (\Phi) &= 0,7218712, & \Lambda_4 = (\Lambda) &= 13.54.58,23. \end{aligned}$$

Craignant d'abuser de votre indulgence, j'ose ajouter comme exemples deux résultats numériques du calcul des perturbations de la comète d'Encke. Le premier donne des inégalités en longitude du périhélie produites par Jupiter, l'autre celles qui sont produites par la Terre. Dans les deux cas, on a regardé seulement des portions de l'orbite cométaire dans lesquelles les rapprochements les plus sensibles entre la comète et les corps troublants ont lieu.

$$\Psi = \frac{2e}{\sqrt{1-e^2}}\,d\pi =$$

$\Psi_0 + 278'',69 \cos\omega_3$	$+32'',17 \cos 2\omega$	$-\ 1'',90 \cos 3\omega_3$	$-0'',94 \cos 4\omega_3$	$-0'',05 \cos 5\omega_3$	...
$-476,30 \cos 2x \cos\omega_3$	$-75,78 \cos 2x \cos 2\omega_3$	$+\ 2,79 \cos 2x \cos 3\omega_3$	$+2,43 \cos 2x \cos 4\omega_3$	$+0,18 \cos 2x \cos 4\omega_3$	...
$+284,09 \cos 4x \cos\omega_3$	$+88,53 \cos 4x \cos 2\omega_3$	$+\ 0,91 \cos 4x \cos 3\omega_3$	$-3,29 \cos 4x \cos 4\omega_3$	$-0,41 \cos 4x \cos 5\omega_3$	...
$-\ 31.37 \cos 6x \cos\omega_3$	$-71,56 \cos 6x \cos 2\omega_3$	$-\ 6,79 \cos 6x \cos 3\omega_3$	$+3,15 \cos 6x \cos 4\omega_3$	$+0,72 \cos 6x \cos 5\omega_3$	...
$-\ 35,03 \cos 8x \cos\omega_3$	$+40,50 \cos 8x \cos 2\omega_3$	$+\ 9,92 \cos 8x \cos 3\omega_3$	$-1,94 \cos 8x \cos 4\omega_3$	$-0,89 \cos 8x \cos 5\omega_3$	...
$+\ 39,71 \cos 10x \cos\omega_3$	$-15,14 \cos 10x \cos 2\omega_3$	$-\ 9,26 \cos 10x \cos 3\omega_3$	$+0,42 \cos 10x \cos 4\omega_3$	$+0,85 \cos 10x \cos 5\omega_3$	...
$-\ 20,94 \cos 12x \cos\omega_3$	$+\ 1,31 \cos 12x \cos 2\omega_3$	$+\ 6,24 \cos 12x \cos 3\omega_3$	$+0,66 \cos 12x \cos 4\omega_3$	$-0,61 \cos 12x \cos 5\omega_3$	...
$+\ 7,38 \cos 14x \cos\omega_3$	$+\ 2,85 \cos 14x \cos 2\omega_3$	$-\ 3,06 \cos 14x \cos 3\omega_3$	$-1,04 \cos 14x \cos 4\omega_3$	$+0,30 \cos 14x \cos 5\omega_3$	...
$-\ 1,39 \cos 16x \cos\omega_3$	$-\ 2,64 \cos 16x \cos 2\omega_3$	$+\ 0,95 \cos 16x \cos 3\omega_3$	$+0,89 \cos 16x \cos 4\omega_3$	$-0,05 \cos 16x \cos 5\omega_3$	...
$-\ 0,25 \cos 18x \cos\omega_3$	$+\ 1,40 \cos 18x \cos 2\omega_3$	$+\ 0,03 \cos 18x \cos 3\omega_3$	$-0,55 \cos 18x \cos 4\omega_3$	$-0,08 \cos 18x \cos 5\omega_3$	...
$+\ 0,30 \cos 20x \cos\omega_3$	$-\ 0,49 \cos 20x \cos 2\omega_3$	$-\ 0,27 \cos 20x \cos 3\omega_3$	$+0,24 \cos 20x \cos 4\omega_3$	$+0,11 \cos 20x \cos 5\omega_3$	...
$-\ 0,10 \cos 22x \cos\omega_3$	$+\ 0,09 \cos 22x \cos 2\omega_3$	$+\ 0,22 \cos 22x \cos 3\omega_3$	$-0,06 \cos 22x \cos 4\omega_3$	$-0,09 \cos 22x \cos 5\omega_3$	...
....	....	....	....	....	...
$-303,63 \sin 2x \cos\omega_3$	$+38,65 \sin 2x \cos 2\omega_3$	$+12,56 \sin 2x \cos 3\omega_3$	$+0,29 \sin 2x \cos 4\omega_3$	$-0,30 \sin 2x \cos 5\omega_3$	...
$+391,76 \sin 4x \cos\omega_3$	$-36,36 \sin 4x \cos 2\omega_3$	$-19,43 \sin 4x \cos 3\omega_3$	$-1,18 \sin 4x \cos 4\omega_3$	$+0,51 \sin 4x \cos 5\omega_3$	...
$-239,63 \sin 6x \cos\omega_3$	$-\ 3,71 \sin 6x \cos 2\omega_3$	$+17,16 \sin 6x \cos 3\omega_3$	$+2,52 \sin 6x \cos 4\omega_3$	$-0,49 \sin 6x \cos 5\omega_3$	...
$+109,46 \sin 8x \cos\omega_3$	$+20,97 \sin 8x \cos 2\omega_3$	$-10,57 \sin 8x \cos 3\omega_3$	$-3,28 \sin 8x \cos 4\omega_3$	$+0,23 \sin 8x \cos 5\omega_3$	...
$-\ 33,03 \sin 10x \cos\omega_3$	$-21,62 \sin 10x \cos 2\omega_3$	$+\ 3,75 \sin 10x \cos 3\omega_3$	$+3,07 \sin 10x \cos 4\omega_3$	$+0,11 \sin 10x \cos 5\omega_3$	...
$+\ 2,40 \sin 12x \cos\omega_1$	$-13,76 \sin 12x \cos 2\omega_3$	$+\ 0,49 \sin 12x \cos 3\omega_3$	$-2,16 \sin 12x \cos 4\omega_3$	$-0,36 \sin 12x \cos 5\omega_3$	...
$+\ 3,71 \sin 14x \cos\omega_3$	$-\ 6,17 \sin 14x \cos 2\omega_3$	$-\ 1,95 \sin 14x \cos 3\omega_3$	$+1,10 \sin 14x \cos 4\omega_3$	$+0,44 \sin 14x \cos 5\omega_3$	...
$-\ 2,78 \sin 16x \cos\omega_3$	$+\ 1,76 \sin 16x \cos 2\omega_3$	$+\ 1,75 \sin 16x \cos 3\omega_3$	$-0,31 \sin 16x \cos 4\omega_3$	$-0,37 \sin 16x \cos 5\omega_3$	...
$+\ 1,02 \sin 18x \cos\omega_3$	$-\ 0,02 \sin 18x \cos 2\omega_3$	$-\ 1,03 \sin 18x \cos 3\omega_3$	$-0,09 \sin 18x \cos 4\omega_3$	$+0,23 \sin 18x \cos 5\omega_3$	...
$-\ 0,17 \sin 20x \cos\omega_3$	$-\ 0,32 \sin 20x \cos 2\omega_3$	$+\ 0,43 \sin 20x \cos 3\omega_3$	$+0,19 \sin 20x \cos 4\omega_3$	$-0,10 \sin 20x \cos 5\omega_3$	...
$-\ 0,05 \sin 22x \cos\omega_3$	$+\ 0,22 \sin 22x \cos 2\omega_3$	$-\ 0,10 \sin 22x \cos 3\omega_3$	$-0,15 \sin 22x \cos 4\omega_3$	$+0,02 \sin 22x \cos 5\omega_3$	...
....	....	....	....	....	...

Les calculs numériques sont effectués par M. Asten. (Voir *Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, t. XVIII, n° 10.)

Dans l'expression précédente, on a posé

$$x = \frac{\pi}{2K}\int_0^{\frac{1}{2}\xi}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}}, \quad \xi = c' + 212°18', \quad \log k = 9{,}99736685,$$

$$n(t-T_0) = -\int\frac{(1+e^2)\,d\lambda}{\left[1+\frac{2e}{1-e}\,l^2\left(\operatorname{sinam}\frac{2L}{\pi}\lambda\right)^2\right]^2}\,\frac{2l}{\sqrt{1-e^2}}\,\frac{2L}{\pi}\cos\operatorname{am}\frac{2L}{\pi}\lambda,$$

$$\log l = 8{,}9402960 - 10,$$

n étant le mouvement moyen de la comète et T_0 le temps du passage par l'aphélie. La relation entre ω_3 et λ est enfin la suivante :

$$\sin\lambda = (\sin\tfrac{1}{2}\omega_3)^2.$$

Les calculs des perturbations produites par la Terre sont faites par MM. Backlund (un assistant de notre Observatoire) et Bonsdorff (astronome et Directeur de l'Observatoire de Jachkent). Ces Messieurs ont obtenu le résultat suivant :

$$\Psi = \frac{2}{\sqrt{1-e}}\,d\pi =$$

$$\begin{array}{lllll}
\Psi_0 + 6'',47\cos\mu & +3'',12\cos2\mu & +1'',03\cos3\mu & +0'',20\cos4\mu & \cdots \\
-10,58\cos2x\cos\mu & -5,24\cos2x\,2\mu & -1,83\cos2x\cos3\mu & -0,39\cos2x\cos4\mu & \cdots \\
+\ 6,18\cos4x\cos\mu & +3,27\cos4x\cos2\mu & +1,29\cos4x\cos3\mu & +0,34\cos4x\cos4\mu & \cdots \\
-\ 2,11\cos6x\cos\mu & -1,44\cos6x\cos2\mu & -0,24\cos6x\cos3\mu & -0,04\cos6x\cos4\mu & \cdots \\
+\ 0,70\cos8x\cos\mu & +0,56\cos8x\cos2\mu & +0,32\cos8x\cos3\mu & +0,18\cos8x\cos4\mu & \cdots \\
-\ 0,18\cos10x\cos\mu & -0,17\cos10x\cos2\mu & -0,13\cos10x\cos3\mu & -0,07\cos10x\cos4\mu & \cdots \\
\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots \\
-\ 2,83\sin2x\cos\mu & -1,03\sin2x\cos2\mu & -0,20\sin2x\cos3\mu & +0,01\sin2x\cos4\mu & \cdots \\
+\ 3,07\sin4x\cos\mu & +1,51\sin4x\cos2\mu & +0,32\sin4x\cos3\mu & -0,10\sin2x\cos4\mu & \cdots \\
-\ 0,74\sin6x\cos\mu & -0,67\sin6x\cos2\mu & -0,28\sin6x\cos3\mu & -0,04\sin6x\cos4\mu & \cdots \\
+\ 0,40\sin8x\cos\mu & +0,30\sin8x\cos2\mu & +0,15\sin8x\cos3\mu & +0,03\sin8x\cos4\mu & \cdots \\
-\ 0,10\sin10x\cos\mu & -0,09\sin10x\cos2\mu & -0,07\sin10x\cos3\mu & -0,03\sin10x\cos4\mu & \cdots \\
\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots
\end{array}$$

Dans ces formules les variables sont déterminées de la manière suivante :

$$x = \frac{\pi}{2K}\int_0^{\frac{1}{2}\xi}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}}, \quad \xi = c' + 47°20'42'',4, \quad \log k = 9{,}99736685,$$

$$n(t-T_0) = \int\left[1 - e + 2eh^2\left(\sin\operatorname{am}\frac{2H}{\pi}\omega\right)^2\right]2h\frac{2H}{\pi}\cos\operatorname{am}\frac{2H}{\pi}\omega d\omega,$$

$h = \sqrt{\frac{1}{2}}$ et T_0 désignant le temps du passage par le périhélie auquel l'anomalie moyenne c' appartient.

$$\sin\omega = +\sin\tfrac{1}{2}\omega'^2,$$
$$\sin\tfrac{1}{2}\omega' = l\sin\tfrac{1}{2}\lambda, \quad \log l = 9{,}8616763,$$
$$\cos\lambda_1 = -(\cos\tfrac{1}{2}\mu)^2.$$

On a désigné par Ψ_0 la constante d'intégration qui doit être déterminée séparément pour chaque révolution de la comète. Or, la quantité Ψ_0 doit être regardée comme une fonction de x, qu'on peut déterminer par la sommation analytique des expressions

$$\tfrac{1}{2}\cos 2ix_0 + \cos 2ix_1 + \ldots + \cos 2ix_{s-1} + \tfrac{1}{2}\cos 2ix_s,$$
$$\tfrac{1}{2}\sin 2ix_0 + \sin 2ix_1 + \ldots + \sin 2ix_{s-1} + \tfrac{1}{3}\sin 2ix_3,$$

s désignant le nombre indéterminé des révolutions de la comète à partir d'une époque certaine, et

$$x_s = \frac{\pi}{2K}\int_0^{\frac{1}{2}\xi_s}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}}, \quad \xi_s = c'_s + 47°20'42'',4, \quad c'_1 = c'_0 + 2\frac{n'}{n}\pi,$$
$$c'_2 = c'_0 + 4\frac{n'}{n}\pi, \ldots.$$

Les calculs numériques pour effectuer ces sommations ne sont pas encore achevés. Ayant employé dans les deux cas la même valeur numérique du module des fonctions elliptiques, on a néanmoins obtenu des séries suffisamment convergentes; ce qui montre que, dans des cas assez différents, on peut se servir d'une seule valeur du module.